Franz v. Walderdorff

Methodisch geordnete

Aufgabensammlung,

mehr als

8000 Aufgaben enthaltend

über alle Teile der Elementar-Arithmetik,

vorzugsweise für

Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen.

Von

Dr. E. Bardey.

Elfte, um einen neuen Abschnitt vermehrte Auflage.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1883.

Seinem früheren Lehrer,

dem

Herrn Geheimen Regierungsrat

Professor Dr. phil. und med. F. H. Neumann

zu Königsberg,

als ein Zeichen

seiner

Verehrung und Dankbarkeit

der Verfasser.

Was heute nicht geschieht, ist morgen nicht gethan;
Und keinen Tag soll man verpassen.
Das Mögliche soll der Entschluß
Beherzt sogleich beim Schopfe fassen,
Er will es dann nicht fahren lassen,
Und wirket weiter, weil er muß.

G.

Vorwort.

Wenn es schon beim gewöhnlichen Rechnen für notwendig gehalten wird, den Schülern eine Aufgabensammlung in die Hände zu geben, so ist dies beim Unterricht in der allgemeinen Arithmetik sicher noch notwendiger, weil diese vielseitiger, umfassender und schwieriger ist als jenes. Der Lehrer muß nicht nur des zeitraubenden Diktierens enthoben werden, sondern der Schüler muß auch das Gebiet vor sich haben und übersehen können, dem er seine Kräfte widmen soll; sonst wird er auf demselben nie heimisch werden. Rechenbücher besitzen wir in fast zahlloser Menge und vielfach von sehr zweckmäßiger Einrichtung; geeignete Aufgabensammlungen über die allgemeine Arithmetik nur noch in sehr geringer Anzahl. Das ist die Veranlassung zur Abfassung dieses Buches gewesen.

Es ist zum Gebrauche in der Schule bestimmt, für alle Klassen, in denen Arithmetik gelehrt wird, also von Quarta bis Prima, und soll einem dreifachen Zwecke dienen. Erstens soll es dem Schüler für seine häuslichen Arbeiten die nötige Menge geeigneter Aufgaben liefern. Zweitens soll es beim Unterrichte in den Händen des Schülers und des Lehrers sein, damit der Lehrer seinen Vortrag an die Fragen, Bemerkungen und Aufgaben anknüpfe. Drittens soll es dem Schüler die wesentlichen Anhaltspunkte für die Repetition bieten.

Die Zahl der Aufgaben sowohl schwieriger als auch der leichtesten und einfachsten Art ist, wie ich hoffe, so groß, daß sie nicht nur für die fähigsten Schüler beim Maximum der Zeit, welche man auf diesen Gegenstand an Gymnasien und Realschulen verwendet, alle genannten Klassen hindurch auf mehrere Jahre ausreicht, sondern daß mit ihrer Hilfe auch die schwächsten Schüler zur vollständigen Klarheit der vorgetragenen Sätze, zur Geläufigkeit in der Anwendung derselben und zur Fertigkeit im Lösen der betreffenden Aufgaben gebracht werden können.

In jedem Abschnitt sind die Aufgaben nach ihrer Schwierigkeit geordnet, von den leichteren anfangend ganz allmählich zu den schwereren fortschreitend. Dabei ist überall auf die Zusammenstellung der gleichartigen Aufgaben möglichst viel Rücksicht genommen.

Große Mannigfaltigkeit der Aufgaben ist angestrebt worden, einerseits um das Interesse der Schüler rege zu halten, andrerseits sie zu befähigen, die vorgetragenen Lehrsätze in recht verschiedenartiger

Weise aufzufassen und die Rechnung auf recht verschiedenartige Fälle anzuwenden.

Die Gleichungen des ersten und zweiten Grades mit einer und mehreren Unbekannten sind besonders zahlreich vertreten, weil sie der interessanteste und wichtigste Teil der Arithmetik sind und von den Schülern mit Vorliebe gerechnet werden.

Damit der Schüler sich leicht orientiere und das Buch nicht ungern in die Hand nehme, ist auf eine auch äußerlich ansprechende und übersichtliche Darstellung alle Sorgfalt verwendet, und die renommierte Verlagshandlung hat durch die vorzügliche Herstellung der mathematischen Zeichen wesentlich zur Vermehrung der Übersichtlichkeit beigetragen.

Fast allen Abschnitten sind Fragen oder Bemerkungen vorangeschickt. Durch Beantwortung der Fragen soll der Schüler sich und dem Lehrer Rechenschaft ablegen, ob er den Vortrag des Lehrers genügend verstanden hat und daher zum Verständnis und zur Auflösung der nachfolgenden Aufgaben befähigt ist. Die Bemerkungen enthalten das, was mir für den betreffenden Abschnitt das Wesentlichste zu sein schien, damit der Schüler dies immer wieder vornehmen und zur Repetition benutzen kann. Je nach der Schwierigkeit des Abschnitts sind sie bald mehr, bald weniger ausführlich, am ausführlichsten bei den Gleichungen des vierten Grades. Diese Aufgaben möchten ohne die Darlegung der Methode zu ihrer Auflösung für die Schüler zu schwer scheinen. Alle sonst bekannten allgemeinen Auflösungen der Gleichungen des vierten Grades sind für die Praxis nicht brauchbar, weil sie auf vollständige kubische Resolventen führen, nicht auf reduzierte. Der hier angegebene Weg, zur reduzierten Resolvente zu gelangen und daraus die Auflösung herzuleiten, ist nicht übermäßig lang und hat den Vorzug, daß er auf ganz elementaren Voraussetzungen beruht.

Den Decimalbrüchen ist kein besonderer Abschnitt eingeräumt. Die Bekanntschaft mit denselben wird vorausgesetzt. Sollen aber die Decimalbrüche noch in Quarta vorgenommen werden, so liefert jetzt nach der Einführung der neuen Maße und Gewichte jedes gewöhnliche Rechenbuch dazu Beispiele in großer Menge. Nur für die verkürzte Multiplikation und Division schienen Beispiele notwendig zu sein. Sie finden sich im Anhang 1.

Das abgekürzte Verfahren zur Ausziehung der Quadratwurzel ist besonders (Anhang 2.) dargestellt, da ich mehrfach gefunden habe, daß die Schüler die Wurzel auf wer weiß wie viel Stellen ausziehen mußten, ohne dies Verfahren zu kennen.

Die Berechnung der Logarithmen, von denen sich die Schüler so schwer einen Begriff machen können, finden sich in Anhang 3. und 4. Die Entwickelung der Reihe für log $(1 + x)$ zu bringen, lag dem Zwecke des Buches zu fern, greift zu sehr in die Theorie ein.

Die Kettenbrüche haben ihren Platz hinter den Logarithmen erhalten, weil sie den einfachen Rechnungsarten näher stehen als den zusammengesetzten. Damit ist jedoch keineswegs angedeutet, daß sie

gleich nach den Logarithmen vorgenommen werden sollen. In welcher Reihenfolge der Stoff verarbeitet wird, ist Sache des Lehrers.

Die Kurse für die einzelnen Klassen sind nicht getrennt. Dadurch wäre das Gleichartige zu sehr aus einander gerissen worden und die Übersicht würde zu sehr gelitten haben. Die Gleichungen des ersten Grades hätten auf drei Klassen verteilt werden müssen, ebenso die des zweiten Grades. Der Lehrer wird daher bei einem Abschnitt nicht gleich auch die schwierigen Aufgaben rechnen lassen, sondern zunächst nur die leichteren. Nach Einübung der vier ersten Operationen, wobei schon manches aus der Multiplikation und Division fortbleibt, und nach den einfachsten Beispielen über die Zerlegung in Faktoren, das Heben der Brüche und das Gleichnamigmachen wird man daher die Gleichungen des ersten Grades und ihre Anwendungen vornehmen, natürlich auch von diesen Abschnitten erst nur die leichteren Aufgaben. Geht man später zu den folgenden Abschnitten, so fährt man fort, dem Schüler nebenher von Zeit zu Zeit Gleichungen oder Aufgaben über Gleichungen als häusliche Arbeiten aufzugeben. Da die Gleichungen den Mittelpunkt der ganzen Arithmetik bilden und bei ihnen Operationen jeglicher Art auszuführen sind, so müssen sie immerfort geübt werden.

Die Resultate sind den Aufgaben nicht beigefügt. Sie sind in einem besonderen Hefte zusammengestellt und können nur vom Lehrer direkt aus der Verlagshandlung bezogen werden. Es bleibt so ganz dem Ermessen des Lehrers überlassen, ob er sie seinen Schülern in die Hände geben will oder nicht. Doch möchten mehr Gründe dafür sein, daß der Lehrer allein im Besitze der Resultate bleibt. Die Sammlung enthält eine große Menge leichter Aufgaben, von denen mehrere mit einem Mal aufgegeben werden. In diesem Falle ist die Kontrolle für den Lehrer sehr lästig. Ferner wird auch bei nicht so leichten Aufgaben der Schüler zu sehr geneigt sein, sich an das Resultat zu halten, wenn er das Resultat weiß. Das mag ihn immerhin veranlassen, sich nicht mit einem unrichtigen Resultate zu begnügen; er wird es jedoch nie lernen, sich beim Rechnen auf sich selbst zu verlassen, einen Überschlag oder die Probe zu machen, ob das Resultat auch richtig sein kann. Im allgemeinen hat jeder Fall seine Bedenken und seine Vorteile. Bei welchem die Vorteile überwiegend sind, hängt besonders von den Aufgaben und den Schülern ab. Übrigens steht es ja ganz beim Lehrer, wenn er allein die Resultate in Händen hat, ob er etwas und was und wie viel er von denselben mitteilen will. Die Resultate jedem Abschnitte beizufügen schien schon aus dem Grunde nicht zweckmäßig, weil das Buch dadurch an seinem Äußeren sehr verloren hätte. Viele Resultate von verschiedener Form und verschiedener Länge gedrängt zusammengestellt machen auf das Auge einen chaotischen Eindruck.

Brandenburg a. d. H., im August 1871.

E. B.

Aus dem Vorwort zur zweiten Auflage.

Der überaus schnelle Absatz des Buches — schon acht Monate nach dem Erscheinen der ersten Auflage wurde mir die Aufforderung zur Bearbeitung einer neuen — und die sehr günstigen Recensionen sind mir ein Beweis gewesen, daß ein Bedürfnis für ein solches Buch vorhanden war und daß ich so ziemlich das Richtige getroffen habe.

Es sind außer den Aufgaben über den binomischen Satz noch eine große Zahl von Aufgaben hinzugekommen. Damit die Exemplare der ersten und zweiten Auflage leicht neben einander gebraucht werden können, sind alle neuen Aufgaben (außer denen über den binomischen Satz) mit einem Index an der Nummer versehen. Der Titel ist nicht geändert, obwohl die Zahl der Aufgaben jetzt wohl gegen 8000 beträgt. Die Verlagshandlung hat sich in dankenswerter Weise erboten, den Besitzern der ersten Auflage die für die zweite Auflage hinzugekommenen Aufgaben zu einem billigen Preise nachzuliefern.

Die langen theoretischen Bemerkungen zu Abschnitt V sind möglichst beschränkt. Bei manchen Formeln, besonders bei denen in Abschnitt III und IV den wörtlichen Ausdruck zu streichen konnte ich mich nicht entschließen. Es sind mir zu wunderliche Einkleidungen dieser Formeln vorgekommen, die wohl als eine künstliche Übertragung mathematischer Zeichen in Worte angesehen werden können, die sonst aber weder praktischen noch theoretischen Wert haben. Soll der Schüler Interesse an den Sätzen haben, so müssen sie auch zur Anwendung geeignet sein.

Brandenburg a. d. H., im September 1872.

E. B.

Aus dem Vorwort zur dritten Auflage.

Da in noch nicht zwei Jahren zwei starke Auflagen des Buches vergriffen waren, so hat die Verlagshandlung diesmal eine doppelte Auflage herstellen lassen. Die vorgenommenen Änderungen sind unbedeutend und unwesentlich.

In Rücksicht auf eine Recension des Buches im Jahresbericht von Lüben, welche die Ordnung in den ersten Abschnitten nicht ganz richtig findet, obwohl sie sonst dem Buche große Anerkennung zollt, möge hier bemerkt werden:

Bevor man die schwierigeren Aufgaben aus der Multiplikation und Division rechnen läßt, müssen die leichteren Aufgaben über die Addition und Subtraktion der Brüche vorgenommen werden (Nr. 1—31).

Was den ersten Unterricht in der Arithmetik betrifft, der dem Recensenten Schwierigkeiten zu machen scheint, so ist es hier durchaus ratsam, recht kurz zu sein und die Schüler möglichst schnell zur Selbst-

thätigkeit zu bringen. Dem Schüler ist zu zeigen, daß alles Rechnen mit Buchstaben ebenso einfach und meistens noch viel einfacher ist als das Rechnen mit Zahlen und auf denselben Gesetzen beruht. Betrachtet man das Rechnen mit Buchstaben von diesem Gesichtspunkte aus, so muß der Übergang vom Rechnen mit Zahlen zum Rechnen mit Buchstaben auch dem Schwerfälligsten leicht sein. Die Beweise sind einfach einzurichten und auf die allernotwendigsten zu beschränken. Zu viele Beweise sind hier nur dazu geeignet, dem Schüler die Arithmetik auf lange Zeit gründlich zu verleiden, ihm höchst einfache Sachen unbegreiflich erscheinen zu lassen, und an Buchstaben auch das noch unklar zu machen, was er bis dahin bei Zahlen für klar und allgemein gültig gehalten hat.

Möge das Buch auch ferner dazu beitragen, die Arbeit des Lehrers zu vermindern, die Schüler leichter über die Schwierigkeiten hinwegzuheben, den Eifer anzuregen und ihre Kenntnisse in dem wichtigsten Teile der Mathematik zu fördern.

Brandenburg a. d. H., im August 1873.

E. B.

Vorwort zur siebenten Auflage.

Größere Veränderungen sind in dieser Auflage nicht vorgenommen. Von einigen Berichtigungen abgesehen ist die Erklärung der Potenz (S. 40) geändert, Nr. 35—37 auf S. 290 und die Anmerkung auf S. 305. Außerdem sind die Zahlen, welche auf die dritte Auflage verwiesen, ausgemerzt. Sie berührten das Auge unangenehm und waren jetzt zwecklos geworden. Endlich sind für die neuen Maße und Gewichte fast überall die offiziellen Bezeichnungen eingeführt. Die Bezeichnungen a^{m}, b^{cm}, 460^{gr}, K^{m}, K^{cm} für bzw. a Meter, b Centimeter, 460 Gramm, Kubikmeter, Kubikcentimeter mußten in einem Buche, wo Tausende von Potenzen vorkommen, unpassend erscheinen. Die offiziellen Bezeichnungen schienen jedoch leider noch bedenklicher. In einem Buche für allgemeine Arithmetik, in welchem kein kleiner lateinischer Buchstabe vorkommt, der etwas anderes bedeutet als eine Zahlengröße, kann es sehr leicht zu Mißverständnissen führen, wenn m, cm, g u. s. w. bald Zahlen, bald Maße bedeuten sollen. Außerdem widerspricht es allen Gesetzen der Darstellung, unter lauter deutschen Bezeichnungen und Lettern einige wenige lateinische Lettern zu gebrauchen. Drittens ist l für Liter deshalb eine unpassende Bezeichnung, weil ein gerades lateinisches l im Druck von Eins (1) kaum zu unterscheiden ist. An diese Punkte werden die Urheber der Regierungsvorlage schwerlich gedacht haben. Man müßte z. B. nach der offiziellen Bezeichnung S. 23, Z. 4 und S. 28, Z. 3 v. u. schreiben: Kostet 1 m a M, so kosten b cm ab Pf.; wenn a m b M kosten, so kostet 1 cm $\frac{b}{a}$ Pf., was

doch niemand billigen wird. — Da jedoch die Verlagshandlung bei einer Änderung der Bezeichnung die offizielle Bezeichnung wünschte und die jungen Leute dieselbe doch einmal kennen lernen sollen, so mußte ich mich, wenn auch nicht ohne großes Widerstreben, zu der offiziellen Bezeichnung entschließen. Wir haben uns damit geholfen, daß wir die Maßbezeichnungen mit schrägen Lettern herstellen ließen. Die geraden kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen mithin überall Zahlen, die schrägen Buchstaben Maße und Gewichte, also *m*, *cm*, *g*, *l*, *hl*, *cbm*, *cbcm* u. s. w. bzw. Meter, Centimeter, Gramm, Liter, Hektoliter, Kubikmeter, Kubikcentimeter u. s. w.

Brandenburg, im Februar 1878.

E. B.

Vorrede zur achten Auflage.

Über die Bezeichnung der Basis bei log ist in letzter Zeit mehrfach gestritten. Die von mir gewählte Bezeichnung $\log a_{(b)}$, d. h. Logarithmus von a für die Basis b, hat vor allen mir bekannten Bezeichnungen den Vorzug, daß sie lesbar ist. Die Zeichen folgen so aufeinander, wie die betreffenden Wörter beim Lesen. (b) gehört zu log a, also weder zu a allein, noch zu log allein. Die Bezeichnung $\log a_{(b)}$ ist daher 1) wegen der Stellung von (b) hinter a nicht fehlerhaft; sie entspricht 2) der Wortfolge; sie kann 3) wegen der Klammern um b keine Verwechselung veranlassen; sie hat 4) vor der Bezeichnung $\log^b a$ den Vorzug, daß die Basis zuunterst steht, also eine Stellung hat, welche ihr allein gebührt. Die Bezeichnungen $\log^b a$ und $\log_b a$ sind fehlerhaft, weil sie unlesbar sind; sie widersprechen der Wortfolge. Sie wären nur dann richtig, wenn man lesen würde: Logarithmus für die Basis b von a. Vgl. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht VIII S. 484—490.

Brandenburg, im März 1879.

E. B.

Elfte Auflage.

Es ist ein neuer Abschnitt „Graphische Darstellungen" hinzugekommen. Da das Buch stereotypiert ist, so ließ sich derselbe nur als Anhang 5 unterbringen. Ich empfehle denselben den Herren Kollegen. Es sollte aus den oberen Klassen kein Schüler entlassen werden, der mit den hierher gehörigen Aufgaben nicht leidlich vertraut ist.

Bad Stuer i. M., im Sept. 1883.

E. B.

Zur Nachricht für Mathematiker,

besonders für Freunde meiner Aufgabensammlung.

II.

Die Herren Seminarlehrer J. Hoffmann und J. Klein haben in ihrem „Rechenbuch für Seminaristen und Lehrer" (Düsseldorf, bei L. Schwann) eine große Menge von Aufgaben aus andern Büchern abgeschrieben, besonders auch aus meiner Aufgabensammlung, ohne auch nur meinen Namen zu nennen. Um zu zeigen, wie weit die Dreistigkeit dieser Herren geht, führe ich nur zwei Beispiele an.

Von 49 aufeinander folgenden Aufgaben über Gleichungen vom ersten Grade mit zwei Unbekannten sind 42 Aufgaben, schreibe **zweiundvierzig Aufgaben** aus meinem Buche rein abgeschrieben.

Bei den quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten sind 20 aufeinander folgende Aufgaben, schreibe **zwanzig aufeinander folgende Aufgaben** aus meinem Buche rein abgeschrieben, nur in Nr. 15 ist das Zeichen von n geändert.

In der mathematischen Litteratur steht eine solche Dreistigkeit gewiß ohne Beispiel da.

Wie die Herren, besonders ihren Zöglingen gegenüber, für welche das Buch bestimmt ist, solche Handlungsweise mit dem Charakter ehrenhafter Männer in Einklang bringen können, begreife, wer kann.*)

Bad Stuer i. M., im Sept. 1883.

Dr. E. Bardey.

---

*) Man sehe auch Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht XIII, 6, S. 489—90 und meine Erklärung daselbst XIV, 2, S. 161—62.

Inhalt.

I.

Vorübungen.

1. Wie heißen die vier ersten Operationen oder Grundrechnungsarten?

2. Was heißt addieren? Welches ist das Zeichen der Addition, und wie wird es gelesen? Wie heißen die Größen, welche bei der Addition in Betracht kommen?

3. Wie liest man $12 + 4 = 16$, und wie heißen in dieser Verbindung die betreffenden Größen?

4. Was heißt subtrahieren? Welches ist das Zeichen der Subtraktion, und wie wird es gelesen? Wie heißen die Größen, welche bei der Subtraktion in Betracht kommen?

5. Wie liest man $16 - 4 = 12$, uud wie heißen in dieser Verbindung die betreffenden Größen?

6. Was heißt multiplizieren? Welches ist das Zeichen der Multiplikation, und wie wird es gelesen? Wie heißen die Größen, welche bei der Multiplikation in Betracht kommen?

7. Wie liest man $4 \times 5 = 20$ oder $4 \,.\, 5 = 20$, und wie heißen in dieser Verbindung die betreffenden Größen?

8. Was heißt dividieren? Welches ist das Zeichen der Division, und wie wird es gelesen? Wie heißen die Größen, welche bei der Division in Betracht kommen?

9. Wie liest man $20 : 4 = 5$, oder wie kann man lesen $\frac{20}{4} = 5$, und wie heißen in dieser Verbindung die vorkommenden Größen?

10. Schreibe in mathematischen Zeichen auf: 20 plus 5 ist gleich 25, 17 minus 9 ist gleich 8, 13 mal 4 ist gleich 52, 78 durch 3 ist gleich 26.

11. Was ist bei der Addition gegeben, und was wird gesucht?

12. Was ist bei der Subtraktion gegeben, und was wird gesucht?

13. Was ist bei der Multiplikation gegeben, und was wird gesucht?

14. Was ist bei der Division gegeben, uud was wird gesucht?

15. Was heißt im erweiterten und allgemeinen Sinne **addieren**?

16. Wie hängt die Subtraktion mit der Addition zusammen, und welche Größen bei der Addition entsprechen den Größen, die bei der Subtraktion vorkommen?

17. Inwiefern ist die Subtraktion die umgekehrte Operation von der Addition?

18. Was heißt darnach im erweiterten und allgemeinen Sinne **subtrahieren**?

19. Wie folgt aus der Addition die Multiplikation, und was heißt demnach **multiplizieren**?

20. Wie hängt die Division mit der Multiplikation zusammen, und welchen Größen bei der Multiplikation entsprechen die Größen, die bei der Division vorkommen?

21. Inwiefern ist die Division eine umgekehrte Operation von der Multiplikation?

22. Was heißt darnach im erweiterten und allgemeinen Sinne dividieren?

23. Welche der vier ersten Operationen sind Operationen gleichen Ranges? Welches sind die höheren, und welches die niederen Operationen?

II.

Einführung in die Rechnung mit Buchstaben.

1. Als was sind die Buchstaben anzusehen, wenn man sich ihrer zur Rechnung bedient? — Warum?

2. Warum bedient man sich bei der Rechnung der Buchstaben anstatt der Zahlen?

3. Welche Buchstaben benutzt man vorzugsweise zum Rechnen?

4. Welches Rechnungszeichen wird bei der Anwendung von Buchstaben oft ausgelassen und wann?

5. Wie wird gelesen oder kann gelesen werden ab, 5a, xy, 9x? Wie kann man diese Ausdrücke auch sonst schreiben?

6. Was bedeutet 3a? Was 6x? — 7. Was ist ein Koefficient?

8. Was erhält man: 1) wenn man a und b, 2) 2x und 3y, 3) 7 und c, 4) 7n und 4n, 5) $1\frac{1}{2}$p und $3\frac{1}{2}$p addiert?

9. Was erhält man: 1) wenn man m von n, 2) 9 von a, 3) x von 2y, 4) 7u von 13u, 5) $7\frac{1}{2}$z von $10\frac{1}{2}$z subtrahiert?

10. Was macht 1) a weniger 1, 2) 5c weniger 3d, 3) 6m weniger m, 4) $5\frac{1}{2}$n weniger $4\frac{2}{3}$n?

11. Was erhält man: 1) wenn man a mit b, 2) x mit y, 3) 7 mit c multipliziert?

12. Was erhält man: 1) wenn man a durch b, 2) c durch 8, 3) 19 durch x dividiert?

13. Was giebt: 1) a dividiert in b, 2) n in p, 3) 7 in q?

14. Welche Summen geben m und n, 7 und p, 8u und 5v, 13x und 7x, y und y, u und 9u, $3\frac{1}{4}$a und $5\frac{1}{2}$a, $1\frac{2}{3}$b und $\frac{5}{6}$b, 8c und $1\frac{7}{3}$c, $\frac{5}{3}$d und $\frac{7}{4}$d?

15. Welche Differenzen finden statt zwischen a und b, x und 3, 8 und p, u und v, wenn die erste der genannten Zahlen bei jedem Falle die größere ist und als Minuend angesehen wird? Und wie heißen die Differenzen, wenn man jedesmal die zweite der genannten Zahlen als Minuend ansieht?

16. Wie heißen die Produkte der Zahlen d und c, x und a, 7 und m, p und 5?

17. Wie heißen die Quotienten, wenn der Divisor und Dividendus bezüglich a und b, 4 und c, r und 9 sind?

18. Welche Zahl ist um 1 größer als a, um 5 größer als b, um m größer als n, um 2p größer als 5q, um 7x größer als 11x, um 4y größer als y, um $3\frac{1}{2}$z größer als $7\frac{1}{2}$z?

19. Um wie viel ist a größer als b, 7 größer als m, 9x größer als 5y, 10u größer als 6u, 7v größer als v, $\frac{1}{2}$a größer als $\frac{1}{3}$a, $9\frac{1}{4}$a größer als 7a?

20. Welche Zahl ist um p kleiner als q, um 1 kleiner als m, um 20u kleiner als 23v, um 17x kleiner als 20x, um u kleiner als 2u, um $1\frac{1}{3}$y kleiner als $2\frac{5}{6}$y?

21. Welche Zahl ist 9 mal so groß als a, 10 mal so groß als b, x mal so groß als y?

22. Welche Zahl ist 6 mal so klein als a, n mal so klein als x, m mal so klein als y?

23. Welche Zahl ist die Hälfte von a, der 7. Teil von c, der n. Teil von x?

24. Wenn a eine beliebige ganze Zahl ist, wie heißt dann die nächst größere und wie die nächst kleinere ganze Zahl?

25. Was giebt $a + a$, $b + b + b + b$, $x + x + x + x + x$?

26. Was giebt $a - a$, $x - x$?

27. Was giebt a mal 1, was 1 mal a?

28. Was giebt a durch 1, was 1 durch b, was x in 1, was 1 in y?

29. Was giebt x durch x, y in y?

30. Was giebt $a + 0$, was $0 + a$?

31. Was giebt $a - 0$, $x - 0$?

32. Was giebt a mal 0, was 0 mal b?

33. Was giebt 0 durch a, was 0 in a?

---

34. Was ist eine Formel?

35. Wie sind folgende Formeln in Sätzen auszusprechen?

1. $a \cdot 1 = a$	2. $a : 1 = a$
3. $a + 0 = a$, $a - 0 = a$	4. $a \cdot 0 = 0$
5. $0 : a = 0$, $\frac{0}{a} = 0$	6. $a : 0 = \infty$

36. Was ist ein Aggregat von Größen?

37. Wie nennt man ein Aggregat auch sonst noch?

38. Was versteht man unter Gliedern eines Aggregats?

39. Was ist ein B i n o m? Was ein Monom?

40. Was versteht man unter additiven und subtraktiven Größen eines Aggregats?

41. Bilde 10 Monome verschiedener Art.

42. Desgleichen 10 Binome verschiedener Art.

43. Bilde ferner 10 Aggregate oder Polynome, jedes zu 3 bis 4 Gliedern.

44. Was gilt von dem Gang der Rechnung, wenn mehr als zwei Größen durch verschiedene Operationszeichen mit einander verbunden sind?

45. Was haben die Klammern für eine Bedeutung?

46. Berechne folgende Ausdrücke:

1. $24 - 8 + 2$	2. $24 - 8 - 2$
3. $24 + 8 \cdot 2$	4. $24 + 8 : 2$
5. $24 - 8 \cdot 2$	6. $24 - 8 : 2$
7. $24 \cdot 8 : 2$	8. $24 : 8 \cdot 2$
9. $5 \cdot 17 + 4$	10. $4 \cdot 9 - 4$
11. $30 : 6 - 3$	12. $35 : 5 + 5$

13. 30 — 13 + 7	14. 30 — (12 + 7)
15. 27 + 13 — 7	16. 27 + (13 — 7)
17. 18 — 6 . 2	18. (18 — 6) . 2
19. 18 — 6 : 2	20. (18 — 6) : 2
21. 96 : 12 . 4	22. 96 : (12 . 4)
23. 60 — 5 . 3 + 6 : 3	24. (60 — 5) . 3 + 6 : 3
25. 60 — 5 . (3 + 6) : 3	26. 60 — 5 . (3 + 6 : 3)
27. 60 — (5 . 3 + 6) : 3	28. (60 — 5 . 3 + 6) : 3
29. 60 — (5 . 3 + 6 : 3)	30. (60 — 5) . (3 + 6) : 3
31. (60 — 5 . (3 + 6)) : 3	32. (60 — (5 . 3 + 6)) : 3

47. Welche Werte haben folgende Ausdrücke:

1. a — b + c — d	2. a — (b + c) — d
3. a — b — c + d	4. a — b — (c + d)
5. (a + b) (c + d)	6. (a — b) (c — d)
7. a + bc — d	8. a — b + cd
9. a + b (c — d)	10. a — b (c — d)
11. (a — b) c + d	12. (a + b) : c — d
13. a + b : c + d	14. (a + b) : (c + d)
15. a — b : c — d	16. (a — b) : (c — d)

1. für a = 30, b = 12, c = 3, d = 2;
2. für a = 96, b = 36, c = 6, d = 3;
3. für a = 72, b = 12, c = 6, d = 2?

---

48. Beweise folgende Sätze:

1. So viel Pf. 1 Lot kostet, so viel Mk. 1 Kgr.*)
2. So viel Pf. 1 Lot kostet, halb so viel Mk. 1 Pfd.
3. So viel Pf. 1 Pfd., so viel Mk. 1 Ctr.
4. So viel Pf. 1 Lit., so viel Mk. 1 Hl.
5. So viel Mk. 1 *m*, so viel Pf. 1 *cm*.
6. So viel Mk. 1 Ctr., so viel Pf. 1 Pfd.
7. So viel Mk. 1 Kgr., so viel Pf. 1 Lot.
8. So viel Mk. 1 Pfd., doppelt so viel Pf. 1 Lot.
9. So viel Mk. 1 Hl., so viel Pf. 1 Lit.

49. Berechne hiernach schnell aus dem Kopfe:

1. 1 Lot kostet 2, 7, 10, 15 Pf.; was 1 Kgr.?
2. 1 Lot kostet 4, 6, 9, 14 Pf.; was 1 Pfd.?
3. 1 Pfd. kostet 65, 70, 80, 85 Pf.; was 1 Ctr.?
4. 1 Lit. kostet 10, 15, 20, 24 Pf.; was 1 Hl.?
5. 1 *m* kostet 3, 5, 7½ Mk., 9 Mk. 30 Pf.; was 1 *cm*?
6. 1 Ctr. kostet 13, 50, 300, 715½ Mk., 87 Mk. 30; was 1 Pfd.?
7. 1 Kgr. kostet 4, 11, 15 Mk., 7 Mk. 30; was 1 Lot?
8. 1 Pfd. kostet 1½, 2½, 5 Mk., 3 Mk. 20; was 1 Lot?
9. 1 Hl. kostet 7, 9, 20½ Mk., 30 Mk. 40; was 1 Lit?

---

*) Kostet 1 Lot a Pf., so kostet 1 Kgr. 100mal so viel u. s. w.

III.

Addition und Subtraktion absoluter eingliedriger Größen.

Über die Addition und Subtraktion eingliedriger Größen lassen sich zunächst folgende Formeln aufstellen:

1. $a + b = b + a$

   $a + b + c = a + c + b = b + c + a =$ u. s. w.

2. $a + b - b = a$

   $a - b + b = a$

3. $a + b - c = a - c + b$

4. $a - b - c = a - c - b$

5. $a - b + c - d = a - d + c - b = a + c - b - d$ u. s. w.

6. $a + (b + n) - n = a + b$

   $a + n - (b + n) = a - b$

Diese Formeln werden für den Zweck der Rechnung am besten in folgende Sätze gefaßt:

1. Man kann in beliebiger Reihenfolge addieren.

2. Addition und Subtraktion heben sich bei gleichen Größen gegenseitig auf (sind also entgegengesetzte Operationen).

3. Ob man erst addiert und dann subtrahiert, oder erst subtrahiert und dann addiert, ist gleichgültig.

4. Man kann in beliebiger Reihenfolge subtrahieren.

5. Man kann in jeder beliebigen Reihenfolge addieren und subtrahieren.

6. Ungleiche additive und subtraktive Größen heben sich gegenseitig so viel auf, als die kleinere beträgt.

Berechne nach diesen Sätzen folgende Aggregate, so weit dies möglich ist, und gieb bei jedem an, welcher der obigen Sätze angewendet ist.

1. $793 + 856 + 7$ 2. $453 + 796 + 547$
3. $3a + 7b + 5a$ 4. $x + 3y + 9x$
5. $17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23$
6. $51 + 53 + 55 + 57 + 59 + 61$
7. $96 + 98 + 100 + 102 + 104$
8. $10 + 17 + 24 + 31 + 38 + 45$
9. $3a + 9b + 4b + 15a + 7b + 2a$
10. $7m + 6n + 5p + 6n + 8p + 4m$
11. $7\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} + 1\frac{3}{4} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 7\frac{2}{3}$
12. $8\frac{5}{6} + 7\frac{3}{7} + 4\frac{5}{8} + 5\frac{2}{7} + 5\frac{3}{8} + 3\frac{1}{5}$
13. $5a + 3b - 3b$ 14. $4a - x + x$
15. $3a - 2y + 2y + 2a$ 16. $7a + 2b - 3x + 3x$

17. $986 + 857 - 857$
18. $783 - 499 + 499$
19. $7a + 5b - 4a$
20. $9a - 4b + a$
21. $20 - 7x + 9$
22. $8x - 5 + 3x$
23. $793 + 829 - 93$
24. $623 - 197 + 376$
25. $3861 + 954 - 1861$
26. $8543 - 768 + 225$
27. $3\frac{5}{7} + 4\frac{1}{2} - 2\frac{5}{7}$
28. $5\frac{3}{4} - 3\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4}$
29. $23 - 3x - 9$
30. $8a - 4b - a$
31. $7309 - 5418 - 1309$
32. $38765 - 17609 - 18765$
33. $7a + 5b - 3c - 4b$
34. $8x + 9 - 5x - 9$
35. $9a + 5b - 3b$
36. $15x - 7n + 11n$
37. $19a - 8x + 5x$
38. $21x + 14y - 19y$
39. $7b + 4c - 12b$
40. $d + 7c - 8d$
41. $91a - 71b + 18b$
42. $47x + y - 31y$
43. $34x - 21y + 57y$
44. $m + 5n - 99m$
45. $9a - 3b + 5a + 7b - 8a - b$
46. $10a - 8b - 3b - 6a + 12b$
47. $5a - 7x + 5x - 3a + 2x - a$
48. $x - 3y + 5x - 4y + 8y - 6x$
49. $4a - 5b + 3c - 2b - c + a + 9b - 3a$
50. $5a + 8b - 7c - 2a - 9b + 2c - 2a + 2b + 6c$
51. $11m + 3n - 7x + m - 5n - 2x - m + 5n + 9x$
52. $10m + 11 - 5x - 12 - 4m - 3x + 1 + 9x - 5m$
53. $9a - 7b + 3c - 8a + 7b - 5c - 3b - 9c$
54. $13x - 5y + 8z - 5x + 9y - 11z - 3x - 6y + z$
55. $27m - 31n + 9x - 31m - 3x + 21n + 5m + 9n - 7x$
56. $28a + 29p + 109 - 46p - 18a - 37 - 10p - 160$
57. $5\frac{1}{4}a - 3\frac{1}{2}b + 6b - 3\frac{1}{2}a + 7c - 8\frac{1}{2}c$
58. $7\frac{2}{3}a - 5b - 9\frac{1}{6}a + 7b + 3a - 5\frac{1}{2}b$
59. $\frac{4}{5}a - \frac{7}{2}b + \frac{3}{7}a - \frac{2}{3}b - a$
60. $\frac{7}{3}a - 2b - \frac{7}{2}a + 3\frac{1}{2}b + \frac{7}{6}a$
61. $\frac{5}{4}x + \frac{7}{8}y - \frac{3}{4}y - \frac{3}{8}x - \frac{5}{12}y - \frac{5}{12}x$
62. $3\frac{1}{2}a - 7b + 3\frac{1}{3}c - 7a + 3\frac{1}{3}b - 5c + 4a - 1\frac{1}{3}b$
63. $7a + 3\frac{1}{2}b + 5c + 3\frac{1}{3}a - 1\frac{1}{4}b - 7\frac{1}{4}c - 5\frac{1}{3}a - 4\frac{1}{4}b$
64. $7\frac{1}{6}a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{2}c + 3\frac{1}{3}a - \frac{5}{6}b + \frac{1}{3}c - \frac{17}{2}a + \frac{15}{2}b + 2\frac{1}{6}c.$
64_1. $7{,}3a - 3{,}05b + 1{,}49b + 6{,}8c - 9{,}42c + 18{,}9a + 1{,}56b$
64_2. $8{,}0007x - 3{,}89y - 9{,}843x + 3{,}007y + 2{,}1723x + 0{,}883y$
64_3. $5{,}37t - 9{,}387n - 0{,}9p + 1{,}687n - 3{,}89t - 2{,}4p + 0{,}72t$
64_4. $9\frac{1}{2}x - \frac{5}{8}y + 3\frac{3}{5}z - 2{,}9x + 0{,}295y + 5{,}4z$
64_5. $9{,}8x - 3\frac{1}{6}x - 0{,}727y + \frac{3}{5}y - 6\frac{1}{12}x + 0{,}127y.$

IV.
Addition und Subtraktion absoluter mehrgliedriger Größen. Klammern.

Über die Addition und Subtraktion mehrgliedriger Ausdrücke, wie über das Auflösen und Setzen von Klammern lassen sich folgende Formeln aufstellen:

1. $m + (a + b) = m + a + b$
2. $m - (a + b) = m - a - b$
3. $m + (a - b) = m + a - b$
4. $m - (a - b) = m - a + b$
5. $(a - b) - m = a - b - m.$

Diese Formeln lassen sich für den Zweck der Rechnung auf folgende Weise in Worten ausdrücken:

1. Anstatt eine Summe zu addieren, kann man auch die Summanden einzeln nach einander addieren.

$$m + (a + b) = m + a + b$$

2. Anstatt mehrere Größen nach einander zu addieren, kann man auch ihre Summen addieren.

$$m + a + b = m + (a + b).$$

3. Anstatt eine Summe zu subtrahieren, kann man auch die Summanden einzeln nach einander subtrahieren.

$$m - (a + b) = m - a - b.$$

4. Anstatt mehrere Größen nach einander zu subtrahieren, kann man auch ihre Summe subtrahieren.

$$m - a - b = m - (a + b).$$

---

5. Klammern, welche einen Summanden oder Minuenden einschließen, haben keinen Einfluß auf das Resultat der Rechnung.

$$m + (a + b) = m + a + b, \quad m + (a - b) = m + a - b$$
$$(a - b) - m = a - b - m.$$

6. Klammern, welche einen Subtrahenden einschließen, werden dadurch aufgelöst, daß man das Zeichen jedes Gliedes in der Klammer umkehrt, d. h. + in — und — in + verwandelt. Das erste Glied in der Klammer ohne Zeichen erhält bei der Auflösung der Klammer das Zeichen — (minus).

$$m - (a + b) = m - a - b, \quad m - (a - b) = m - a + b.$$

7. Um mehrere Glieder eines Ausdrucks in einen Summanden einzuschließen, hat man sie nur mit einer Klammer zu umgeben. Das erste Glied muß ein Summand sein; ist das nicht der Fall, so müssen die Glieder nach den früheren Regeln erst so umgestellt werden. Das Zeichen +, welches vor dem ersten Summanden stand, geht dann auf den ganzen Ausdruck in der Klammer.

$$m + a + b = m + (a + b), \quad m + a - b = m + (a - b),$$
$$m - a + b = m + (b - a).$$

8. Will man mehrere Glieder in einen Subtrahenden einschließen, so hat man vor jedem Gliede das Zeichen umzukehren und dann die betreffenden Glieder mit einer Klammer zu umgeben. Die Glieder müssen so geordnet sein, daß das erste Glied das Zeichen — hat. Dies Glied erhält in der Klammer kein Zeichen. Das Zeichen, welches vor demselben stand, geht dann auf den ganzen Ausdruck in der Klammer.

$$m - a - b = m - (a + b), \quad m - a + b = m - (a - b),$$
$$m + a - b = m - (b - a).$$

Berechne die folgenden Aggregate (1. — 16.), so weit dies möglich ist, nach den Sätzen 1. — 4., und gieb bei jeder Aufgabe den Satz an, nach welchem die Rechnung ausgeführt wird:

1. $893 + (7 + 589)$	2. $1985 + (15 + 786)$
3. $7a + (3a + 2b)$	4. $5x + (x + y)$
5. $876 + 987 + 13$	6. $493 + 725 + 75$
7. $5a + x + 7x$	8. $9m + 3n + n$
9. $1589 - (589 + 327)$	10. $1738 - (845 + 738)$
11. $7a - (2a + 3b)$	12. $9x - (3x + 5n)$
13. $1783 - 593 - 7$	14. $2765 - 685 - 15$
15. $115a - 91x - 13x$	16. $121a - 45b - 27b$.

Löse die Klammern in folgenden Aggregaten auf und führe die Rechnung nach den früheren Sätzen so weit aus, als es möglich ist. Kommen Klammern in Klammern vor, so kann man erst die äußern Klammern auflösen und dann die innern, oder umgekehrt. Bald ist dies, bald jenes vorteilhafter. Das Resultat muß schließlich dasselbe sein.

1. $7a - 9b + (a + b)$
2. $15a - 7b - (7a - 5b)$
3. $5a + (3a - 2b) + (a + 2b)$

4. $(a + b - c) + (a - b + c)$
5. $(a + b - c) - (a - b + c)$
6. $(7a - 3b) - (5a + 3b) - (a - 5b)$
7. $(8x - 5) + (3x - 7) - (9x - 11)$
8. $12 - (5x - 6) + (3x + 1) - (x + 10)$
9. $(6a - 3b + 7c) - (a - b + c) + (2a + b - 6c)$
10. $(3m - 7n - 5p) + (2m + 4n - 3p) - (4m - 3n - 6p)$
11. $(6x + 5y - 3z) - (5x - 3y + 2z) - (x + 7y - 4z)$
11_1. $56x + (934y - 307) - (1000y - 44x - 207) + 100$
11_2. $(738a - 967b) - (69a - 803b) + (76b - 643a)$
11_3. $6aa - (3ab + 2ac) - (2ac - 3ab) + (5ac - 7aa)$
11_4. $(5ax + 2pq) - (7 + 4ax) - (4pq - 7) + pq$
11_5. $9xxx - (17 + 3xx) + (17 - x) - (8xxx - 2xx - x)$
11_6. $2y - (\frac{1}{2}tx + \frac{1}{3}y) + (\frac{1}{3}tx - \frac{1}{2}y) - (\frac{1}{6}y - \frac{1}{6}tx)$
11_7. $(4\frac{1}{2}ax - 7b) - (2\frac{1}{4}ax - 8\frac{1}{2}b) - (1\frac{1}{4}ax + 5\frac{1}{2}b)$
11_8. $8{,}3a - (3{,}7a - 2{,}37b) + (0{,}7a - 1{,}7b) - (3{,}2a + 4{,}7b)$
11_9. $(2{,}7x + 0{,}07n) - (9{,}15p - 0{,}62n) - (0{,}69n - 1{,}45p + 1{,}7x)$
12. $m + [(a - b) + (b + d)]$
13. $m + [(b + c) - (m + d)]$
14. $m - [(a - b) - (c - m)]$
15. $m - [(x - y) - (a - m)]$
16. $(7a - 2b) - [(3a - c) - (2b - 3c)]$
17. $(9a - 4c) - [((3b - 4c) + 5a) - 3b]$
18. $(8a + 3b) - [3b - (4c + (x - 7a))]$
19. $(3x + 5y) - [(7x - 3y) - (5x - 7y)] + (x - y)$
20. $((3a - 4b) - 2x) - ((3x + 3b) - (4x - 2a + b))$
21. $(8m - l) + 5p - ((3q + 4p - l) + 7m - (2q - p))$
22. $((8x - 3y) - 5y + 6) - ((5x - 7y) - (3x - 6)) - (6x - y)$
22_1. $8\frac{1}{2}n - (3\frac{1}{3}p - (p - 5{,}5n)) - (5\frac{1}{6}p + (2n - 0{,}5p))$
22_2. $(2\frac{1}{4}x - (3\frac{1}{4}y + t)) - ((0{,}75x - 0{,}5y) + (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - t))$
22_3. $(7{,}01p - (2{,}5r - 1{,}74)) - ((4\frac{1}{2}r - 0{,}79p) - 3{,}26) + 1\frac{1}{5}p$
22_4. $8{,}08x - (0{,}55y - (p - 7\frac{3}{4}x) + 7\frac{1}{5}y) - (0{,}33x - \frac{3}{4}y)$
22_5. $(6{,}45ab - (0{,}8x - 3{,}7)) - ((3\frac{1}{4}ab - 7{,}3x) + 4{,}2) - 6\frac{1}{2}x$

Schließe in folgenden Aggregaten alle Größen außer der ersten für die Aufgaben 1. — 8. in einen Summanden, für die Aufgaben 9. — 16. in einen Subtrahenden ein:

1. $m + x + y$ 2. $m + a - b$
3. $m - p + q$ 4. $m - x + 1$
5. $m + 7a - 5b + 3c$ 6. $m - 3a - 2b + x$

7. $m - x + 3y - z$ 8. $m - n - v + 9$
9. $m - a - b$ 10. $m - c + d$
11. $m + x - y$ 12. $m + u - 1$
13. $m - a + b - c$ 14. $m + x - y + 5$
15. $m + x + y - 2z$ 16. $m + 2n + 3p - 8$

V.

Relative Größen.

Eine absolute Größe ist eine Größe, die man sich als eine Summe von Einheiten denkt, gleichviel, auf welche Art sie entstanden ist. — Eine positive Größe ist (für die Rechnung nichts als) eine aus dem Zusammenhange herausgenommene und für sich allein betrachtete Größe mit dem Zeichen + (plus), also ein Summand mit seinem Zeichen. — Eine negative Größe ist (für die Rechnung nichts als) eine aus dem Zusammenhange herausgenommene und für sich allein betrachtete Größe mit dem Zeichen — (minus), also ein Subtrahend mit seinem Zeichen. — In dem Aggregat $a + b - c$ heißt $+ b$ eine positive, $- c$ eine negative Größe. In dieser Auffassung denkt man sich den Ausdruck $a + b - c$ aus den Teilen a, $+ b$ und $- c$ bestehend, oder als die Summe der Größen a, $+ b$ und $- c$, d. h. $a + b - c = a + (+ b) + (- c)$.

1. Welche Bedeutung haben die positiven und negativen Größen in Bezug auf die Null?

2. Welche Beispiele weißt du für positive und negative Größen anzugeben?

3. Wie denkt man sich eine positive und wie eine negative Größe entstehen?

4. Wie kommt man in der Rechnung auf eine negative Größe?

5. Wie heißen positive und negative Größen mit einem gemeinsamen Namen?

6. Welche Größen nennt man gleichartig? welche entgegengesetzt?

7. Was sind Vorzeichen? Welcher Unterschied ist zwischen den Vorzeichen und den Operationszeichen + und —?

8. Wie unterscheidet sich eine absolute Größe von einer positiven?

9. Wie muß eine absolute Größe aufgefaßt werden, wenn sie in Gegensatz zu einer negativen tritt?

10. Wie läßt sich nach Einführung der negativen Größen jede Differenz darstellen?

11. Welchen Nutzen kannst du dir von der Einführung der negativen Größen vorstellen?

12. Wie werden jetzt nach Einführung der positiven und negativen Größen die Sätze 7. und 8. in IV. heißen? Welche Bestimmungen fallen jetzt fort?

13. Löse jetzt noch einmal die Aufgaben 1. — 16. S. 9 auf, aber ohne eine Umstellung der Größen vorzunehmen.

Über die Addition und Subtraktion relativer Größen gelten folgende Sätze:

1. Gleichartige Größen werden addiert, indem man die Größen ohne Vorzeichen addiert und der Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen giebt.*)

$$(+a) + (+b) = +(a+b)$$
$$(-a) + (-b) = -(a+b)$$

2. Entgegengesetzte Größen werden addiert, indem man ohne Vorzeichen die kleinere von der größeren abzieht und der Differenz das Zeichen der größeren giebt.

$$(+a) + (-b) = +(a-b)$$
$$(-a) + (+b) = -(a-b)$$

3. Eine positive oder negative Größe wird subtrahiert, indem man ihr das entgegengesetzte Zeichen giebt und sie addiert.

$$m - (+a) = m + (-a)$$
$$m - (-a) = m + (+a)$$

A. Addition relativer Größen.

1.	$+12$	-9	-7	-8	$+5$	$+15$
	$+7$	-4	$+8$	$+3$	-13	-7
2.	$+3a$	$-5b$	$+9c$	$-9d$	$-2x$	$+3y$
	$+7a$	$-6b$	$-c$	$+d$	$+8x$	$-10y$
3.	$+\frac{1}{2}a$	$-3\frac{1}{4}b$	$-\frac{5}{6}c$	$-3\frac{3}{4}d$	$-\frac{17}{2}x$	$+\frac{15}{4}y$
	$+\frac{1}{3}a$	$+2\frac{1}{2}b$	$+\frac{1}{3}c$	$-4\frac{1}{4}d$	$+\frac{13}{3}x$	$-\frac{7}{6}y$
4.	$+a$	$-a$	$-a$	$+2a$	$-3a$	$-5a$
	$+b$	$-b$	$+b$	$-3b$	$+5b$	$-7b$
5.	n	n	$n-1$	$+3$		
	$+1$	-1	$+1$	$n-2$		

*) Nach der Definition der positiven und negativen Größen folgen dieser und die beiden folgenden Sätze unmittelbar aus den früheren Sätzen. Man hat z. B. $(m+a) + (n+b) = m + n + (a+b)$. Dies unabhängig von m und n ausgedrückt giebt $(+a) + (+b) = +(a+b)$ u. s. w.

6.	$a - 4$	$a - 6$	$5 + a$	$1 - a$
	$+5$	6	-6	-1
7.	$x + 1$	$x + 1$	4	7
	2	-2	$+x$	$x - 3$
8.	-5	-7	$7 - a$	$a + 1$
	$4 - a$	$a - 5$	-7	-2
9.	-3	-5	$5 + n$	$n - 1$
	$n - 1$	$5 - n$	-5	$+2$
10.	$1 - m$	$3 - m$	$7 + 2m$	$3m - 5$
	$+2$	-2	$-2m$	$-m$
11.	$a - b$	$a - b$	m	n
	b	$-b$	$m - n$	$m - n$
12.	x	$-x$	$-x$	$x - y$
	$y - x$	$x + y$	$x - y$	$+y$
13.	$m - n$	$m - n$	$a + 2b$	$3a - b$
	$2m$	$+3n$	$-3b$	$-2a$
14.	$a - 3b$	$-2a$	$-5b$	$3a - 5b$
	$+4b$	$a - 2b$	$a + 4b$	$+3b$
15.	$5a$	$4a - 1$	$3a + 1$	$8a$
	$1 - 4a$	$+7a$	$-4a$	$1 - 8a$
16.	$n - 1$	$n - 7$	$n - 1$	$n - 8$
	$n + 1$	$n + 5$	$3 - 2n$	$7 - n$
17.	$5x - 3$	$a - 1$	$a + x$	$a - x$
	$1 + x$	$1 - a$	$x - a$	$x + a$
18.	$7 - x$	$a - 5$	$7a - x$	$2a - 3b$
	$2x - 10$	$2 - 3a$	$2x - 5a$	$3b + a$
19.	$n - 3$	$n + 1$	$a - 1$	$3a - n$
	$m + 5$	$a - 3$	$3 - x$	$n - b$
20.	$a + x$	$a - b$	$m - n$	$m - 1$
	$x - 1$	$1 + a$	$3n - m$	$n + 1$

21. $\begin{array}{r} m-2 \\ n-1 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} m-3 \\ 3-n \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} m-2n \\ n-2m \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 3x-2y \\ 3y-2x \end{array}$

22. $\begin{array}{r} +7a \\ -3a \\ +4a \\ -5a \end{array}$ 23. $\begin{array}{r} -18b \\ +5b \\ +10b \\ -9b \end{array}$ 24. $\begin{array}{r} +13x \\ -17x \\ -8x \\ +2x \end{array}$ 25. $\begin{array}{r} -9x \\ +x \\ +9x \\ -7x \end{array}$

26. $\begin{array}{r} +12y \\ -9y \\ +8y \\ -13y \end{array}$ 27. $\begin{array}{r} +7p \\ -9q \\ -2p \\ +3q \end{array}$ 28. $\begin{array}{r} +a \\ -b \\ +c \\ +b \end{array}$ 29. $\begin{array}{r} +x \\ +y \\ -z \\ -2x \end{array}$

30. $\begin{array}{l} 7a-3b+2c-3d \\ 5a-4b-5c+7d \end{array}$ 31. $\begin{array}{r} 9x+3y-4z+8 \\ -7x-3y-2z-17 \end{array}$

32. $\begin{array}{r} 8m-n+7u+3v \\ -9m+4n-7u-5v \end{array}$ 33. $\begin{array}{r} a+b-c+d \\ a-b-c+3d \end{array}$

34. $\begin{array}{l} 3a-4b+5c+3d+7e-8f+g-h-3k-l \\ 2a+b-3c-7d-7e-9f-2g+h+k \end{array}$

35. $\begin{array}{l} -a+5b+8c-9d-10e+12f-7g \\ +8a-10b+5c-10d+12e-13f+7g-h+2k \end{array}$

35_1. $\begin{array}{l} 75a-55b+199c-28d-23e-45f-25g-78h \\ 21a+43b-271c+87d+14e-9f-25g+78h \end{array}$

36. $\begin{array}{r} 1\frac{3}{4}x-3\frac{1}{5}y+2\frac{1}{2}z-7\frac{2}{3}u+1\frac{1}{2}v-5\frac{1}{3}p \\ -2\frac{1}{4}x+1\frac{1}{3}y-1\frac{5}{6}z-2\frac{1}{3}u-1\frac{1}{2}v+4\frac{1}{2}p \end{array}$

37. $\begin{array}{l} \frac{3}{2}a-\frac{3}{4}b+\frac{2}{3}c-\frac{5}{6}d+\frac{4}{3}e-\frac{5}{12}f+\frac{1}{2}g \\ \frac{2}{3}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{6}c-\frac{1}{2}d-\frac{4}{3}e+\frac{1}{3}f \end{array}$

37_1. $\begin{array}{l} 0{,}8a-3{,}47b-1{,}73c+0{,}05d-38{,}7e-41\frac{1}{2}x+53\frac{1}{4}y \\ 1{,}9a-3{,}85b+5{,}7c-8{,}1d+9{,}87e+37{,}8x-61{,}05y \end{array}$

37_2. $\begin{array}{l} 5{,}3a+0{,}5b-9\frac{1}{2}c+3\frac{3}{5}d+7{,}75e-17\frac{3}{4}p+2{,}1q \\ 1{,}86a-9\frac{1}{6}b+7{,}8c+14{,}4d-8\frac{1}{12}e-2{,}25p-1{,}72q \end{array}$

38. $\begin{array}{r} 5a-3b+3c-d \\ -3a+b+7d \\ +2a-5b-8c+d \\ -3a+4b+7c-9d \end{array}$ 39. $\begin{array}{r} 7x-y+u-v \\ -5x+4y-8u+4v \\ -2x+5y+3u-7v \\ +x-8y+4u-4v \end{array}$

$39_1.$	$1{,}34\,m - 7{,}6\,n + 9{,}37\,p$	$39_2.$	$41{,}6\,q - 43{,}1\,x + 37{,}8\,y$
	$-9{,}4\,m - 8{,}7\,n - 81{,}7\,p$		$-4{,}05\,q - 5{,}37\,x + 0{,}09\,y$
	$9{,}76\,m + 9{,}3\,n + 4{,}33\,p$		$-0{,}85\,q + 1{,}97\,x - 4{,}19\,y$

B. Subtraktion relativer Größen.

1.	$+12$	-12	$+12$	-12	$+8$	-9
	$+7$	-7	-7	$+7$	-5	-4
2.	$+6$	-6	$+6$	-6	$+21$	-12
	$+11$	-11	-11	$+11$	-13	-21
3.	$+8a$	$+9x$	$-11b$	$-8m$	$-7x$	$+y$
	$+5a$	$-3x$	$-8b$	$+m$	$+3x$	$+9y$
4.	$+7a$	$-5a$	$-4a$	$+3a$	$-3x$	$-7y$
	$+11a$	$+12a$	$-9a$	$-11a$	$+9x$	$+y$
5.	$+a$	$-a$	$+a$	$-a$	$-2a$	$+1$
	$+b$	$-b$	$-b$	$+b$	$+3$	$-4x$
6.	$+2y$	$+5y$	$-7y$	$-3y$	$+7$	$+1$
	$+3x$	$-4x$	$+3x$	$-4x$	$-5a$	x

7.	$n-1$	$n+1$	5	$x+3$
	1	1	$x+2$	7
8.	$x-7$	$x-2$	3	-5
	$+5$	-2	$x-2$	$3-x$
9.	$1-a$	-1	-1	-1
	-1	$a-1$	$1-a$	$1+a$
10.	$x+1$	$x-1$	2	2
	2	2	$x-1$	$x+1$
11.	$n-1$	$n-3$	$3-n$	$4+n$
	-2	-2	-3	-1
12.	-4	-5	-7	$+7$
	$4-m$	$m-6$	$7-m$	$7-m$
13.	-8	-9	$3+x$	$1+x$
	$x+5$	$8-x$	$+4$	-2

14.	$m - n$	$m - n$	n	m
	n	m	$m - n$	$m - n$
15.	$-x$	$-y$	$x - y$	$x + y$
	$x - y$	$x - y$	$-x$	$-y$
16.	$a - b$	$a + b$	$2a$	$3b$
	$2b$	$2b$	$a + b$	$a + b$
17.	$a - b$	$2a$	$2b$	$a - b$
	$2a$	$a - b$	$a - b$	$+b$
18.	$x - 5y$	$x - 4y$	$2x - y$	$x + 2y$
	$+3y$	$-3x$	$-2y$	$+3x$
19.	$+5x$	$7y$	$4x$	$8x$
	$x - y$	$3x + 5y$	$2y - x$	$y + 9x$
20.	$-3x$	$-2y$	$-4y$	$-5y$
	$x - 2y$	$x - 3y$	$y - x$	$2y - 3x$
21.	$7n$	$-3n$	$8n - 1$	$1 - 8n$
	$1 - 5n$	$4n - 1$	$-2n$	-5
22.	$n - 1$	$a - x$	$x + y$	$x + 5$
	$n + 1$	$x - a$	$x - y$	$x - 7$
23.	$a + 3$	$a - 1$	$a + 1$	$n + 1$
	$2 - a$	$3 - 2a$	$5 - a$	$7 - 5n$
24.	$n + 1$	$n - 1$	$n - 1$	$1 - n$
	$1 - n$	$1 - n$	$1 + n$	$n + 1$
25.	$5 - x$	$8 + x$	$x + 5$	$7 + 2x$
	$3 - 2x$	$13 - x$	$5 - 2x$	$3x + 7$
26.	$m - 1$	$m - 1$	$m + 1$	$m + 1$
	$n - 1$	$n + 1$	$n - 1$	$1 - n$
27.	$n + x$	$n - x$	$a - x$	$x + y$
	$x - 1$	$1 - x$	$a - 1$	$y - a$
28.	$n + 2$	$x - 5$	$2x - 3y$	$3a - b$
	$m - 3$	$5 - y$	$2y - 3x$	$b + 3a$
29.	$7a - 5b$	$7a + 3b$	$5a - b$	$3a - 5b$
	$2b - a$	$7b + 3a$	$8a + b$	$b + 2a$

30. $9a - 8b + 7c - 3d$
$\underline{5a - 6b - 3c + 2d}$

31. $a - 2b + 3c - 4d$
$\underline{7a + 3b - 5c + 8d}$

32. $4x - 3y + 9u - 8v$
$\underline{5x + 4y - 3u - 8v}$

33. $m - 3n + p - 7$
$\underline{m - 4n - p + 8}$

34. $a - b + c - d + 5e - 7f + 3h - 7k + l + 5$
$\underline{-5a + 3b - c - d + 4e + 8f - 7h + 9k - 3l - 7}$

35. $a + b - c - d + e + f - g - h + k - m - 8$
$\underline{a - b + c - d - 2e + 3f - g + h + l - n - 9}$

36. $15a - 7b + 3c - 7d - 8e + m - 7x - 2y - z + 4$
$\underline{10a + 7b - 3c + 4d + 4e - p - x + y + 5z - 2}$

36_1. $73a - 52b - 71c + 21d - 52x + 17y + 59z + 11t$
$\underline{54a - 60b + 81c + 37d + 18x - 33y + 99z + 7}$

36_2. $8{,}37a - 9{,}49b + 8{,}5c + 57{,}6d - 5{,}37e - 9{,}07x + 0{,}09y$
$\underline{3{,}97a - 9{,}8b + 83c - 3{,}46d + 2{,}63e - 0{,}57x - 8{,}91y}$

37. $1\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{3}b + 3\frac{1}{2}c - 5\frac{2}{3}d - 4\frac{1}{6}e + \frac{1}{2}f + \frac{1}{3}h$
$\underline{-3\frac{1}{2}a + 1\frac{1}{2}b + 4\frac{1}{4}c - 3\frac{2}{3}d - 3\frac{1}{2}e - \frac{1}{3}f + \frac{1}{2}h}$

38. $\frac{5}{3}a + \frac{7}{2}b - \frac{9}{4}c - \frac{11}{6}d + \frac{13}{3}e - \frac{5}{8}f + \frac{1}{4}$
$\underline{+\frac{7}{2}a - \frac{9}{4}b - \frac{11}{6}c + \frac{13}{3}d - \frac{5}{3}e - \frac{7}{12}f - \frac{5}{12}}$

38_1. $5{,}65a + 7\frac{3}{5}b - 27\frac{3}{4}c - 5{,}73d + 0{,}76x - 1\frac{1}{6}y - 27{,}5z$
$\underline{4\frac{1}{4}a + 9{,}38b + 2{,}65c - 13\frac{1}{2}d - 53{,}7x - 0{,}375y - 19\frac{2}{3}z}$

38_2. $7\frac{3}{4}a - 4{,}45b + 19\frac{7}{8}c + 0{,}85d - 1{,}75x - 8\frac{3}{8}y - 9{,}5$
$\underline{0{,}25a - 4\frac{1}{4}b - 0{,}625c + 47{,}5d - 2\frac{5}{12}x + 1{,}125y - 9\frac{1}{6}}$

VI.

Multiplikation.

Die Reihenfolge der Faktoren ist gleichgültig.

$$ab = ba, \quad abc = acb = bca \text{ etc.}$$

Soll man ein Produkt multiplizieren, so darf man nur einen Faktor multiplizieren.

$$(ab)\,c = (ac)\,b, \quad ab \cdot 3 = 3ab, \quad 7a \cdot 5 = 35a.$$

Eine mehrgliedrige Größe wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jedes Glied mit derselben multipliziert.

$$(a + b)\, m = am + bm, \quad (a - b)\, m = am - bm.$$

Mehrgliedrige Größen werden mit einander multipliziert, indem man jedes Glied des einen Faktors mit jedem Gliede des andern Faktors multipliziert. Dabei geben gleichartige Größen ein positives, ungleichartige ein negatives Produkt. Absolute Größen werden als positiv angesehen.

$$(a + b)(x + y) = ax + bx + ay + by$$
$$(a + b)(x - y) = ax + bx - ay - by$$
$$(a - b)(x - y) = ax - bx - ay + by.$$

Betrachtet man die Größen außer Zusammenhang, so muß für das Zeichen der Produkte dasselbe Gesetz gelten: Das Produkt gleichartiger Größen ist positiv, das Produkt entgegengesetzter Größen ist negativ zu nehmen.*)

$$(+ a) . (+ b) = + ab$$
$$(+ a) . (- b) = - ab$$
$$(- a) . (+ b) = - ab$$
$$(- a) . (- b) = + ab.$$

Klammern, welche einen Faktor einschließen, werden dadurch aufgelöst, daß man die Multiplikation ausführt.

Produkte, welche aus lauter gleichen Faktoren bestehen, nennt man Potenzen dieses Faktors. So sind aa, aaa, aaaa u. s. w. Potenzen von a. aa ist die 2. Potenz von a, wird kurz geschrieben a^2 und dann gelesen a in der zweiten (Potenz), oder a (im) Quadrat, oder a hoch 2. aaa ist die 3. Potenz von a, wird geschrieben a^3 und dann gelesen a in der dritten (Potenz), oder a (im) Kubus, oder a hoch 3. aaaa ist die 4. Potenz von a, wird geschrieben a^4 und dann gelesen a in der vierten (Potenz), oder a hoch 4 u. s. w.

1. $7a . 3$,	$9x . 5$,	$3(a + b) . 2$
2. $2a . 5b$,	$6x . 7y$,	$9m . 7p$
3. $4 . 9 . 25$,	$8 . 27 . 5$,	$4 . 37 . 15$

*) Multiplizieren im weiteren Sinne heißt den Wert des Produkts bestimmen. Der Wert des Produkts a . b wird durch a + a + a + . . . (b S.) nur für b > 1 (= 2, 3, 4 . . .) richtig angegeben. Für b = 1, 0, — 1, — 2, — 3 . . . ist eine neue, erweiterte Definition von a . b nötig. Da nun a . 3 = a + a + a, a . 2 = a + a ist, so muß durch Fortsetzung der beiden Seiten dieser Gleichungen a . 1 = a, a . 0 = 0, a . (— 1) = — a = — a . 1, a . (— 2) = — a . 2 u. s. w. sein (vergl. S. 51 XII). Daher: 1) Wenn der eine Faktor eines Produkts = 1 ist, so ist das Produkt gleich dem andern Faktor. 2) Wenn ein Faktor eines Produkts = 0 ist, so ist das Produkt auch = 0. 3) Mit einer negativen Zahl multiplizieren heißt mit der entsprechenden positiven multiplizieren und das Produkt im entgegengesetzten Sinne nehmen.

4. $8 \cdot 7 \cdot 125$, $\quad 2 \cdot 17 \cdot 45$, $\quad 16 \cdot 47 \cdot 125$

5. $\frac{2}{3}x \cdot \frac{5}{6}y$, $\quad \frac{6}{7}m \cdot \frac{8}{9}n$, $\quad \frac{3}{4}u \cdot \frac{8}{9}v$

6. $3\frac{1}{3}u \cdot 7\frac{1}{2}v$ $\quad 5\frac{1}{3}c \cdot 7\frac{7}{8}d$, $\quad 2\frac{1}{2}n \cdot 3\frac{3}{5}p$

7. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$, $\quad \frac{7a}{3} \cdot \frac{3x}{5}$, $\quad \frac{7x}{6y} \cdot \frac{8x}{7z}$

8. $\frac{a}{b} \cdot c$, $\quad \frac{7a}{6x} \cdot 3m$, $\quad 4a \cdot \frac{1}{6x}$

9. $\frac{1}{a} \cdot a$, $\quad \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{a}$, $\quad \frac{a}{x} \cdot x$

10. $20adx \cdot 3\frac{1}{2}$, $\quad 8a \cdot 5\frac{1}{2}bc$, $\quad 2\frac{1}{2}a \cdot 3\frac{3}{5}xy$

11. $7\frac{1}{2}acd \cdot 5\frac{1}{3}amx$ $\qquad$ 12. $8\frac{1}{4}abx \cdot \frac{10}{3}ac$

13. $\frac{9mp}{4} \cdot \frac{10mq}{3}$ $\qquad$ 14. $\frac{3ab}{5cd} \cdot \frac{10ac}{9bx}$

15. $\frac{12acd}{35mxy} \cdot 3\frac{1}{3}amx$ $\qquad$ 16. $\frac{1}{7acd} \cdot 21abx$

17. $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}$ $\qquad$ 18. $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d}$

19. $\frac{2a}{3x} \cdot \frac{4b}{5y} \cdot \frac{15x}{16b}$ $\qquad$ 20. $\frac{8ad}{3bc} \cdot \frac{6bx}{5dy} \cdot 7\frac{1}{7}my$

21. $(a+1)x \cdot \frac{b+1}{a+1} \cdot \frac{c}{x}$ $\qquad$ 22. $\frac{m-3}{3} \cdot \frac{n-6}{m-3} \cdot \frac{6x}{n-6}$

23. $\frac{1-a}{i-n} \cdot \frac{1+a}{1-a} \cdot 7(1-n)$ $\qquad$ 24. $\frac{5(x-a)}{6ax} \cdot \frac{4(x+a)}{x-a} \cdot 3bx$

25. $\frac{a+5}{5b} \cdot \frac{10c}{a-5} \cdot \frac{b}{2c}$ $\qquad$ 26. $\frac{2x-y}{10x} \cdot \frac{6y}{x-2y} \cdot \frac{5x}{3y}$

27. $\frac{3a(x+5)}{5b(x-3)} \cdot \frac{10bm(x-3)}{9ax(x-5)}$ $\qquad$ 28. $\frac{9a(a-b)}{4b(7-a)} \cdot \frac{6b(7+a)}{5a(a-b)}$

29. $(+3ab) \cdot (-2cd)$ $\qquad$ 30. $(-3x) \cdot (-5y)$

31. $(-2m) \cdot (+7n)$ $\qquad$ 32. $5ax \cdot (-8ay)$

33. $(-a) \cdot (-a) \cdot (-a)$ $\qquad$ 34. $(-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a)$

35. $\frac{3a}{b} \cdot (-bc) \cdot \frac{x}{c}$ $\qquad$ 36. $\frac{5m}{7n} \cdot \left(-\frac{3np}{10xy}\right) \cdot \left(-\frac{14x}{9}\right)$

37. $4 \cdot (a+b+c)$ $\qquad$ 38. $2 \cdot (x-y+z)$

39. $5 \cdot (2a-3b+c)$ $\qquad$ 40. $a \cdot (2m+3n-p)$

41. $(4a+5b-7c) \cdot 2x$ $\qquad$ 42. $(8m-5n-9p) \cdot 5y$

43. $(5a-7b-3c) \cdot (-2abc)$ $\qquad$ 44. $(-5ab+7ac-bc) \cdot (-2abc)$

44_1. $4(4a-7b) - 7(2a-5b) - 2(a+b)$

44_2. $a(a+b-c) - b(a-b+c) + c(a+b)$

44_3. $7x(3x+4y-6)-4y(7x-3y+14)+14(3x+4y)$

44_4. $3ab(a-c)-bc(2b-3a)-bb(3a-2c)+6abb$

44_5. $3(a+b-2y)x-2(a-3b-3x)y-3b(x+2y)+2ay$

45. $(8a-6b+9)\cdot\frac{5}{3}ab$

46. $(x-3y-6)\cdot(-1\frac{1}{3}xy)$

47. $(\frac{2}{3}a-\frac{5}{2}b-7)\cdot(-\frac{6}{5}ab)$

48. $(3\frac{1}{2}a-4\frac{1}{3}b+1\frac{1}{4}x)\cdot 2\frac{2}{5}x$

49. $(ax^2-bx+c)\cdot 2x$

50. $(3x^3-4x^2-7x+6)\cdot\frac{1}{6}x$

51. $(ax^2-bx-c)\cdot\frac{m}{x}$

52. $(4x^3-2x^2+5x-3)\cdot\frac{1}{x^2}$

53. $\left(\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}+c\right)\cdot x^2$

54. $\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+5\right).x^3$

55. $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}-\frac{c}{z}\right)\cdot\frac{y}{a}$

56. $\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+1\right)\cdot\frac{b}{c}$

57. $\left(\frac{2a}{3x}-\frac{5x}{2a}+\frac{15aa}{2xx}\right)\cdot\left(-\frac{2x}{5a}\right)$

57_1. $\frac{1}{2}(a+b-c)-\frac{1}{3}(a-b+c)+\frac{1}{6}(-a+b+c)$

57_2. $1\frac{3}{4}(x+4y)+3\frac{1}{2}(-2x+3y)+5\frac{1}{6}(3x-4y)$

57_3. $6(4\frac{1}{2}a-7\frac{1}{4}b+4\frac{1}{3}c)-8(3\frac{1}{5}a-5\frac{1}{3}b+3\frac{1}{4}c)$

57_4. $7\frac{1}{2}x\left(\frac{5}{3x}-\frac{3}{10}-\frac{x}{15}\right)-\frac{2}{3x}(2x-3\frac{1}{4}xx-\frac{3}{4}xxx)$

57_5. $3\frac{1}{3}\left(\frac{a}{4b}-\frac{c}{5d}+\frac{1}{2}xy\right)-2\frac{1}{2}\left(\frac{a}{3b}-\frac{2c}{5d}+\frac{1}{3}xy\right)$

57_6. $\frac{a}{2b}\left(\frac{3b}{4c}-\frac{4x}{5a}+\frac{3bx}{5ay}\right)-\frac{3x}{5c}\left(\frac{5a}{2x}-\frac{7c}{3b}+\frac{c}{2y}\right)$

57_7. $\frac{5aa}{3bb}\left(\frac{2bb}{5aa}-\frac{3b}{4a}-\frac{7}{15}\right)-\frac{7a}{6b}\left(\frac{4b}{7a}-\frac{3a}{5b}-5\frac{1}{7}\right)$

58. $(a+b)(c-d)$

59. $(m-n)(x+y)$

60. $(2a-3b)(5x-7y)$

61. $(3a+5x)(7b-4x)$

62. $(a-5m)(a+3n)$

63. $(5x+1)(7y-2)$

64. $(a+b-c)(x-y)$

65. $(2a-3b-5x)(5m-n)$

66. $(a+b)(a+b)$

67. $(x+y)(x+y)$

68. $(x+3)^2$

69. $(7x+5)^2$

70. $(a-b)(a-b)$

71. $(u-v)(u-v)$

72. $(x-7)^2$

73. $(3a-4)^2$

74. $(3a+2b)^2$

75. $(6x-5y)^2$

76. $(x+1)^2$

77. $(1-x)^2$

78. $(a+b)(a-b)$

79. $(m-n)(m+n)$

80. $(x-9)(x+9)$

81. $(a+1)(a-1)$

82. $(3a-5)(3a+5)$

83. $(7x+3y)(7x-3y)$

84. $(7x-3)(5x-4)$

85. $(3x-2)(2x+3)$

86. $(7a-5b)(6a+5b)$

87. $(8x-7y)(7x+6y)$

88. $(3{,}2a-5b)(5a-2{,}8b)$
89. $(2{,}6x+0{,}3y)(5x+0{,}7y)$
89_1. $(3{,}5x+0{,}2)(8{,}4x-0{,}3)$
89_2. $(7{,}25+4x)(2{,}8-3{,}6x)$
89_3. $(3y+2\frac{1}{3})(4{,}8y-1{,}5)$
89_4. $(7\frac{1}{2}a-0{,}3)(2{,}8a+5\frac{1}{3})$
90. $(a+b+c)(a+b-c)$
91. $(a+b-c)(a-b+c)$
92. $(a+b+c)^2$
92_1. $(3a+b-x)^2$
93. $(2a-3b+x)^2$
93_1. $(3x-5y-2)^2$
94. $(aa-2ab+bb)(a+b)$
95. $(aa+2ab+bb)(a-b)$
96. $(xx+xy+yy)(x-y)$
97. $(xx-xy+yy)(x+y)$
98. $(xx+xy+yy)(xx-xy+yy)$
99. $(aaa-aab+abb-bbb)(a+b)$
100. $(8aaa+4aab+2abb+bbb)(2a-b)$
100_1. $((a+b)+(x+y))((a+b)-(x+y))$
101. $(a+b+c+d)(a-b+c-d)$
102. $(a-b+c-d)(a+b-c-d)$
102_1. $(3a+2b+5x-y)(3a+2b-5x+y)$
102_2. $(6ac-3ad+2bc-bd)(6ac+3ad-2bc-bd)$
102_3. $(4ab-6ax+2by-3xy)(4ab+6ax-2by-3xy)$
103. $(a+b)(a+b)(a+b)$
104. $(a-b)(a-b)(a-b)$
105. $(x+1)^3$
106. $(1-y)^3$
107. $(2a-b)^3$
108. $(3x-4y)^3$
109. $(x-1)(x-2)(x-3)$
110. $(x-a)(x-b)(x-c)$
110_1. $(2x-3)(3x+7)(6x-5)$
110_2. $(3x+5)(7x+5)(2x-1)$
111. $(a+b)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$
112. $(x-y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$
113. $(aa+bb)\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$
114. $(xx-yy)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$
115. $(\frac{3}{2}a+\frac{2}{3}b)(\frac{2}{3}a-\frac{3}{2}b)$
116. $(\frac{5}{2}x-\frac{3}{4})(\frac{4}{5}x+\frac{2}{3})$
117. $\left(\frac{2x}{5}-\frac{3y}{4}\right)\left(\frac{4x}{3}+\frac{5y}{2}\right)$
118. $\left(\frac{7x}{2}-\frac{4y}{3}\right)\left(2x+\frac{9y}{2}\right)$
119. $(2\frac{1}{2}x-3\frac{1}{3})(1\frac{1}{5}x+\frac{3}{10})$
120. $(1\frac{1}{4}x-6\frac{2}{3})(1\frac{3}{5}x+2\frac{1}{10})$
121. $\left(\frac{2a}{3b}-\frac{5b}{4a}\right)\left(\frac{3a}{2b}+\frac{4b}{5a}\right)$
122. $\left(\frac{3a}{4b}+\frac{4b}{3a}\right)\left(\frac{aa}{bb}-\frac{16}{9}\right)$
122_1. $\left(\frac{9aa}{8bb}+\frac{3a}{2b}+2\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{b}{a}\right)$
123. $\left(\frac{3aa}{2}-\frac{2ab}{3}+\frac{3bb}{4}\right)\left(\frac{4a}{3}+\frac{3b}{4}\right)$
123_1. $\left(\frac{2m}{3}-\frac{5n}{4}+\frac{5p}{2}\right)\left(\frac{4m}{5}+\frac{3n}{2}-6p\right)$
124. $(\frac{7}{2}xx-\frac{5}{3}xy+yy)(\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y)$

125. $(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b + \frac{3}{4}c)(\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}b - \frac{1}{2}c)$

125_1. $(0{,}4x - 2{,}5y + \frac{1}{2}z)(3\frac{1}{5}x + 2{,}4y - 0{,}8z)$

125_2. $(3\frac{1}{3}a - 1{,}6b + 0{,}2x)(7a - 3\frac{1}{5}b - 0{,}4x)$

126. $\left(\frac{5a}{2x} - \frac{4x}{3a} + \frac{5}{4}\right)\left(\frac{3a}{4x} - \frac{4x}{5a} - \frac{2}{5}\right)$

126_1. $\left(\frac{3a}{2b} - \frac{2c}{b} + \frac{4cc}{3ab}\right)\left(\frac{3a}{2c} + \frac{4c}{3a} + 2\right)$

127. $\left(\frac{2aa}{3xx} - \frac{3ab}{4xy} + \frac{4bb}{5yy}\right)\left(\frac{3aa}{4xx} + \frac{4ab}{5xy} - \frac{2bb}{3yy}\right)$

127_1. $\left(\frac{2aa}{3bb} - \frac{3ax}{2by} + \frac{4xx}{3yy}\right)\left(\frac{2a}{3b} + \frac{3x}{2y} - \frac{3bxx}{4ayy}\right)$

---

128. Was giebt, in der einfachsten Weise berechnet: 53^2, 64^2, 76^2, 95^2, 81^2, 42^2?*)

129. Was giebt ebenso 121^2, 123^2, 125^2, 127^2, 129^2, da $12^2 = 144$ ist?

130. Was giebt 532^2, 534^2 537^2, 539^2, da $53^2 = 2809$ ist?

131. Was giebt 871^2, 875^2, 878^2, 879^2, da $87^2 = 7569$ ist?

132. Was giebt 4761^2, 4763^2, 4765^2, 4768^2, wenn man weiß, daß $476^2 = 226576$ ist?

133. Was giebt 7382^2, 7384^2, 7385^2, 7387^2, wenn man weiß, daß $738^2 = 544644$ ist?

134. Berechne in der einfachsten Weise die Produkte 49.51, 79.81, 41.39, 62.58, 68.72.

135. Desgl. 67.73, 85.95, 97.103, 298.302, 795.805.

136. Um welche Zahl muß ein Produkt aus zwei gleichen Faktoren kleiner werden, wenn man den einen Faktor um 7, oder 1, oder n größer macht, den andern um ebenso viel kleiner?

137. Um wie viel wird ein Quadrat kleiner, wenn man aus demselben ein Rechteck macht, dessen lange Seite um 3 Fuß länger ist als die Seite des Quadrats, das aber sonst mit dem Quadrat gleichen Umfang hat?

138. Berechne nach der Formel $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ die Zahlenausdrücke $28^2 - 12^2$, $37^2 - 23^2$, $96^2 - 56^2$, $823^2 - 73^2$, $529^2 - 91^2$, $587^2 - 575^2$, $827^2 - 746^2$.

139. Berechne auf die einfachste Weise 99 . 763, 998 . 603, 997 . 823.

140. Ebenso 899.895, 598.704, 499.902.

141. Um wie viel wird das Produkt 738 . 572 größer, wenn man jeden Faktor um 1 vergrößert? Um wie viel wird es kleiner, wenn man jeden Faktor um 1 vermindert?

---

*) Die Aufgaben 128.—140. sind alle aus dem Kopfe zu berechnen, indem man das Facit von rechts nach links hinschreibt.

142. Um wie viel wird das Produkt 831 . 754 kleiner, wenn man den ersten Faktor um 1 vergrößert, den zweiten um 1 vermindert? Um wie viel wird es größer, wenn man den ersten Faktor um 1 verkleinert, den zweiten um 1 vergrößert?

143. Um wie viel wird ein Rechteck größer, dessen Seiten bezüglich 793 und 137 Fuß lang sind, wenn man die lange Seite um 5, die kurze um 7 Fuß verlängert (ohne den Flächeninhalt zu berechnen)?

144. Die Seite eines Buches hat durchschnittlich 38 Zeilen und in jeder Zeile 47 Buchstaben. Wie viele Buchstaben würde die Seite mehr enthalten, wenn auf jeder Seite 1 Zeile weniger, in jeder Zeile aber 2 Buchstaben mehr ständen?

145. Es ist 8034 . 7508 = 60319272. Wie groß ist dann 8035 . 7509, 8033 . 7507?

146. Es ist 89250 . 76360 = 6815130000. Wie groß ist dann 89249 . 76361, 89252 . 76358?

147. Welche Teilprodukte erhält man, wenn man die Produkte zweier mehrziffrigen Zahlen bildet, z. B. 73 . 85? und wie berechnet man durch Summierung der Teilprodukte das ganze Produkt aus dem Kopfe?*)

148. Multipliziere hiernach aus dem Kopfe, indem du die Faktoren unter einander setzest, die Teilprodukte bildest, diese zugleich im Kopfe addierst und das Facit von rechts nach links hinschreibst: 314 . 521, 413 . 302, 204 . 213.

149. Ebenso: 714 . 305, 813 . 765, 576 . 384.

150. Ebenso: 517 . 83**), 614 . 59, 837 . 91.

151. Desgleichen: 1538 . 7403, 1254 . 3071, 6801 . 2345.

152. Desgleichen: 81036 . 54103, 31726 . 54037, 40167 . 14359.

---

153. Beweise folgende Sätze und drücke dieselben ganz in Worten aus:

1. Kostet 1 Pfd. a Pf., so kosten b Ctr. ab Mk.
2. Kostet 1 Lot a Pf., so kosten b Kgr. ab Mk.
3. Kostet 1 Lot a Pf., so kosten b Pfd. $\frac{1}{2}$ab Mk.
4. Kostet 1 Lit. a Pf., so kosten b Hl. ab Mk.

154. Berechne hiernach möglichst aus dem Kopfe:

1. 1 Lot kostet 1, 2, 3, 4 Pf.; was kosten beziehungsweise 7, 15, 9$\frac{1}{2}$, 10$\frac{1}{4}$ Kgr.?
2. Was kosten 4, 5$\frac{1}{2}$, 6$\frac{1}{4}$ Pfd., 9 Pfd. 8 Lot, wenn 1 Lot bzw. 2, 3, 4, 5 Pf. kostet?
3. Was kosten 3, 4, 7$\frac{1}{2}$ Hl., 8 Hl. 20 Lit., wenn 1 Ltr. bzw. 10, 12, 15, 20 Pf. kostet?

---

*) Die Zahl, welche man im Sinne behalten muß, addiert man am besten gleich zum ersten folgenden Teilprodukt, da man sie sonst zu leicht vergißt.

**) Wenn der eine Faktor kürzer ist als der andere, so thut man meistens gut, ihn durch Vorsetzung von Nullen ebenso lang zu machen, als der andere ist. Sonst irrt man leicht in der Bildung der Produkte.

4. 1 Pfd. kostet 35, 50, 60 Pf., 1 Mk. 10, 2 Mk. 25; was kosten bzw. 8, $9\frac{1}{2}$, $10\frac{3}{4}$ Ctr., 10 Ctr. 20, 4 Ctr. 36 Pfd.?

155. Beweise folgende Sätze und drücke dieselben ganz in Worten aus:

1. Kostet 1 *m* a Mk., so kosten b *cm* a b Pf.
2. Kostet 1 Ctr. a Mk., so kosten b Pfd. a b Pf.
3. Kostet 1 Kgr. a Mk., so kosten b Lot a b Pf.
4. Kostet 1 Pfd. a Mk., so kosten b Lot 2 a b Pf.
5. Kostet 1 Hl. a Mk., so kosten b Lit. a b Pf.

156. Berechne darnach möglichst aus dem Kopfe:

1. 1 *m* kostet 3, 5, $4\frac{1}{2}$ Mk., 6 Mk. 40 Pf.; was kosten bzw. 20, 30, 50, 85 *cm*?
2. Was kosten 4, 6, $8\frac{1}{4}$ Pfd., 9 Pfd. 36 Lot, wenn 1 Ctr. bzw. 9, 20, 120, $137\frac{1}{2}$ Mk. kostet?
3. Was kosten 5, 6, 8, 10 Lot, wenn 1 Kgr. bzw. 3, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$ Mk., 2 Mk. 40 Pf. kostet?
4. 1 Pfd. kostet 2, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$ Mk., 2 Mk. 60; was kosten bzw. 3, 7, 10, 15 Lot?
5. Wenn 1 Hl. 10, 15, $21\frac{1}{2}$, $25\frac{1}{4}$ Mk. kostet; was kosten bzw. 2, 3, 6, 28 Lit.?

157. Beweise folgende Sätze:

1. 1 Mk. giebt zu p Pzt. in 1 Jahre p Pf. Zinsen.
2. a Mk. geben zu 4, 5, 6 Pzt. in 1 Jahre bzw. 4a, 5a, 6a Pf. Zinsen.
3. a Mk. geben zu p Pzt. in 1 Jahre ap Pf. Zinsen.
4. a Mk. geben zu p Pzt. in 1 Jahre $\frac{ap}{100}$ Mk. Zinsen.
5. a Mk. geben zu p Pzt. in n Jahren $\frac{apn}{100}$ Mk. Zinsen.

158. Berechne darnach möglichst aus dem Kopfe:

1. Wie viel Zinsen giebt 1 Mk. zu 4, 5, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{4}$ Pzt. in 1 Jahr?
2. Wie viel Zinsen geben 10, 70, 160, $887\frac{1}{4}$ Mk. in 1 Jahr, wenn sie bzw. zu 4, $4\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{3}$ Pzt. stehen?
3. Wie viel Zinsen geben 870, 1480, 17650, 18320 Mk. in 1 Jahr, wenn sie bzw. zu 4,3, 5,4, 5,2, 5,3 Pzt. stehen?
4. Wie viel Zinsen geben 824,7, 934,8, 7625,4, 9853,8 Mk. in 1 Jahr, wenn sie bzw. zu $4\frac{2}{3}$, $4\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{3}$, $6\frac{1}{6}$ Pzt. stehen?
5. Wie viel Zinsen geben 3750, 7860, $8051\frac{2}{5}$, $8343\frac{3}{4}$ Mk. welche bzw. stehen zu $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{4}$, $4\frac{2}{3}$, $5\frac{3}{5}$ Pzt., in 2, 3, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$ Jahren?

VII.

Division.

Anstatt ein Produkt zu dividieren, kann man auch einen Faktor desselben dividieren.

$$6a : 3 = 2a, \quad \frac{15x}{5} = 3x, \quad \frac{12a \cdot 16x}{4} = 3a \cdot 16x \text{ oder } 12a \cdot 4x.$$

Bei gleichen Größen heben sich Multiplikation und

Division gegenseitig auf. Multiplikation und Division sind daher entgegengesetzte Operationen.

$$\frac{a}{x} \cdot x = a, \frac{a \cdot x}{x} = a, (a : n) \cdot n = a, (a \cdot n) : n = a.$$

Die Division der Brüche geschieht, wie in der gemeinen Arithmetik gelehrt wird.

$$\frac{a}{b} : x = \frac{a}{bx}, x : \frac{a}{b} = \frac{bx}{a}, \frac{a}{b} : \frac{x}{y} = \frac{ay}{bx}.$$

Der Quotient gleichartiger Größen muß positiv, der Quotient entgegengesetzter Größen muß negativ genommen werden.*)

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}, \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}, \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}, \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

Ein Bruch bleibt unverändert, wenn man das Zeichen des Zählers und Nenners in das entgegengesetzte verwandelt. — Ein Bruch bleibt ebenfalls unverändert, wenn man das Zeichen des Zählers oder des Nenners umkehrt und zugleich das des ganzen Bruches.

$$\frac{+a}{+b} = \frac{-a}{-b}, \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}, \frac{a-x}{b-x} = \frac{x-a}{x-b}$$

$$\frac{a-x}{x-b} = -\frac{a-x}{b-x}, -\frac{1+a}{1-a} = \frac{a+1}{a-1} \text{ u. s. w.}$$

Eine mehrgliedrige Größe wird dividiert, indem man jedes einzelne Glied dividiert.

$$(axx + bx + c) : x = \frac{axx}{x} + \frac{bx}{x} + \frac{c}{x} = ax + b + \frac{c}{x}.$$

Sind Dividendus und Divisor beide mehrgliedrig, so verfährt man bei der Division ganz, wie bei der Division mit größeren ganzen Zahlen; man sieht zu, wie oft man den Divisor vom Dividendus abziehen kann. Die sich ergebende Zahl muß der gesuchte Quotient sein.

1. $36ab : 9$,	$39a : 13$,	$54xy : 18$
2. $a \cdot b : b$,	$m \cdot x : x$,	$a \cdot 5 : 5$
3. $\frac{a}{b} \cdot b$,	$\frac{m}{x-1} \cdot (x-1)$,	$\frac{x}{7-x} \cdot (7-x)$
4. $30ax : 5a$,	$50np : 2p$,	$84aanx : 7ax$
5. $a : b$,	$3x : 5y$,	$6m : 8n$

*) Dividieren im weiteren Sinne heißt den Quotienten suchen. Der Quotient ist die Zahl, welche mit dem Divisor multipliziert den Dividenden giebt. Die Division der relativen Größen muß daher direkt aus der Multiplikation derselben folgen (vergl. S. 17 Anmerk.).

6. $12a : 8b$, $9ab : 6ac$, $4ax : 8xy$

7. $42abx : 12bcy$, $64aam : 4abm$, $9aabbx : 6aby$

8. $\frac{2}{3}ab : \frac{5}{6}ax$, $\frac{1}{2}am : \frac{1}{6}mx$, $\frac{3}{4}xy : \frac{7}{8}uv$

9. $\frac{a}{b} : c$, $\frac{a}{b} : a$, $\frac{a}{b} : 5$

10. $a : \frac{b}{c}$, $x : \frac{x}{y}$, $\frac{x}{y} : \frac{1}{y}$

11. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} : \frac{3}{4}$, $\frac{2}{3} : \frac{x}{y}$

12. $\frac{a}{b} : \frac{x}{b}$, $\frac{a}{x} : \frac{a}{y}$, $\frac{a}{x} : \frac{a}{x}$

13. $\frac{1}{a} : b$, $a : \frac{1}{b}$, $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$

14. $(+a) : (+b)$, $(-a) : (-b)$, $(+a) : (-b)$

15. $\frac{+x}{-y}$, $\frac{-x}{+y}$, $\frac{-x}{-y}$

16. $\frac{-12}{-3}$, $\frac{-20}{+5}$, $\frac{+3}{-15}$

17. $\frac{6}{-8}$, $\frac{-8}{+12}$, $\frac{-18}{6}$

18. $\frac{+24}{8}$, $\frac{-7}{49}$, $\frac{42}{+6}$

19. $(+6a) : (-3b)$, $(-12x) : (-4y)$, $(-24np) : (+4n)$

20. $\left(+\frac{a}{b}\right) : \left(-\frac{a}{x}\right)$, $\left(+\frac{3c}{d}\right) : (-3x)$, $\left(-\frac{8m}{n}\right) : (+4y)$

21. $(+\frac{3}{5}) : (-6)$, $(-\frac{7}{8}) : \frac{5}{4}$, $(+\frac{5}{12}) : (-\frac{10}{3})$

22. $(+3\frac{1}{3}) : 10$, $(-2\frac{1}{2}) : (-2\frac{1}{7})$, $(-3\frac{1}{8}) : (+2\frac{1}{2})$

23. $\frac{x-y}{x+y}$, $\frac{x-a}{x-a}$, $\frac{x-a}{a-x}$

24. $\frac{x-1}{1-x}$, $\frac{m-n}{2(n-m)}$, $\frac{6(a-b)}{3(b-a)}$

25. $(+7a) \cdot (-9b) : (-21a)$, $(-7x)(-6y) : (+14y)$

26. $(-8m) \cdot (+9n) : (-12n)$, $(+am)(+bn) : (-an)$

27. $(+10xx) \cdot (-6yy) : (-4xy)$, $(-12abc)(-15xy) : (-20cy)$

28. $\frac{5ab}{6xy} : \frac{a}{2x}$, $\frac{16abc}{9xyz} : \frac{8b}{3z}$, $\frac{24mnx}{35pqy} : \frac{8m}{5y}$

29. $\frac{27npx}{10gh} : \frac{3p}{5h}$, $\frac{8ac}{9b} : \frac{6ay}{5b}$, $\frac{14ax}{15y} : \frac{21am}{10by}$

30. $\frac{18mx}{5y} : 4ax$, $\frac{6np}{5x} : 12py$, $\frac{27pq}{10c} : 18qx$,

31. $6ab : \frac{9ax}{5m}$, $4am : \frac{8mx}{3y}$, $20ax : \frac{15xy}{7b}$

32. $\frac{2}{3}xy : \frac{6ax}{5by}$, $7\frac{1}{2}ab : \frac{5ax}{6y}$, $9\frac{3}{4}mn : \frac{13mx}{2ny}$

33. $\frac{8mb}{9ax} : \frac{4}{3}bx$, $\frac{16xy}{21pq} : 5\frac{1}{3}px$, $\frac{14mx}{15py} : 17\frac{1}{2}my$

34. $\frac{6afmx}{5bcy} : \frac{9fnxx}{10cyy}$, $\frac{5afx}{2bc} : \frac{3fxx}{4cdn}$, $\frac{27anx}{28bpy} : \frac{18abx}{35npy}$

35. $\frac{9aab}{8cxx} : \frac{15abb}{4xyy}$, $\frac{a-x}{5a} : \frac{a+x}{10x}$, $\frac{m-x}{15mp} : \frac{m-x}{10px}$

36. $\frac{x+3}{3x} : \frac{5x}{x-5}$, $\frac{6ab}{a+b} : \frac{8ax}{a-b}$

37. $\frac{2(m-1)}{(a-1)x} : \frac{3(1-m)}{(a+1)x}$, $\frac{5a(m-z)}{3mz} : \frac{10b(z-m)}{9mx}$

38. $\frac{3a(a+b)}{8b(a-b)} : \frac{9a(a+b)}{16bc}$, $\frac{a(x-1)}{b(x+1)} : \frac{c(1-x)}{b(2+x)}$

39. $\frac{6bx(5+a)}{5ay(5-b)} : \frac{5mx(a-5)}{3ny(b-5)}$, $\frac{9(a-7)}{7(b+9)} : \frac{3(7-a)}{7(3-b)}$

40. $(7a - 7b) : 7$, $(9x - 9) : 9$

41. $(ax + bx) : x$, $(mx - my) : (-m)$

42. $(3xx - 6) : 2x$, $(6ax - 5bx + 3) : 3x$

43. $(24ab - 21bb - 3b) : (-3b)$

44. $(14abx - 49bcx + bnx) : 7b$

45. $(100ab - 75ac + 15bc) : 25abc$

46. $(-xx + 20xy - 6xxy) : (-4x)$

47. $(-\frac{2}{3}xx - \frac{3}{2}xy + \frac{2}{3}yy) : (-\frac{2}{3}xy)$

48. $\left(\frac{aad}{bcc} - \frac{a}{b} + \frac{d}{c}\right) : \frac{ad}{bc}$ 48_1. $\left(\frac{3ab}{2xy} - \frac{4a}{3x} + \frac{5b}{4y}\right) : \frac{5by}{6ax}$

49. $\left(\frac{xyz}{abc} - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) : \left(-\frac{xy}{ab}\right)$ 49_1. $\left(\frac{5a}{3bc} - \frac{3b}{2ac} + \frac{4c}{3ab}\right) : \frac{6}{abc}$

50. $(am - bm) : (a - b)$, $(mx - x) : (m - 1)$

51. $(ac - ad + bc - bd) : (c - d)$

52. $(mm - mx - m + x) : (m - 1)$

53. $(6am - 9an - 4bm + 6bn) : (3a - 2b)$

54. $(6ac - 2ad + 4af - 9bc + 3bd - 6bf) : (2a - 3b)$

55. $(2ax - 6bx + 8cx - ay + 3by - 4cy) : (2x - y)$

56. $(a^2 + ab - 2b^2) : (a - b)$ 57. $(3a^2 + ab - 2b^2) : (3a - 2b)$

58. $(9x^2+6xy-8y^2):(3x-2y)$ 59. $(x^2-8x+7):(x-7)$

60. $(x^2-2x-15):(x-5)$ 61. $(x^2+x-20):(x-4)$

62. $(x^2-y^2):(x-y)$ 63. $(a^2-25):(a+5)$

63_1. $(\frac{4}{5}xx+\frac{7}{3}x-2\frac{1}{2}):(\frac{3}{5}x-\frac{1}{2})$

63_2. $(\frac{3}{2}xx+4\frac{3}{5}xy-\frac{4}{3}yy):(2\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y)$

63_3. $(3\frac{3}{4}y^2-4\frac{3}{7}y-3\frac{3}{7}):(1\frac{1}{5}+2\frac{1}{4}y)$

63_4. $\left(\frac{3xx}{5}+\frac{11x}{6}-\frac{25}{9}\right):\left(\frac{3x}{2}-\frac{5}{3}\right)$

63_5. $\left(\frac{5aa}{7}-\frac{ax}{6}-\frac{14xx}{5}\right):\left(\frac{5a}{3}-\frac{7x}{2}\right)$

64. $\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{a}\right):(a+3)$ 64_1. $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

65. $(\frac{7}{5}xx-\frac{5}{7}yy):(7x-5y)$ 65_1. $(\frac{2}{3}a^2-\frac{3}{2}b^2):(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b)$

65_1. $(0{,}4xx+1{,}47x-8{,}5):(0{,}8x-2{,}5)$

65_2. $(2{,}21nn-1{,}8np-1{,}61pp):(0{,}7p+1{,}3n)$

65_3. $(3{,}9xx-4{,}1xy-11\frac{2}{3}yy):(1\frac{1}{2}x-3{,}5y)$

65_4. $(2aa-\frac{2}{15}ax-11\frac{1}{5}xx):(3{,}5x+1{,}5a)$

66. $(aaa-aab+2bbb):(a+b)$

67. $(6xxx+xx-29x+21):(2x-3)$

68. $(2xxx-2xx-6\frac{1}{2}x+7\frac{1}{2}):(2x-3)$

69. $(aaa-bbb):(a-b)$, $(aaa+bbb):(a+b)$

70. $(81aaaa-16bbbb):(3a-2b)$

71. $(aaaaa+bbbbb):(a+b)$

72. $(9aabb-4aacc+4abcc-bbcc):(3ab-2ac+bc)$

73. $(a^2-b^2+2bc-c^2):(a+b-c)$

74. $(3a^2-4ab+8ac-4b^2+8bc-3c^2):(a-2b+3c)$

75. $(x^2-2xz-4y^2+8yz-3z^2):(x-2y+z)$

75_1. $(16x^2-4a^2+9a^2b^2-36b^2x^2):(3ab-2a+6bx-4x)$

76. $(329bx-208ax+87ab-153xx-156bb+153aa)$:
$(17a-13b+9x)$

76_1. $(6x^2-21{,}38xy-6xz+18{,}5y^2+1{,}64yz-36z^2)$:
$(2{,}5x-3{,}7y+5z)$

76_2. $(0{,}06m^2+0{,}01mn-0{,}18mp-18{,}2n^2+13{,}57np-2{,}4p^2)$:
$(1{,}5p-5{,}2n+0{,}3m)$

77. $(2bb+cc-6aa+\frac{13}{5}ab+\frac{19}{6}ac-\frac{257}{60}bc)$:
$(2a-\frac{3}{2}c+\frac{4}{5}b$

78. $24xx-15yy-6zz-\frac{79}{6}xy-32xz+\frac{169}{4}yz)$:
$(\frac{1}{2}z-\frac{10}{3}y+3x)$

78_1. $(\frac{1}{2}aa-\frac{161}{180}ab+2\frac{23}{24}ac+\frac{2}{5}bb-2\frac{2}{3}bc-2\frac{1}{2}cc)$:
$(\frac{2}{3}a-\frac{3}{5}b-\frac{1}{2}c)$

79. $\left(bc-\frac{cc}{9}+\frac{16}{25}aa-\frac{9}{4}bb\right):\left(\frac{4a}{5}+\frac{c}{3}-\frac{3b}{2}\right)$

79_1. $(\frac{10}{3}aa-\frac{343}{60}ax-\frac{3}{10}bb+\frac{407}{200}bx-xx):\left(\frac{5a}{2}-\frac{3b}{4}+\frac{2x}{5}\right)$

79_2. $\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ $\left(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}\right) : (x - y)$

79_3. $\left(\frac{x^3}{y} - \frac{y^3}{x}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ $\left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}\right) : (x + y)$

80. $\left(\frac{aa}{bc} + \frac{ad}{bb} - \frac{bc}{dd} - \frac{cc}{ad}\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)$

81. $\left(\frac{2aa}{bb} + \frac{2ac}{b} + \frac{bb}{3aa} - \frac{2bc}{a} + \frac{2ac}{bb} - \frac{c}{3a} + \frac{2cc}{b} - 2\frac{1}{3}\right) :$
$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)$

81_1. $\left(\frac{81aa}{4bb} + \frac{4xx}{49yy} - \frac{9aa}{196} - \frac{36xx}{bbyy}\right) : \left(\frac{6x}{by} - \frac{3a}{14} + \frac{9a}{2b} - \frac{2x}{7y}\right)$

82. $(x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc) : (x - a)$

82_1. $(x^3 - (2a+1)x^2 + (a^2+2a-1)x - a^2 + 1) : (x - a - 1)$

83. Entwickele den Quotienten $\frac{1}{1+x}$ durch Division in eine unendliche Reihe nach steigenden Potenzen von x, und untersuche, welches Resultat diese Entwickelung für $x = \frac{1}{2}$ giebt.

84. Entwickele $\frac{1}{x+1}$ in eine Reihe nach fallenden Potenzen von x und setze in der Entwickelung $x = 3$.

85. Entwickele $\frac{1}{1-x}$ nach steigenden Potenzen und setze $x = \frac{1}{2}$.

86. Entwickele $\frac{1}{x-1}$ nach fallenden Potenzen und setze $x = 3$.

87. Beweise, daß

$$\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \ldots$$

$$\frac{a}{1+x} = a - ax + ax^2 - ax^3 + ax^4 - \ldots$$

88. Welchen Wert müssen darnach folgende unendliche Reihen haben:

1. $1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \ldots$ $1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + (\frac{3}{4})^3 + \ldots$
2. $1 - \frac{1}{5} + (\frac{1}{5})^2 - (\frac{1}{5})^3 + \ldots$ $1 + \frac{4}{5} + (\frac{4}{5})^2 + (\frac{4}{5})^3 + \ldots$
3. $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \ldots$ $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \ldots$
4. $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \ldots$ $4 - \frac{4}{5} + \frac{4}{25} - \frac{4}{125} + \ldots$

---

89. Beweise folgende Sätze:

1. Wenn a *m* b Mk. kosten, so kostet 1 *cm* $\frac{b}{a}$ Pf.
2. Wenn a Ctr. b Mk. kosten, so kostet 1 Pfd. $\frac{b}{a}$ Pf.
3. Wenn a Kgr. b Mk. kosten, so kostet 1 Lot $\frac{b}{a}$ Pf.

4. Wenn a Pfd. b Mk. kosten, so kostet 1 Lot $\frac{2b}{a}$ Pf.
5. Wenn a Hl. b Mk. kosten, so kostet 1 Lit. $\frac{b}{a}$ Pf.

90. Berechne darnach möglichst aus dem Kopfe:
1. Was kostet 1 *cm*, wenn 3, 7, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{4}$ *m* beziehungsw. kosten 6, 21, $11\frac{1}{4}$, $12\frac{1}{4}$ Mk.?
2. Man zahlt 4, 15, 45, 49 Mk. bzw. für 2, 5, $7\frac{1}{2}$, $8\frac{3}{4}$ Kgr.; was für 1 Lot?
3. Man zahlt 3, $3\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $5\frac{1}{4}$ Mk. bzw. für 2, 7, $9\frac{1}{3}$, $31\frac{1}{2}$ Pfd.; was für 1 Lot?
4. Wenn 3, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $6\frac{2}{5}$ Ctr. bzw. kosten 15, $27\frac{1}{2}$, $53\frac{1}{3}$, $153\frac{3}{5}$ Mk.; was 1 Pfd.?
5. Was kostet 1 Lit., wenn 3, 4, $5\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{4}$ Hl. beziehungsw. kosten 18, 40, $60\frac{1}{2}$, $108\frac{3}{4}$ Mk.?

91. Beweise folgende Sätze:
1. Wenn 1 Mk. jährl. c Pf. Zinsen giebt, so macht das c Pzt.
2. Wenn a Mk. jährl. c Pf. Zinsen geben, so macht das $\frac{c}{a}$ Pzt.
3. Wenn a Mk. jährl. c Mk. Zinsen geben, so macht das $\frac{100c}{a}$ Pzt.
4. Wenn a Mk. in n Jahren c Mk. Z. geben, so m. das $\frac{100c}{an}$ Pzt.

92. Berechne darnach möglichst aus dem Kopfe:
1. 1 Mk. giebt jährl. 4, 5, 6 Pf. Zinsen; wie viel Pzt.?
2. Wenn 7, 9, 15, 18, 24 Mk. an Zinsen bzw. geben 35, 39, 70, 96, 100 Pf.; wie viel Pzt.?
3. Wenn 600, 850, 975, 1840, 5670 Mk. an Zinsen bzw. geben 30, 34, 52, $87\frac{2}{5}$, $283\frac{1}{2}$ Mk.; w. v. Pzt.
4. Wenn 780, 930, 4720, 7470 M. a. Z. bzw. geben 33 M. 80, 46 M. 50, 217 M. 12, 398 M. 40; w. v. Pzt.?
5. Es bringen 650, 876, 3740, 9860 Mk. bzw. in 3, $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$ Jahren an Zinsen 78, $109\frac{1}{2}$, $224\frac{2}{5}$, $862\frac{3}{4}$ Mk.; w. v. Pzt.?

---

93. In England kostet 1 Yard (Elle) a Sh.; wie viel Mk. 1 *m* in Deutschland, wenn 1 Yard = 0,914 *m*, 1 Sh. = 1 Mk. ist?*)

94. In Australien kostet 1 Pfd. Wolle a Sh. (engl.); wie viel Mk. 1 Ctr. in Deutschland, wenn 1 engl. Pfd. = 453,6 Gr., 1 Sh. = 1 Mk. ist?

95. In Brasilien kostet 1 Ctr. Zucker a Milreïs; wie viel Pf. 1 Pfd. in Deutschland, wenn 1 bras. Ctr. = 58759 Gr., 1 Mlr. = 2 M. 33,8 Pf. ist?

96. In Bordeaux kostet 1 Hl. Wein a Franken; wie viel Pf. 1 Lit. in Deutschland, wenn 10 Fr. = 8 Mk. sind?

*) Nach Auffindung der Formel hat der Schüler für a bestimmte Zahlen zu setzen, um den großen Nutzen einer solchen Formel einzusehen.

97. In Centralamerika kost. 1 Pfd. Kakao a Centavos, wie viel Pf. 1 Pfd. in Deutschland, wenn 1 amerik. Pfd. = 460 Gr., 100 Cent = 1 Piaster = 4 Mk. 33,3 Pf. sind?

98. In Schweden kostet der Ctr. Eisen a Kronen; wie viel Mk. 1 Ctr. in Deutschland, wenn 1 schw. Ctr. = 42534 Gr., 1 Kr. = 1 M. 3 Pf. ist?

99. In der Argentinischen Republik kostet 1 Quintal (Ctr.) Wolle a Peso; wie viel Mk. 1 Ctr. in Deutschland, wenn 1 Qu. = 45935 Gr., 1 Peso = 8 Realen, 2 Realen = 1 Mk. sind?

100. In den Niederlanden kostet 1 Ctr. (= 100 Pond) Kaffee a Gulden; wie viel Pf. 1 Pfd. in Deutschland, wenn 1 Pond = 1000 Gr., 1 G. = 100 Cents, 10 Cents = 17 Pf. sind?

101. In Nordamerika kostet 1 Ctr. (= 112 Pfd. engl.) Baumwolle a Dollar in Gold; wie viel Pf. kostet 1 Pfd. in Deutschland, wenn 1 engl. Pfd. = 453,6 Gr., 1 Dollar = 4 Mk. $10\frac{1}{2}$ Pf. ist?

102. In Odessa kostet 1 Tschetwert a Rubel; wie viel Mark 1 Scheffel in Deutschland, wenn 1 Tsch. = 209,902 Lit., 1 Rub. = 3 Mk. 22,4 Pf. ist?

VIII.

Zerlegung in Faktoren. Heben der Brüche.

A. Zerlegung in Faktoren.

1. $8a + 8b$
2. $5x - 5y$
3. $ax - bx$
4. $ax + ay$
5. $12a - 18b$
6. $4ax - 2bx$
7. $ab - b$
8. $3x - 3$
9. $ax + a$
10. $ax - x$
11. $aa + a$
12. $x^2 - x$
13. $ax - 2ay + 3az$
14. $mx - nx + px$
15. $ax - bx + 7x$
16. $8abx - 6acy - 10az$

16_1. $15abx - 9bby + 12bt$

16_2. $14anx - 21bny - 7n$

16_3. $20ax - 35bx - 40xx$

16_4. $63xy - 84y^2 + 98yz$

17. $ax + bx + cx - dx$
18. $am - ap + ax - ay$
19. $a(x + y) - b(x + y)$
20. $a(x - y) - b(x - y)$

20_1. $t(2x - 3y) - 5(2x - 3y)$

20_2. $2x(3p - q) - (3p - q)$

21. $m(x + y) - x - y$
22. $n(x - y) - x + y$
23. $ax + ay + bx + by$
24. $ac + ad - bc - bd$
25. $ac - cx + a - x$
26. $ax - a + x - 1$
27. $ab - bc - a + c$
28. $ab - a - b + 1$

28_1. $2ax - 3by - 2bx + 3ay$

28_2. $3ax - 5by - 5ay + 3bx$

28_3. $10n^2 + 21xy - 14nx - 15ny$

28_4. $40x^2 - 2p + 5x - 16px$

29. $30ax - 34bx - 15a + 17b$
30. $56aa - 40ab + 63ac - 45bc$
31. $90x^2 - 25ax - 288bx + 80ab$
32. $91x^2 - 112mx + 65nx - 80mn$

33. $ax - bx + cx + ay - by + cy$
34. $2ax - 5ay + a - 2bx + 5by - b$
34_1. $(4a - 5b)(3m - 2p) + (a + 4b)(3m - 2p)$
34_2. $(7a - 3x)(5c - 2d) - (6a - 2x)(5c - 2d)$
34_3. $(3x - y)(2a + p) - (3x - y)(a - q)$
34_4. $(x-y)(3a+4b)-(4a-5b)(x-y)+(x-y)(2a-8b)$
34_5. $3(2a + 7b)(2m - 3p) + 5(3a - 4b)(2m - 3p)$
34_6. $7(a - 2b)(2x - 3y) - 5(a - 2b)(3x - 4y)$
35. $a^2 + 2ab + b^2$ 36. $x^2 - 2xy + y^2$
37. $a^2 - 6a + 9$ 38. $x^2 + 2x + 1$
39. $x^2 - 4x + 4$ 40. $x^3 + 4x^2 + 4x$
41. $a^2 - b^2$ 42. $m^2 - n^2$
43. $36x^2 - 25y^2$ 44. $9a^2b^2 - y^2$
45. $a^2 - 1$ 46. $1 - x^2$
47. $a^3 - b^3$ 48. $a^3 + b^3$
48_1. $27x^3 - 8y^3$ 48_2. $64a^3 + 125b^3$
49. $a^4 - b^4$ 50. $a^4 + b^4$
50_1. $(a - b)^2 - x^2$ 50_2. $(2a - 3b)^2 - 4b^2$
50_3. $9(5n - 4p)^2 - 64n^2$ 50_4. $81a^2 - 16(2a - 3x)^2$
50_5. $100x^2 - 4(7x - 2y)^2$ 50_6. $(a + 3b)^2 - 9(b - c)^2$
50_7. $9(2a - d)^2 - 4(3a - x)^2$ 50_8. $(4a + 3b)^2 - 16(a - x)^2$
51. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ 52. $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$
52_1. $9x^2 - 6xy + y^2 - z^2$ 52_2. $9x^2 - 4y^2 + 4yz - z^2$
52_3. $x^2 + (a + b)x + ab$ 52_4. $x^2 - (c + 5)x + 5c$
53. $x^2 - 5x + 6$ 54. $x^2 - 6x + 8$
55. $a^2 - 7ab + 12b^2$ 56. $a^2 - 7ab + 10b^2$
56_1. $x^2 + (a - b)x - ab$ 56_2. $x^2 - (n - 3)x - 3n$
57. $x^2 - x - 12$ 58. $x^2 + x - 12$
59. $a^2 - 3ab - 10b^2$ 60. $a^2 + 2ab - 15b^2$
61. $x^4 + x^3 + x + 1$ 62. $x^4 + x^2y^2 + y^4$

B. Das Heben der Brüche.

1. $\frac{a^2 + ab}{a^2 - ab}$, $\frac{a^2 - ab}{b^2 - ab}$, $\frac{7a - 7b}{8b - 8a}$

2. $\frac{ax + ay}{3x + 3y}$, $\frac{am + bm}{am - bm}$, $\frac{am - bm}{bn - an}$

3. $\frac{ax - x}{ax + x}$, $\frac{6x - 6}{7x - 7}$, $\frac{5x^2 + x}{5x^2 - x}$

4. $\frac{7a^2b - 7ab^2}{7a^2c - 7ac^2}$, $\frac{3a^2x - 2ax^2}{2a^2x - 3ax^2}$, $\frac{5x^2y - 4xy^2}{5x^2y + 4xy^2}$

5. $\frac{3a - 6b}{8b - 4a}$, $\frac{5x - 5}{7 - 7x}$, $\frac{ax - a}{b - bx}$

6. $\frac{x + x^2}{x + 1}$, $\frac{x - x^2}{x - 1}$, $\frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$

7. $\frac{(x + 1)^2}{x^2 - 1}$, $\frac{(a - b)^2}{a^2 - b^2}$, $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab}$

8. $\frac{6a^2 - 6ab}{3(a-b)^2}$, $\frac{a^2x - ax^2}{x^2 - a^2}$, $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

9. $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ $\frac{m^2 - 2mn + n^2}{n^2 - m^2}$, $\frac{(x-y)^2}{(y-x)^2}$

10. $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$ $\frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2}$ $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$

11. $\frac{a^4 - b^4}{a^2 + b^2}$, $\frac{a^4 - b^4}{a^2 - b^2}$, $\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2}$

12. $\frac{a^4 - b^4}{a^3 - b^3}$, $\frac{a^4 - b^4}{a^3 + b^3}$, $\frac{a^4 + b^4}{a^3 + b^3}$

13. $\frac{ax + bx - cx}{ay + by - cy}$,

14. $\frac{2a^2b + 2ab^2 - 2abc}{3bc^2 - 3b^2c - 3abc}$

15. $\frac{ac + bc - ad - bd}{ac - bc - ad + bd}$

16. $\frac{ax + ay - bx - by}{ax - ay - bx + by}$

17. $\frac{2ac - 2ad - 3bc + 3bd}{2ac - 2ad + 3bc - 3bd}$

18. $\frac{2ab - 3ac - 2b + 3c}{3ab - 2ac - 3b + 2c}$

19. $\frac{mx + m - x - 1}{m^2 - 1}$

20. $\frac{mx - m - x + 1}{(m-1)^2}$

21. $\frac{ax + a - x - 1}{ax - a - x + 1}$

22. $\frac{a^2 - ax + a - x}{a^2 - ax - a + x}$

23. $\frac{an - 2a + 3n - 6}{an - 2a - 3n + 6}$

24. $\frac{2ax - a + 10x - 5}{a - 2ax - 10x + 5}$

25. $\frac{ax - ay + bx - by + a + b}{ax - ay - bx + by + a - b}$

26. $\frac{a^2 - b^2 - ac + bc}{ab + ac + b^2 - c^2}$

27. $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}$

28. $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

29. $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15}$

30. $\frac{x^2 - x - 20}{x^2 + x - 30}$

31. $\frac{a^2 - 9ab + 14b^2}{a^2 - ab - 2b^2}$

32. $\frac{2a^2 - ab - 3b^2}{2a^2 - 5ab + 3b^2}$

33. $\frac{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}$

34. $\frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}$

IX.

Addition und Subtraktion der Brüche.

1. $\frac{a}{x} + \frac{1}{x}$

2. $\frac{a}{x} - \frac{1}{2x}$

3. $\frac{3a}{m} - \frac{2a}{m} + \frac{a}{m}$

4. $\frac{3x}{a} - \frac{7x}{a} + \frac{2x}{a}$

5. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

6. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

7. $\frac{a}{x} - \frac{b}{mx}$

8. $\frac{x}{12a} - \frac{y}{4}$

9. $\frac{3}{5}a - \frac{1}{3}b - \frac{7}{20}a + \frac{7}{12}b$

10. $\frac{7}{12}x + \frac{10}{21}y - \frac{1}{7}y - \frac{1}{4}x$

11. $\frac{4a}{5} - \frac{3a}{10} - \frac{4b}{7} + \frac{b}{14}$

12. $\frac{2x}{15} + \frac{5y}{12} + \frac{x}{5} - \frac{3}{4}y$

13. $\frac{a}{mx} - \frac{1}{nx}, \quad \frac{2}{aa} - \frac{3}{ab}$

14. $\frac{m}{5a} - \frac{n}{2a}, \quad \frac{7}{10x} - \frac{5}{8x}$

15. $\frac{a}{b} + c, \quad \frac{x}{a-x} + 1$

16. $\frac{a}{x} - 1, \quad 1 - \frac{a}{a+x}$

17. $\frac{a}{m} + 2m, \quad \frac{2x}{x-a} - 1$

18. $\frac{3a}{x} - 5x, \quad 2 - \frac{6a}{3a+2b}$

19. $\frac{a}{2b} - \frac{b}{3a}, \quad \frac{5a}{x^2} - \frac{2b}{xy}$

20. $\frac{x}{6y} - \frac{3y}{4x}, \quad \frac{n}{a^2} + \frac{x}{5a}$

21. $\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}x - c$

22. $\frac{a}{bx} - \frac{c}{dx} + m$

23. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

24. $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p}$

25. $\frac{x}{ab} - \frac{y}{ac} - \frac{z}{bc}$

26. $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{ax} - \frac{4}{bx}$

27. $\frac{a}{2b} - \frac{a}{3b} - \frac{a}{4b} + \frac{a}{5b}$

27_1. $\frac{4x}{3a} - \frac{5x}{6a} - \frac{4x}{5a} + \frac{7x}{15a}$

28. $\frac{5c}{6d} + \frac{3c}{14d} - \frac{18c}{35d} - \frac{2c}{15d}$

28_1. $\frac{4n}{9p} - \frac{8n}{15p} + \frac{11n}{18p} - \frac{3n}{10p}$

29. $\frac{3xy}{5ab} - \frac{5xy}{6ab} + \frac{8xy}{15ab}$

29_1. $\frac{4a^2}{9xy} + \frac{7a^2}{12xy} - \frac{17a^2}{18xy}$

30. $\frac{7ax}{18y^2} - \frac{5ax}{8y^2} + \frac{4ax}{9y^2}$

30_1. $\frac{8a^2}{15x^2} - \frac{7a^2}{30x^2} + \frac{9a^2}{20x^2}$

31. $\frac{19a}{20bc} - \frac{26a}{30bc} + \frac{7a}{24bc}$

31_1. $\frac{8ax}{15y} + \frac{7ax}{42y} + \frac{12ax}{40y}$

32. $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$

33. $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$

34. $\frac{a-2b}{c} + \frac{3b}{c}$

35. $\frac{3a+2b}{x} - \frac{2a+3b}{x}$

36. $\frac{a-2b}{a+b} + \frac{a+3b}{a+b}$

37. $\frac{3a+b}{a-b} - \frac{2a+b}{a-b}$

38. $\frac{a}{x} - \frac{a+b}{2x}$

39. $\frac{a-b}{2x} - \frac{a+b}{5x}$

40. $\frac{3x-2}{5} - \frac{5x-3}{2}$

41. $\frac{5x-4}{6x} - \frac{7x-6}{9x}$

42. $\frac{2a-3b}{12a} + \frac{3a-2b}{15a}$

43. $\frac{x-2y}{8y} - \frac{2x-y}{12y}$

44. $\frac{2a-3b+4}{6} - \frac{3a-4b+5}{8} + \frac{a-1}{12}$

45. $\frac{a+5b-7c}{15} + \frac{3a-7b+5c}{20} - \frac{2a-b+5c}{30}$

46. $\frac{4x-5y+8}{18} - \frac{7x+3y-5}{30} + \frac{2x-5y-3}{45}$

47. $\frac{9x+2}{3} - \frac{7x+5}{4} - \frac{8-7x}{6} + \frac{5-3x}{8} - \frac{3-7x}{12}$

48. $\frac{7a-3b}{4} + \frac{4a-5b}{6} - \frac{3a-8b}{9} + \frac{5a-6x}{18} - \frac{3b-8x}{24}$

49. $\frac{5(2x-3)}{4} - \frac{2(7x-5)}{3} + \frac{4(3x+1)}{5}$

50. $\frac{3(2a-3b)}{8} - \frac{2(3a-5b)}{3} + \frac{5(a-b)}{6}$

51. $\frac{a-3b}{6a} + \frac{4a-b}{2b} + \frac{5a+3x}{9x} - \frac{a^2-bx}{2ax} - \frac{2a}{b}$

52. $\frac{3a-5b}{15ab} - \frac{a-7c}{12ac} - \frac{5b-4c}{20bc} + \frac{3}{4a} + \frac{3}{5b} + \frac{4}{3c}$

52_1. $\frac{6a+c}{6bc} - \frac{5a-4b}{4ac} - \frac{3b-5c}{5ab} + \frac{3}{5a} - \frac{1}{6b} + \frac{5}{4c}$

53. $\frac{2}{3a} - \frac{1}{2b} - \frac{2a+3}{6a^2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{3a-2b}{6ab}$

54. $\frac{1}{6a} + \frac{a-2b}{3ab} - \frac{3}{4b} - \frac{3a-4x^2}{8ax^2} + \frac{9}{8x^2} + \frac{5x^2-5b}{12bx^2}$

54_1. $\frac{5a-2x}{10ax} - \frac{3b-4x}{12bx} + \frac{4a^2-5b}{20a^2b} - \frac{a^2-x}{4a^2x} - \frac{a-b}{5ab} + \frac{2}{3b}$

55. $\frac{a(3b-2c)}{6bc} - \frac{b(4a-5c)}{10ac} + \frac{8a^2+3b^2}{6ab} - \frac{5a-4b}{10c}$

55_1. $\frac{a(3x^2-2b)}{12bx^2} - \frac{b(5x^2-3a)}{15ax^2} + \frac{5a-6b}{30x^2} + \frac{a}{12b} + \frac{2b}{3a}$

56. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}$

57. $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}$

58. $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$

59. $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$

60. $\frac{7}{a+b} - \frac{5}{a}$

61. $\frac{8}{a-1} - \frac{7}{a}$

62. $\frac{x}{a+1} - \frac{x}{a-1}$

63. $\frac{2x}{a-1} - \frac{x}{a^2-1}$

64. $\frac{6}{x+3} - \frac{5}{3}$

65. $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{3x}$

66. $\frac{3x-1}{1-3x} - \frac{2x-7}{7}$

67. $\frac{2x-1}{x-2} - \frac{2x-5}{x-4}$

68. $\frac{5}{2(x-1)} - \frac{7}{3(x-1)}$

69. $\frac{8}{15(x-1)} + \frac{9}{10(x+1)}$

70. $\frac{5}{3x-9} - \frac{8}{5x-15}$

71. $\frac{5}{4x-4} - \frac{7}{6x+6}$

71_1. $\frac{ad+bc}{2cd(c-d)} + \frac{ad-bc}{2cd(c+d)}$

71_2. $\frac{2ax-3by}{2xy(x-y)} - \frac{2ax+3by}{2xy(x+y)}$

72. $\frac{x-1}{2x+2} - \frac{3x-4}{3x+3} + \frac{2x-1}{6x+6}$

73. $\frac{2x-3}{3x-3} - \frac{3x-1}{4x+4} - \frac{x+2}{x^2-1}$

74. $\frac{5x+4}{x-2} - \frac{3x-2}{x-3} - \frac{x^2-2x-17}{x^2-5x+6}$

75. $\frac{x-4}{2x-1} - \frac{3x-5}{x+2} + \frac{5x^2+9x+14}{2x^2+3x-2}$

76. $\frac{1}{x-1} - \frac{4}{1-x} - \frac{8}{1+x} + \frac{3x+7}{x^2-1}$

77. $\frac{8}{2x-3} + \frac{5}{3-2x} - \frac{3x-4}{2x^2-x-3}$

78. $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} - \frac{5}{x+2}$ 79. $\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-3}$

80. $\frac{2}{2x-1} - \frac{9}{3x-1} + \frac{4}{2x-3}$ 81. $\frac{7}{x-a} - \frac{4}{x-b} - \frac{3}{x-c}$

82. $\frac{1}{x+a} + \frac{2}{x+b} - \frac{3}{x+c}$ 83. $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1+x^2}$

84. $\frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x}$

85. $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{4}{x^2-1} - \frac{4}{(x^2-1)^2}$.

X.

Proportionen.

1. Wodurch wird das Verhältnis zweier Größen gemessen?*) Wie wird es bezeichnet? Wie nennt man die Größen, welche das Verhältnis bilden? Was ist Exponent des Verhältnisses? Wann sind zwei Verhältnisse einander gleich? Was ist ein fallendes, was ein steigendes Verhältnis? Was gilt iu dieser Beziehung von zwei gleichen Verhältnissen?

2. Eine Proportion ist der Ausdruck für die Gleichheit zweier Verhältnisse. Unter welcher Bedingung ist zunächst $a : b = c : d$ eine richtige Proportion? Was sind Vorderglieder, was Hinterglieder, was homologe Glieder? was innere, was äußere Glieder einer Proportion?

3. Welches ist die wichtigste Eigenschaft einer Proportion? Woran erkennt man daher am einfachsten, ob eine Proportion richtig ist?

4. Wie bildet man aus den Faktoren zweier gleichen Produkte eine Proportion? Wie aus zwei gleichen Brüchen?

5. Welche Umstellungen kann man mit den Gliedern einer Proportion unbeschadet ihrer Richtigkeit vornehmen?

6. Wie kann man in einer Proportion die inneren und äußeren Glieder durch Multiplikation und Division unbeschadet ihrer Richtigkeit verändern?

7. Wenn in einer Proportion ein äußeres und ein inneres Glied einander gleich sind, was folgt daraus?

*) Hier sind nur sogenannte geometrische Verhältnisse und Proportionen gemeint, da die arithmetischen von gar keiner Bedeutung sind. — Das Zeichen des Verhältnisses wird am besten für „dividiert durch" genommen.

8. Wie findet man ein unbekanntes (äußeres, inneres) Glied einer Proportion, wenn die andern drei bekannt sind?

9. Was ist eine stetige Proportion? Was ist geometrisches Mittel, was arithmetisches Mittel? Was mittlere Proportionale, was vierte Proportionale, was dritte Proportionale?

10. Wenn $a : b = c : d$, so kann man immer setzen $b = at$, $d = ct$; oder $c = at$, $d = bt$ (Beweis!).

11. Wenn $a : b = c : d$, so ist auch

$$am + bn : ap + bq = cm + dn : cp + dq$$

$$am + cn : bm + dn = a : b = c : d.$$

Dieser Satz heißt der Satz von der korrespondierenden Addition und Subtraktion. Beweise ihn und gieb einige specielle Fälle desselben an.

12. Wenn $a : b = c : d$, so ist auch

$$a^n : b^n = c^n : d^n$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$$

d. h. in Worten? (Beweis!)

13. Ist $a : b = c : d$ und $a : b = x : d$, so ist $x = c$; d. h. in Worten? (Beweis!)

13_1. Wenn $a : b = c : d$

und $a_1 : b_1 = c_1 : d_1$

so ist auch $aa_1 : bb_1 = cc_1 : dd_1$

und $\frac{a}{a_1} : \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} : \frac{d}{d_1}$

d. h. in Worten? (Beweis!)

14. Was ist eine fortlaufende Proportion? Wenn $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$, so kann man stets setzen $a_1 = at$, $b_1 : bt$, $c_1 = ct$ und es ist $(a + b + c) : (a_1 + b_1 + c_1) = a : a_1$, d. h. in Worten? (Beweis!) — Ebenso ist, wenn $x : y = a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$, auch $x : y = (a + b + c) : (a_1 + b_1 + c_1)$.

15. Wenn zwischen 4 oder *n* Größen A, B, C, D u. s. w. 3 oder $n - 1$ Verhältnisse gegeben sind, wie findet man dann die fortlaufende Proportion $A : B : C$ u. s. w.?

16. Welches ist die Form einer harmonischen Proportion zwischen den Größen a, b, c u. d? Welches die Form einer stetigen harmonischen Proportion zwischen a, b u. c? Welches ist die Haupteigenschaft einer solchen Proportion, und wie wird daher die stet. harm. Proportion unter den Größen a, b u. c heißen, wenn das erste Verhältnis $a : b$ ist?

---

17. Drücke folgende Verhältnisse in den kleinsten ganzen Zahlen aus:

1.	$115 : 161$	$231 : 616$	$\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$	$\frac{8}{9} : \frac{4}{15}$
2.	$2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3}$	$7\frac{1}{4} : 4\frac{5}{6}$	$8\frac{3}{5} : 18\frac{3}{7}$	$14\frac{5}{11} : 26\frac{1}{2}$
3.	$0{,}8 : 0{,}6$	$0{,}45 : 1{,}8$	$0{,}078 : 0{,}117$	$2{,}646 : 1{,}47$
4.	$18{,}2 : 34\frac{2}{3}$	$26\frac{3}{7} : 9{,}25$	$10{,}6 : 14\frac{5}{11}$	$271{,}25 : 206\frac{2}{3}$

18. Desgl.

1. $4ab : 6bx$, $9a^2b : 12ab^2$, $1\frac{2}{3}x^3y : 1\frac{1}{9}xy^3$, $2\frac{4}{5}p^4q : 2\frac{1}{3}p^2q^3$
2. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ $\frac{4a}{7b} : \frac{3a}{14x}$ $\frac{15a}{8x} : \frac{5b}{12x}$ $3\frac{1}{3}x : \frac{5bx}{2a}$
3. $4(a+b)x : 6(a+b)y$ $6\frac{2}{3}(a-b)y : 4\frac{1}{6}(ay+by)$
4. $7\frac{1}{8}(x-1)p : 4\frac{3}{4}(q-qx)$ $5\frac{1}{3}(a+b)^2 : 3\frac{1}{5}(a^2-b^2)$
5. $\frac{x+1}{x-1} : \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $\frac{x+1}{x-1} : \frac{x^3+1}{x^3-1}$ $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) : \frac{a-b}{a+b}$

19. Drücke folgende Proportionen, ohne das Glied x zu ändern, in den kleinsten ganzen Zahlen aus:

1. $40 : 15 = 28 : x$ $10 : 112 = x : 42$
2. $6{,}3 : x = 13\frac{1}{2} : 20$ $7\frac{7}{8} : 28 = 3{,}75 : x$
3. $6\frac{2}{3} : 26\frac{1}{4} = x : 2\frac{1}{4}$ $x : 1{,}5 = 1\frac{5}{7} : 1{,}8$

20. Desgl.

1. $\frac{7}{4}ab : \frac{5}{6}bc = x : \frac{10}{3}cd$ $3\frac{1}{3}a^2b : \frac{5}{6}ac = 1\frac{1}{3}ab^2 : x$
2. $\frac{3a}{5b} : \frac{12a}{7c} = \frac{14c}{15b} : x$ $\frac{4a^2}{9c^2} : \frac{5b^2}{6d^2} = \frac{2ad^2}{5bc^2} : x$
3. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} : \left(1+\frac{a}{b}\right) = \left(1-\frac{b}{a}\right) : x$, $\frac{a^3+b^3}{n} : \frac{a^3-b^3}{p} = \frac{p(a+b)}{n(a-b)} : x$

21. Bestimme x aus folgenden Proportionen:

1. $51 : 15 = 68 : x$ $20 : 95 = x : 57$
2 $x : 10{,}4 = 115 : 18\frac{2}{5}$ $4{,}125 : x = 3\frac{1}{7} : 26\frac{2}{3}$
3. $7ab : 5bc = 3\frac{1}{2}a : x$ $8ab : x = bc : 1\frac{3}{4}ac$
4. $x : \frac{a}{c} = \frac{c}{d} : \frac{a}{b}$ $\frac{a}{b} : x = \frac{c}{d} : \frac{b}{d}$
5. $\frac{a}{14b} : x = \frac{3c}{7b} : \frac{2c}{a}$ $\frac{a+b}{a-b} : \frac{a^2-b^2}{ab} = x : \frac{(a-b)^2}{ac}$
6. $\left(\frac{a^3-b^3}{a-b} - ab\right) : \left(\frac{a^3+b^3}{a+b} + ab\right) = 1 : x$
7. $\left(\frac{a^3-b^3}{a-b} + ab\right) : \left(\frac{a^3+b^3}{a+b} - ab\right) = (a+b)^2 : x$

22. Bilde durch Umstellung der Glieder, indem du der ersten Größe zweimal jede der vier möglichen Stellungen giebst, aus den folgenden vier Produkten- und den folgenden vier Quotientengleichungen die je 8 möglichen Proportionen.

1. $4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$, $9 \cdot 8 = 3 \cdot 24$, $ab = xy$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{p} \cdot \frac{p}{c}$
2. $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$, $\frac{2a}{3b} = \frac{p}{q}$, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$

23. Suche die vierte Proportionale zu: 1) 3, 4, 6; 2) 6, 21, 22; 3) 2, $4\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{3}$; 4) $3\frac{1}{3}$, $3\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{3}$; 5) a, b, c.

24. Suche die dritte Proportionale zu: 1) 9 u. 6; 2) 16 u. 12; 3) 9 u. 15; 4) a u. b.

25. Suche die mittlere Proportionale zwischen: 1) 27 u. 3; 2) 9 u. 16; 3) $\frac{ab}{c}$ u. $\frac{ac}{b}$; 4) $\frac{ax}{b}$ u. $\frac{bx}{a}$; 5) $\frac{(a+b)^2}{p-q}$ u. $\frac{p^2-q^2}{p+q}$.

26. Transformiere folgende Proportionen nach dem Satz von der korrespondierenden Addition und Subtraktion so, daß ein Glied x heißt, die andern drei aber kein x enthalten:

1.	$a:b=c-x:x$	$a:b=c+x:x$
2.	$a:b=x:c-x$	$a:b=c:x-c$
3.	$a:b=c:c-x$	$a:b=x:x-c$
4.	$a:b=c+x:c-x$	$a:b=x+c:x-c$
5.	$a:b+x=c:b-x$	$a+x:b=a-x:c$
6.	$a+x:b+x=x+c:x-c$	$x+a:x=x+b:x-b$
7.	$a+x:b+x=a-x:c-x$	$x+a:x=x:x-b$

27. Kombiniere je zwei der folgenden Proportionen so, daß x herausfällt, und gieb der neuen Proportion die einfachste Form.

1.	$a:b=c:x$ $b:p=x:q$	$a:b=c:x$ $x:p=c:d$	$a:b=x:c$ $p:q=x:a$
2.	$a:b=x:c$ $a:p=x:q$	$x:a=b:c$ $p:b=q:x$	$a:x=b:c$ $p:q=x:c$

28. Suche die fortlaufende Proportion A : B : C u. s. w., wenn gegeben ist:

1.	$A:B=3:7$ $A:C=4:5$	$A:B=6:5$ $A:C=9:7$	$A:B=8:7$ $C:A=11:12$
2.	$A:B=5:4$ $B:C=2:3$	$A:B=8:9$ $C:B=7:12$	$A:C=8:9$ $B:C=5:6$
3.	$A:B=4:3$ $A:C=6:5$ $A:D=8:7$	$A:B=4:5$ $A:C=5:7$ $A:D=3:2$	$A:B=5:6$ $B:C=8:3$ $C:D=6:7$
4.	$A:B=6:7$ $B:C=5:4$ $B:D=10:9$	$A:C=8:3$ $B:C=7:6$ $B:D=14:15$	$A:D=9:8$ $B:C=7:5$ $C:D=15:16$

29. Weise nach, daß je drei der folgenden Größen eine stetige harmonische Proportion bilden

1. $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+2b}$ 2. $\frac{1}{a+(n-1)b}$, $\frac{1}{a+nb}$, $\frac{1}{a+(n+1)b}$

30. Beweise, daß das arithmetische Mittel zwischen zwei (ungleichen) Zahlen stets größer ist, als das geometrische Mittel.

---

31. Gieb folgende Verhältnisse benannter Zahlen in den kleinsten ganzen Zahlen an:

1.	3 *m.* 99 *cm.* : 4 *m.* 56 *cm.*	29 *m.* 7 *cm.* : 30 *m.* 78 *cm.*
2.	1 *m.* 2 *mm.* : 2 *m.* 83,9 *cm.*	5 *m.* 25,6 *cm.* : 7 *m.* 22,7 *cm.*
3.	4 Kg. 95 Gr. : 5 Kg. 265 Gr.	13 Kg. 923 Gr. : 14 Kg. 994 Gr.
4.	6 Pfd. 2,4 Lot : 8 Pfd. 28,4 Lot	12 Pfd. 16 Gr. : 11 Pfd. 14 Lot
5.	15 Hl. 12 L. : 23 Hl. 52 L.	10 Hl. 5 L. : 11 Hl. 39 L.

32. Suche das Verhältnis der Preise der Waren in möglichst kleinen ganzen Zahlen für folgende Fälle:

1. 2 Pfd. der ersten Ware k. 3 Mk. 6 Pf., 5 Pfd. der zweiten $10\frac{1}{5}$ Mk.
2. 7 Pfd. 3 Lot kosten 14 Mk. 12 Pf., 3 Pfd. 7 Lot kosten 7 Mk. 85 Pf.
3. 3 *m* 52 *cm* kosten 80 Mk. 80 Pf., 5 *m* 32 *cm* kosten 15 Mk. 96 Pf.
4. 2 Hl. 7 L. kosten 31 Mk. 5 Pf., 3 Hl. 6 L. kosten 48 Mk. 96 Pf.

---

33. Was versteht man unter einem geraden Verhältnis, was unter einem umgekehrten Verhältis? Gieb Beispiele für beide an. — Was heißt es: ein Verhältnis hängt ab von mehreren andern, es wird aus ihnen zusammengesetzt? Wie geschieht die Zusammensetzung? (Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens!)

34. Von zwei Arbeitern arbeitet A 28 Tage täglich 9 Stunden, B 24 Tage täglich 10 Stunden. Wie ist das Verhältnis ihrer Leistungen und ihres Lohnes?

35. A und B tragen Korn. A trägt 3 Sack, während B deren 2 fortträgt; 5 Sack von A enthalten so viel als 4 Sack von B. Wie verhalten sich die fortgeschafften Kornmengen?

36. Ein Landmann hat 20 Männer und 15 Frauen in Arbeit. Wie ist das Verhältnis der Leistung aller Männer zu der aller Frauen, wenn 4 Männer so viel beschaffen als 5 Frauen?

37. Ein Hase wird von einem Windhund verfolgt. Der Hase macht 5 Sprünge, während der Hund 3 macht; der Hund kommt aber mit 4 Sprüngen so weit, als der Hase mit 11. Wie ist das Verhältnis der Schnelligkeiten?

38. Eine Arbeit wird von 18 Arbeitern beschafft, die täglich 10 Stunden arbeiten. Eine gleiche Arbeit wird von 25 Arbeitern ausgeführt, die täglich 9 Stunden arbeiten. Wie ist das Verhältnis der Tage, welche sie zu der Arbeit gebrauchen?

39. Die langen Seiten zweier gleichen Rechtecke verhalten sich wie 57 : 76; wie die kurzen?

40. Ein Dampfhammer giebt in 7 Minuten 576 Schläge, ein anderer in 5 Minuten 864. Beim ersten schaffen 3 Schläge so viel als 7 beim zweiten. Wie ist das Verhältnis der Wirkungen in einer bestimmten Zeit?

41. Jemand hat zwei Kapitalien ausstehen, eins zu $5\frac{1}{2}$ Pzt. $1\frac{3}{4}$ Jahr, das andere zu $5\frac{1}{4}$ Pzt. 1 Jahr 10 Monate. Beide bringen in der genannten Zeit gleich viel Zinsen. Wie verhalten sich die Kapitalien?

42. Ein Kapital bringt 828 Mk. Zinsen und steht zu 4,6 Pzt.; ein anderes bringt 792 Mk. und steht zu $5\frac{1}{2}$ Pzt. Wie verhalten sich die Zeiten, wenn die Kapitalien gleich sind?

43. Zwei gleiche Kapitalien stehen auf Zinsen. Das erste bringt c Mk. Zinsen in n Jahren zu p Pzt.; das andere bringt c_1 Mk. in n_1 Jahren zu p_1 Pzt. Wie verhalten sich 1) die Zinsen, 2) die Zeiten, 3) die Prozente?

44. Zwei Kapitalien A und A_1 stehen gleich lange auf Zinsen. A bringt bei p Pzt. in der Zeit c Mk. Zinsen, A_1 bei p_1 Pzt. in derselben Zeit c_1 Mk. Wie verhalten sich 1) die Kapitalien, 2) die Zinsen, 3) die Prozente?

45. Ein Kapital A bringt in n Jahren c Mk. Zinsen, ein anderes A_1 bringt in n_1 Jahren c_1 Mk. Wie verhalten sich 1) die Kapitalien, 2) die Zeiten, 3) die Zinsen, wenn die Prozente gleich sind?

46. Ein Kapital A steht n Jahre lang zu p Pzt. aus, ein anderes n_1 Jahre zu p_1 Pzt. Wie verhalten sich 1) die Kapitalien, 2) die Zeiten, 3) die Prozente, wenn beide Kapitalien gleich viel Zinsen tragen?*)

47. Die Höhen eines Dreiecks verhalten sich wie 3 : 4 : 5. Wie verhalten sich die Seiten? $\left(\frac{1}{h} : \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2}\right)$.

48. In einem Dreieck verhalten sich die durch die Berührungspunkte des eingeschriebenen Kreises entstehenden Abschnitte der Seiten wie 4 : 5 : 6. Wie verhalten sich die Radien der drei äußeren Berührungskreise?

49. Vier Arbeiter verrichten dieselbe Arbeit bezw. in 6, 8, 9 u. 10 Tagen; wie verhalten sich ihre Leistungen?

XI.

Potenzen mit ganzen positiven Exponenten.

Eine Potenz ist ein Ausdruck von der Form a^n, welcher ein Produkt aus n gleichen Faktoren bedeutet, von denen jeder a ist. Der Ausdruck a^5 ist demnach gleich aaaaa. Er wird gelesen a in der fünften (Potenz) oder a hoch 5. Nur in der Form a^5 heißt die Größe aaaaa eine Potenz; in der Form aaaaa sollte sie nur ein Produkt heißen. Der wiederholt gesetzte Faktor heißt Basis der Potenz, die Zahl n, welche angiebt, wie oft die Basis als Faktor zu setzen ist, heißt der Exponent der Potenz oder der Potenzexponent. Nach dieser Erklärung kann der Exponent nur eine positive ganze Zahl sein. Da nun $a^3 = aaa$, $a^2 = aa$ ist, so muß $a^1 = a$ sein, d. h. eine Potenz mit dem Exponenten 1 ist gleich der Basis. Umgekehrt kann man jede Größe als eine Potenz mit dem Exponenten 1 darstellen ($a = a^1$).

Die Potenz einer Zahl suchen heißt potenzieren. Das Potenzieren ist die fünfte der Fundamentaloperationen, die erste der drei höheren Operationen. Eine Zahl a mit einer Zahl n potenzieren heißt die Potenz a^n suchen. Beim Potenzieren kommen demnach drei Größen in Betracht: die Basis, der Exponent und die Potenz. Wie sich bei der Addition die Summanden, bei der Multiplikation die Faktoren, so lassen sich beim Potenzieren Basis und Exponent nicht mit einander vertauschen. Mit Ausnahme von $2^4 = 4^2$ ist a^n niemals $= n^a$, wenn a und n von einander verschiedene ganze Zahlen sind. So ist $2^{10} = 1024$, $10^2 = 100$.

*) Alle in 43. — 46. vorkommenden Verhältnisse lassen sich sofort aus der Gleichung $Anpc_1 = A_1n_1p_1c$ ablesen. Wie erhält man diese?

Über die Rechnung mit Potenzen gelten folgende fünf Sätze:

1. $a^3 \cdot a^5 = a^8$, $\qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. $\frac{a^9}{a^4} = a^5$, $\qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$\frac{a^4}{a^9} = \frac{1}{a^5}$, $\qquad \frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$

3. $(ab)^4 = a^4 \cdot b^4$, $\qquad (ab)^n = a^n \cdot b^n$

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$, $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

5. $(a^3)^4 = a^{12}$, $\qquad (a^m)^n = a^{mn}$

Wie werden diese Sätze bewiesen, und wie heißen dieselben in Worten?

Auch folgende sehr oft gebrauchte Formeln sind zu merken (und zu beweisen):

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

---

1. $1^2 + 5^2 + 9^2 + 13^2 + 17^2 + 21^2 + 25^2 + 29^2$
2. $1^3 + 4^3 + 7^3 + 10^3 + 13^3 + 16^3 + 19^3$
3. $1^4 + 3^4 + 5^4 + 7^4 + 9^4 + 11^4$
4. $1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5$
5. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6$
6. $(-1)^1 + (-2)^2 + (-3)^3 + (-4)^4 + (-5)^5 + (-6)^6$
7. $(-1)^1 - (-2)^2 + (-3)^3 - (-4)^4 + (-5)^5 + (-6)^6$
8. $(-a)^7 + (-a)^8 + (-a)^9 + (-a)^{10} + (-a)^{11} + (-a)^{12}$
9. $4^4 + 3^4$, $\qquad 8^3 - 8^2$, $\qquad 7^5 - 6^5$
10. $3^2 - 2^3$, $\qquad 2^9 - 9^2$, $\qquad 6^5 - 5^6$
11. $(+2)^3 + (-3)^2$, $\qquad (+3)^3 + (-3)^3$, $\qquad (+2)^4 + (-2)^4$
12. $(-7)^2 - (-2)^7$, $\qquad (-3)^4 + (-4)^3$, $\qquad (-5)^2 - (-2)^5$
13. $(+5)^3 - (-3)^5$, $\qquad (-3)^4 - (+5)^3$, $\qquad (+3)^7 - (-3)^7$
14. $2^3 \cdot 3^2$, $\qquad 2^7 \cdot 7^2$, $\qquad 2^{10} \cdot 10^2$
15. $2^3 \cdot 5^4$, $\qquad 4^3 \cdot 5^6$, $\qquad 4^3 \cdot 5^4$
16. $3 \cdot 4^2 - 4 \cdot 3^2$, $\qquad 5 \cdot 4^3 - 4 \cdot 3^4$, $\qquad 7 \cdot 5^3 - 4 \cdot 3^5$
17. $6 \cdot 2^3 - 5 \cdot 3^2$, $\qquad 8 \cdot 5^2 - 4 \cdot 7^4$, $\qquad 9 \cdot 8^2 - 3 \cdot 2^8$

18. $\frac{4^2 - 3^2}{5^2 - 2^2}$, $\frac{7^2 + 4^3}{6^2 + 3^2}$, $\frac{4^3 + 3^3}{3^4 - 5^2}$

19. $\frac{7^3 + 5^3}{8^4 - 4^4}$, $\frac{3^6 - 2^6}{3^5 + 2^5}$, $\frac{2^7 - 4^3}{5^4 - 3^4}$

20. $\frac{6 . 8^2 - 8 . 6^2}{13^2 - 3^2}$, $\frac{3 . 5^2 + 2 . 3^5}{2 . 3^3 + 3 . 2^4}$, $\frac{2 . 3^6 + 3 . 2^6}{7 . 3^2 + 3 . 7^2}$

---

21. $a^7 . a^5$, $b^4 . b^3$, $c^8 . c$
22. $x^n . x^3$, $y^n . y$, $z^{n-1} . z$
23. $p^n . p^n$, $q^n . q^{5n}$, $q^{m-n} . q^n$
24. $a^3 . a^{x-4}$, $b^7 . b^{2-x}$, $c^{x-4} . c^5$
25. $p^n . p^{n-1}$, $q^{2n} . q^{3-n}$, $r^x . r^{5-2x}$
26. $a^{3+x} . a^{x-3}$, $b^{n+x} . b^{5-x}$, $c^{x-7} . c^{5+x}$
27. $x^{m-n} . x^{m+n}$, $x^{n+3} . x^{n-4}$, $y^{n-1} . y^{7-n}$
28. $g^{n-x} . g^{m+x}$, $h^{5-n} . h^{n+x}$, $k^{m+n} . k^{1-m}$
29. $x^2 . x^3 . x^4$, $x^7 . x^8 . x$, $x^n . x^{n-1} . x^{9-2n}$
30. $(-a)^3 . (-a)^4$, $(-a)^8 . (+a)^5$, $(-a)^7 . (+a)^4$
31. $(-a)^{2n} . a$, $(-a)^{2n} . (-a)$, $(-a)^{2n} . (-a)^3$
32. $(-a)^{2n+1} . (-a)$, $(-a)^{2n-1} . (+a)^3$, $(-a)^{2n-1} . (-a)^{2m+1}$
33. $2a^4 . 3b^2$, $2a^3 . 3a^2$, $5x^3 . 8x$
34. $2a^2 . 3b^3 . 7c^4$, $8x^7 . 5x^4 . 9x$, $3a^4 . 2b^3 . 5a^2$
35. $a^3b^5 . a^7b^3$, $a^4b . a^8b^3$, $a^nb^m . a^3b$
36. $a^{n-1}b^{n+1} . ab^2$, $x^2y^3 . x^{n-2}y^{n-5}$, $x^3y^3 . x^{n-2}y^{n-4}$
37. $\frac{5}{9}a^2bx . \frac{6}{7}ab^3y^2 . \frac{4}{5}a^nbx^ny$
38. $\frac{3}{4}a^nbx^3 . \frac{4}{5}ab^mx^4 . \frac{5}{6}a^2x^p$
39. $a^{m+n-7} . a^{2m-n+8} . a^{11-3m}$
40. $p^{2x-3y+5} . p^{3x+2y-5} . p^{x+6y}$
41. $(x-y)^{n-2} . (x-y)^{3-m} . (x-y)^{m-1}$
42. $a(a-b)^3 . a^{n-1}b(a-b)^{n-3} . a^2b^{n-1}$
43. $7a^2b^3 . 8a^4c^7 . 25a^{n-5}b^{n-5}c^{n-5}$
44. $a^{m-n}b^pc^{q+1} . a^{n-1}b^{n-p}c^{p-q} . a^{m+1}b^{2-n}c^{p-1}$
45. $(a-x)^{n-1}x^3y^5 . (a-x)^{n-2}x^{n-1}y . (a-x)^3x^{n-2}y^{n-5}$
46. $(-3a^2b^{n-1})(-5a^{n-3}c^{n+1})(-4abc^{x-n})$
47. $(-a)^nb^{3-x}c . (-a)^{2n-3}b^{4+x}c^{n-1} . (-a)^{4-n}b$
48. $a^nb(-x)^3 . a^2b^n(-x)^n . a^{n-2}b^{5-n}(-x)^{5-n}$

49. $\frac{a^5b^3}{13} . \frac{a^8b^4}{7}$, $\frac{x^9y^8}{10} . \frac{xy^2}{10}$

50. $\frac{a^mb^{x-2y}}{m+n} . \frac{a^nb^y}{x-y}$, $\frac{a^{5m-n}b^{7x-3y}}{3m+2n} . \frac{a^{3n-2m}b^{6y-5x}}{2x+3y}$

51. $(a - b)^3 . (b - a)^4$, $(a - b)^4 . (b - a)^3$
52. $(x - y)^n . (y - x)^4$, $(x - y)^7 . (y - x)^n$
53. $(a - b) . (b - a)^{2n-3}$, $(a - b)^5 . (b - a)^{2n-4}$
54. $(a - b - c)^{n-1} . (b + c - a)^{2n+1}$
55. $(2a + 3b^2 + 4c^3) . a^2b^2c^2$
56. $(ab + ac + bc) . a^3b^3c^3$
57. $(3a^3 - 5a^2b^3 + 7b^2) . 2ab^2$
58. $(ab^2c^3 - a^2b^3c - a^3bc^2) . a^2b^3c^4$
59. $(a^5 + a^2)(a^3 - a)$, $(p^7 - p^4)(p^5 + p)$
60. $(x^8 + x^3)(x^8 - x^3)$, $(y^9 + y^4)(y^6 - y)$
61. $(a^4 + b^3)(a^4 - b^3)$, $(a^4 + b^4)(a^3 - b^3)$
62. $(a^m + b^n)(a^m - b^n)$, $(a^m + b^m)(a^n - b^n)$
63. $(3a^2 - 2b^3)(3a^2 + 2b^3)$, $(5a^3 + 3b^2c)(5a^3 - 3b^2c)$
64. $(x^2 + a)^2$, $(a - 2x^2)^2$
65. $(a^7 - a^3)^2$, $(a^8 - a)^2$
66. $(a^m - a^n)^2$, $(2a^x - 3a^y)^2$
67. $(a - b + c)^2$, $(a + b - c)^2$
68. $(2x - 3y + 4)^2$, $(3x - 2y + z)^2$
69. $(5x^2 - 3x + 2)^2$, $(ax^2 + bx + c)^2$
70. $(a^2 - b)^3$, $(5a - 3x^2)^3$
71. $(a + b)^3 + (a - b)^3$, $(x + 1)^3 + (x - 1)^3$
72. $(m + n)^3 - (m - n)^3$, $(1 + t)^3 + (1 - t)^3$
73. $(a + b)^4$, $(a - b)^4$,
74. $(x + y)^4 + (x - y)^4$, $(x + 3)^4 + (x - 3)^4$
75. $(a + x)^4 - (a - x)^4$, $(x + 5)^4 - (x - 5)^4$
76. $(a + b)^5$, $(a - b)^5$
77. $(a + t)^5 + (a - t)^5$, $(x + 2)^5 + (x - 2)^5$
78. $(x + y)^5 - (x - y)^5$, $(2x + 3)^5 - (2x - 3)^5$

78_1. $(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a+c-b)^2 + (b+c-a)^2$

78_2. $(a + b + c - x)^2 + (a + b + x - c)^2 + (a + c + x - b)^2 + (b + c + x - a)^2$

79. $(a^4 - a^2b^2 + b^4)(a^2 + b^2)$
80. $(x^4 - x^2y^2 + y^4)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$
81. $(x^9 + x^6 + x^3 + 1)(x^3 - 1)$
82. $(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1)(x^2 + 1)$
83. $(2a^2 - 3b^3 + 4c^4)(4a^2 + 2b^3 - 3c^4)$
84. $(6a^2 - 11ab + 3b^2)(9a^2 - 3ab - 2b^2)$
85. $(7a^2 + ab - 6b^2)(6a^2 - ab - 5b^2)$
86. $(a^8 + a^6b^2 + a^4b^4 + a^2b^6 + b^8)(a^2 - b^2)$

87. $(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)(a + b)$
88. $(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)(a - b)$
89. $(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3)(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)$
90. $(16a^4 - 48a^3b + 108a^2b^2 - 108ab^3 + 81b^4)(4a^2 + 12ab + 9b^2)$
91. $(81a^4 - 54a^3b - 24ab^3 + 16b^4)(9a^2 + 6ab + 4b^2)$
92. $x^5 - 2x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + 2xy^4 - y^5$ zu multiplizieren mit $x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4$
93. $x^6 + 3x^5y + 6x^4y^2 + 7x^3y^3 + 6x^2y^4 + 3xy^5 + y^6$ zu multiplizieren mit $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
94. $(x^8 + x^7y + x^6y^2 + x^2y^6 + xy^7 + y^8)(x^4 - x^3y + xy^3 - y^4)$
95. $(a^{3n} + a^{2n}b + a^nb^2 + b^3)(a^n - b)$
96. $(a^n + b^m - c)(a^n - b^m + c)$
97. $(a^{2m-n} + a^m + a^n + a^{2n-m})(a^m - a^n)$
98. $(a^{3m-n} - a^{2m} + a^{m+n} - a^{2n} + a^{3n-m})(a^m + a^n)$
98_1. $(3a^nb^{2-x} - 5a^{n-1}b + 9a^{n-2}b^x)(4a^2b + 7ab^x)$
98_2. $(2a^2b^{x+1} - 3a^nb^3 + 4a^{2n-2}b^{5-x})(5ab^x + 6a^{n-1}b^2)$
99. $(a+b+c)^3 + (a-b-c)^3 + (b-a-c)^3 + (c-a-b)^3$
100. $(a + b + c)^3 - 3(ab + ac + bc)(a + b + c)$
101. $(ax^3 - (a + b)x^2 + (a + b + c)x - (a + c))(x + 1)$
102. $(ax^4 + (a - b)x^3 + (a - b + c)x^2 + (a - b)x + a)(x - 1)$
103. $(2x^4 - (1 - a)x^3 + (1 - a + b)x^2 - (1 - a)x + 2)(x + 1)$

---

104. $\frac{a^8}{a^3}$, $\frac{a^{13}}{a^7}$, $\frac{a^{15}}{a^8}$ 105. $\frac{a^8}{a}$, $\frac{a^n}{a^4}$, $\frac{a^n}{a}$
106. $\frac{a^7}{7}$, $\frac{a^n - 1}{n - 1}$, $\frac{x^5}{5x}$ 107. $\frac{a^5}{a^{12}}$, $\frac{a^{12}}{a^5}$, $\frac{a}{a^{11}}$
108. $a^5 : a$, $a^7 : a^9$, $a^4 : 4a$ 109. $a^n : a$, $a : a^n$, $a^n : na$
110. $x^3 : x^n$, $x^2 : x^{n+1}$, $x : x^n$ 111. $x^{n+1} : 2x$, $x^{n-1} : x$, $x : x^{n+2}$
112. $\frac{a^{x-1}}{a}$, $\frac{a^{x+1}}{a}$, $\frac{a^3}{a^{x+2}}$ 113. $\frac{x}{x^{n-1}}$, $\frac{x^2}{x^{n-2}}$, $\frac{x^{n+1}}{x^3}$
114. $\frac{a^{x+3}}{a^7}$, $\frac{a^{n-2}}{a^3}$, $\frac{a}{a^{n-5}}$ 115. $\frac{x^3}{x^{n-4}}$, $\frac{x^5}{x^{5-n}}$, $\frac{x^7}{x^{5+n}}$
116. $\frac{b^8}{b^{8-x}}$, $\frac{b^x}{b^{x-1}}$, $\frac{e^x}{c^{x+1}}$ 117. $\frac{a^{2n}}{a^{n-x}}$, $\frac{h^{x+n}}{h^{2x}}$, $\frac{k^{x+1}}{k^{x-1}}$
118. $\frac{m^{x-1}}{m^{x-2}}$, $\frac{n^{x-5}}{n^{x+1}}$, $\frac{p^{x-2}}{q^{x+3}}$ 119. $\frac{a^{3+x}}{a^{x-3}}$, $\frac{a^{4+x}}{a^{5+x}}$, $\frac{a^{n-1}}{a^{1-n}}$
120. $\frac{a^{n-1}}{b^{n+1}}$, $\frac{a^{n-x}}{a^{x-n}}$, $\frac{a^{x+n}}{a^{x-n}}$ 121. $\frac{a^{x+1}}{a^{5-x}}$, $\frac{a^{x+2}}{a^{7-5x}}$, $\frac{a^{5-x}}{a^{3-2x}}$
122. $\frac{a^{8+x}}{a^{13-x}}$, $\frac{a^{x+5}}{a^{5-2x}}$, $\frac{a^{7+2x}}{a^{3x-7}}$ 123. $\frac{a^{m+1}}{a^{1-n}}$, $\frac{a^{1-m}}{a^{n+1}}$, $\frac{a^{n-x}}{a^{n-1}}$

124. $\frac{a^{2x+3y}}{a^{3x+2y}}$, $\frac{a^{3x-2y}}{a^{2x-3y}}$, $\frac{a^{2x-y}}{a^{x-n}}$ 125. $\frac{a^8 b^3}{a^3 b^8}$, $\frac{a^7 b}{a b^2}$, $\frac{a^6 b}{a^2 b^5}$

126. $\frac{a^9 b^9}{a^4 b^4}$, $\frac{a^7 b^3}{a^3 b^7}$, $\frac{a^4 b^4}{a^6 b^6}$ 127. $\frac{a^n b}{a b^m}$, $\frac{a^n b^3}{a^3 b^m}$, $\frac{a^m b^{m-1}}{a^n b^{n-1}}$

128. $\frac{a^{m+1} b^{n+1}}{a^m b^n}$, $\frac{a^{m-1} b^{n-1}}{a^m b^n}$, $\frac{a^{m+1} b}{a b^{n+1}}$

129. $\frac{a^{x+1} b^n}{(x+1) b^{n-1}}$, $\frac{a^{m+n} b^{m-n}}{(m-n) a^n b^m}$, $\frac{a^m b^{n+1}}{(a+b) a b}$

130. $\frac{(a-1)^3 (x-1)^4}{(a-1)^4 (1-x)^3}$, $\frac{a^5 (x-y)^2}{a (y-x)^5}$, $\frac{a^3 (x+y)^2}{a (x-y)}$

131. $\frac{a^n b^n (b-1)}{a^{n-1} b^{n-2} (1-b)^2}$, $\frac{a^2 b^2 (a-b)^5}{(a^2+b^2)(b-a)^4}$, $\frac{a^2-b^3}{b^2-a^3}$

132. $\frac{2a^3x^5}{3b^2y^4} \cdot \frac{6ay^3}{5bx^4} \cdot \frac{by}{a^2x^2}$ 132_1. $\frac{4a^7b^4}{5c^4d^3} \cdot \frac{15bc^3}{8a^6d^2} \cdot \frac{2cd}{3ab}$

133. $\frac{2a^2b^3c}{3x^2y^3} \cdot \frac{a^m b^n c^r}{x^m y^n} \cdot \frac{6x^{m-1} y^{n-2}}{a^{m+1} b^{n+2} c^{r+3}}$

134. $\frac{9a^2b^3}{8x^3y^n} \cdot \frac{10a^{n-1} x^{n+2}}{21b^{m+3} y^{m-n}} \cdot \frac{x}{a}$ 135. $\frac{3a^3c^n}{7x^3b^n} \cdot \frac{49x^{n-1} b^{n+2}}{9a^{n+5} c^{n+1}} \cdot \frac{a^2x^4}{c}$

136. $\frac{a^{x-1} b^{x-2} c^{x-3}}{x^{n-1} y^{n+2} z^{n-3}} \cdot \frac{x^{n+1} y^{n-2} z^{n+4}}{a^{x-2} b^{x+1} c^{x-1}} \cdot \frac{a^2c^2}{b^2x^2}$

137. $\frac{a^{m-n} b^{n-p} c^{p-m}}{x^{n-p} y^{p-m} z^{m-n}} \cdot \frac{a^{n-p} b^{p-m} c^{m-n}}{x^{p-1} y^{m-2} z^{n-3}} \cdot \frac{x^n y^p z^m}{a^m b^n c^p}$

138. $\frac{2a^3b^7c^4}{3x^3y^4z^3} : \frac{4a^2b^8c^5}{5xy^5z^4}$ 139. $\frac{4a^5x^3y}{5b^3cz^4} : \frac{8a^6xy^4}{3bc^2z^5}$

140. $\frac{5a^n b^{n-1} c^{n-2}}{6x^{n+1} y^{n+2} z^{n+3}} : \frac{3a^{n-1} b c^{n+1}}{2x y^n z^{n+1}}$

141. $\frac{5a^5b^3c^{n+1}}{6x^3 y^n z^{n+4}} : \frac{3a^6b^4c}{8x^4 y z^{n-1}}$

142. $\frac{a^{2x-3y} a^{3y-5}}{a^{5-3x} a^{7-2y}} : \frac{a^{5x+3y-10}}{a^{x+y+10}}$

143. $\frac{a^{3x-y} b^{2y-3x}}{a^{3y-2x} b^{5x-2y}} : \frac{a^{7x-3y} b^{7y-6x}}{a^{3x+2y} b^{3x+2y}}$

144. $(ax^7 + bx^3) : x^5$ 145. $(ax^{2m} + bx^{2n}) : x^{m+n}$

146. $(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) : x^4$

147. $(ax^m + bx^n + cx^{m+n}) : x^{m-n}$

148. $(3a^2b^3 + 2a^3c + 4a^3c^4) : 6a^3b^3c^3$

149. $(10x^4y^3z^5 + 15x^2y^4z - 6xy^2z^4) : 30x^2y^3z^4$

150. $(a^{3x-4y} + a^{2y-3x} + a^{3(x-y)}) : a^{4x-5y}$

151. $(6a^3 + 5a^2b - 13ab^2 - 12b^3) : (3a + 4b)$

152. $(15a^3 + a^2b - 31ab^2 + 15b^3) : (5a - 3b)$

153. $(9a^4 - 58a^2b^2 + 49b^4) : (3a^2 - 4ab - 7b^2)$

154. $(144a^4 - 289a^2b^2 + 100b^4) : (12a^2 + 7ab - 10b^2)$

155. $(12a^4 - a^3b - 32a^2b^2 + ab^3 + 20b^4) : (4a^2 + ab - 5b^2)$

156. $(a^6 - b^6) : (a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)$

157. $(a^8 - b^8) : (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

158. $(a^8 - b^8) : (a^5 + a^4b + ab^4 + b^5)$

159. $(a^9 - 3a^6b^3 + 3a^3b^6 - b^9) : (a^4 - a^3b - ab^3 + b^4)$

160. $(64a^6 + 432a^3b^3 + 729b^6) : (4a^2 + 12ab + 9b^2)$

161. $(x^{2m} - y^{2n}) : (x^m - y^n)$ $\quad$ $(x^{3m} + y^{3n}) : (x^m + y^n)$ [162]

162. $(x^{4m} - y^{4n}) : (x^m + y^n)$ [163] $\quad$ $(x^n - y^n) : (x - y)$

163. $\frac{x^4 - 1}{x - 1}$, $\frac{a^4 - b^4}{a + b}$, $\frac{a^4 + b^4}{a + b}$ $\quad$ $\frac{a^5 + b^5}{a + b}$, $\frac{a^5 - b^5}{a - b}$, $\frac{x^5 + 1}{x + 1}$

164. $\frac{a^6 + b^6}{a^2 + b^2}$, $\frac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2}$, $\frac{a^6 - b^6}{a - b}$ $\quad$ $\frac{x^6 + 1}{x + 1}$, $\frac{x^6 - 1}{x - 1}$, $\frac{x^6 - 1}{x + 1}$

---

165. $(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2$ *) $\quad$ $x^4 + x^2y^2 + y^4$

165_1. $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$, $\frac{a + b}{a - b} - \frac{a - b}{a + b}$ $\quad$ $\frac{x^n}{y^p} - \frac{y^p}{x^n}$, $\left(\frac{x}{y}\right)^n - \left(\frac{y}{x}\right)^n$

165_2. $\frac{x^2}{y^2} + 1 + \frac{y^2}{x^2}$ $\quad$ $\frac{x^3}{y} + xy + \frac{y^3}{x}$

165_3. $\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}$, $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}$ $\quad$ $\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}$, $\frac{a^3}{b} - \frac{b^3}{a}$

165_4. $a^5 \pm b^5$, $x^5 \pm 1$ $\quad$ $a^6 \pm b^6$, $x^6 \pm 1$

165_5. $ax^n + bx^{n+1} + cx^{n+2}$ $\quad$ $ax^n + bx^{n+p} + cx^{n+r}$

165_6. $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2}$ $\quad$ $ax^n + bx^{n-p} + cx^{n-r}$

165_7. $x^{n+1} - 2x^n + x^{n-1}$ $\quad$ $x^{n-p} - x^{n+p}$

165_8. $x^{n+2} + x^n + x^{n-2}$ $\quad$ $6x^{n+2} - 13x^n + 6x^{n-2}$

165_9. $3x^{p+n} - 10x^p + 3x^{p-n}$ $\quad$ $2x^{2n} + 5x^{n+p} + 2x^{2p}$

---

166. $\frac{(a^2 - x^2)^2 - (x^2 - b^2)^2}{(a^2 - y^2)^2 - (y^2 - b^2)^2}$ **) $\quad$ $\frac{(a^2 + ab)^2 - (ab + b^2)^2}{(a^2 - ab)^2 - (ab - b^2)^2}$

166_1. $\frac{a^5b - ab^5}{a^3b^2 - a^2b^3}$, $\frac{a^6b^2 - a^2b^6}{a^5b^3 + a^3b^5}$ $\quad$ $\frac{a^4b + ab^4}{a^3b^2 + a^2b^3}$, $\frac{a^5b^2 - a^2b^5}{a^4b^3 - a^3b^4}$

166_2. $\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{(x + y)(x^3 + y^3)}$ $\quad$ $\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{(x - y)(x^3 - y^3)}$

---

*) Nr. 165—165_9 sollen in Faktoren zerlegt werden.
**) Nr. 166—166_9 sollen gehoben werden.

166₃. $\frac{a^4 + ab(a^2+b^2) + b^4}{a^4 + a^2b^2 + b^4}$ $\qquad$ $\frac{x^4 - y^4}{(x+y)(x^3-y^3)}$

166₄. $\frac{(a^3+b^3)(a^2+ab+b^2)}{(a^3-b^3)(a^2-ab+b^2)}$ $\qquad$ $\frac{(a+b)(a^3-b^3)}{(a-b)(a^3+b^3)}$

166₅. $\frac{a^6 - b^6}{a^4 + a^2b^2 + b^4}$ $\qquad$ $\frac{x^6 + y^6}{x^4 - x^2y^2 + y^4}$

166₆. $\frac{a^{n+1} - a^{n-1}}{a^{p+1} - a^{p-1}}$ $\qquad$ $\frac{a^{x+2} - a^{x-2}}{a^{n+1} - a^{n-1}}$

166₇. $\frac{x^{n+2}y^{n-2} - x^{n-2}y^{n+2}}{x^{n+1}y^{n-1} - x^{n-1}y^{n+1}}$ $\qquad$ $\frac{a^{n+x}b^{n-x} - a^{n-x}b^{n+x}}{a^{p+x}b^{p-x} - a^{p-x}b^{p+x}}$

166₈. $\frac{x^{n+2} + x^n + x^{n-2}}{x^{p+2} - x^{p+1} - x^{p-1} + x^{p-2}}$ $\qquad$ $\frac{x^{n+2} - 2x^n + x^{n-2}}{x^{n+2} - x^{n+1} + x^{n-1} - x^{n-2}}$

166₉. $\frac{x^n + x^{n-1} - 2x^{n-2}}{x^p + 2x^{p-1} - 3x^{p-2}}$ $\qquad$ $\frac{3x^{n+1} - 10x^n + 3x^{n-1}}{3x^{n+1} - 8x^n - 3x^{n-1}}$

---

167. $\frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x}$ *) $\qquad$ $\frac{1}{x^3} + \frac{1-x}{x^4}$

167₁. $\frac{1-x^3}{x^5} + \frac{1}{x^2}$ $\qquad$ $\frac{1-x^5}{x^7} + \frac{1}{x^2}$

167₂. $\frac{1-x^2}{x^6} + \frac{1-x^2}{x^4} + \frac{1}{x^2}$ $\qquad$ $\frac{1-x^2}{x^8} + \frac{1+x}{x^6} - \frac{1}{x^5}$

167₃. $\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}}$ $\qquad$ $\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^{n-p}}$

167₄. $\frac{1+x}{x^n} - \frac{1-x}{x^{n-1}} - \frac{1}{x^{n-2}}$ $\qquad$ $\frac{1-2x^2}{x^p} + \frac{2-3x^2}{x^{p-2}} + \frac{3}{x^{p-4}}$

167₅. $\frac{a}{x^n} + \frac{b}{x^{n-1}} + \frac{c}{x^{n-2}} + \frac{d}{x^2} + \frac{e}{x} + f$

167₆. $\frac{a}{p^{x-m}} + \frac{b}{p^{x-n}} + \frac{c}{p^{x-r}} + \frac{d}{p^x} + e$

167₇. $\frac{y^2}{(x-y)^n} + \frac{x}{(x-y)^{n-1}} - \frac{1}{(x-y)^{n-2}}$

167₈. $\frac{x^n}{(x+y)^n} + \frac{2x^{n-1}}{(x+y)^{n-1}} - \frac{x^{n-2}}{(x+y)^{n-2}}$

167₉. $\frac{a^x - b^y}{a^x + b^y} + \frac{a^x + b^y}{a^x - b^y}$, $\frac{x^m + y^n}{x^m - y^n} - \frac{x^m - y^n}{x^m + y^n}$

---

168. $\frac{15^3}{5^3}$, $\frac{24^4}{8^4}$, $\frac{30^2}{6^2}$, $\qquad$ 169. $\frac{20^4}{15^4}$, $\frac{36^3}{60^3}$, $\frac{91^3}{78^3}$,

---

*) Nr. 167—167₉ sollen gleichnamig gemacht werden.

170. $\frac{28^3}{21^2}$, $\frac{32^4}{48^3}$, $\frac{54^5}{72^4}$, 171. $\frac{25^3 \cdot 72^2}{9^3 \cdot 20^4}$, $\frac{18^4 \cdot 30^5}{27^4 \cdot 15^3}$, $\frac{28^3 \cdot 45^4}{36^4 \cdot 35^3}$,

172. $2^6 \cdot 5^6$, $6^4 \cdot 5^4$, $8^2 \cdot 5^2$

173. $25^4 \cdot 4^4$, $125^2 \cdot 8^2$, $35^3 \cdot 8^3$

174. $(1\frac{1}{2})^4 \cdot (6\frac{2}{3})^4$, $(1\frac{1}{3})^3 \cdot (1\frac{1}{2})^3$, $(7\frac{1}{2})^5 \cdot (1\frac{1}{3})^5$

175. $(-ab)^2 \cdot (ab)^{n-2} \cdot (-a)^3$

176. $(-ax)^4 \cdot (-by)^3 \cdot (abxy)^{n-3}$

177. $(ab)^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^3$

177_1. $\left(\frac{6a}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{b}{4a}\right)^2 \cdot \frac{b^2}{(3a)^3}$

178. $(-\frac{2}{3}ab)^5 \cdot \left(\frac{6a}{5b}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3b}{8a}\right)^3$

179. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{c}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^4$ 180. $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{x}\right)^n$

181. $\left(\frac{a^2}{x^3}\right)^n \cdot \left(\frac{c^2}{y^3}\right)^n \cdot \left(\frac{x^2y^3}{ac^2}\right)^n$ 182. $\left(\frac{ax}{by}\right)^2 \cdot \left(\frac{bx}{cy}\right)^3 \left(\frac{cy}{ax}\right)^5$

183. $\frac{(3xy)^2 \cdot (4xz)^3 \cdot (5yz)^4}{(25xyz)^2 \cdot (6xyz)^3}$ 183_1. $\frac{(6abx)^3 \cdot (10aby)^4}{(4ab)^4 \cdot (3ax)^3 (25by)^2}$

184. $\left(\frac{a+b}{x+y}\right)^3 \cdot \left(\frac{a-b}{x-y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}\right)^2$

185. $\left(\frac{a-x}{x-y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x-b}{x-a}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{b^2-x^2}\right)^2$

186. $\left(\frac{m-n}{m-p}\right)^4 \cdot \left(\frac{n-p}{n-m}\right)^4 \cdot \left(\frac{p-m}{p-n}\right)^4$

---

187. $(a^2)^3$, $(b^3)^4$, $(x^4)^n$

188. $(a^n)^p$, $(a^3)^{x-1}$, $(x^{n+1})^4$

189. $(-a^3)^2$, $(-a^2)^3$, $(-a^3)^5$

190. $(-a^3)^{2n}$, $(-a^{2n})^3$, $(-a^{2n-1})^{2n}$

191. $(-a^2)^{2n-1}$, $(-a^{2n-1})^2$, $(-a^{2n})^{2n-1}$

192. $(a^4b^2)^5$, $(a^5b^7)^8$, $(x^ny)^3$

193. $(2a^2b^3)^4$, $(3ab^{n-2})^5$, $(7a^2x^{n-1}y^r)^3$

194. $\left(\frac{a^2b^3}{x^3y^4}\right)^5$, $\left(\frac{3ab^5}{2x^2y}\right)^4$, $\left(\frac{4a^4b^n}{3x^2y^{n-1}}\right)^5$

195. $\frac{(a^2x^4)^4}{(ax)^{10}}$, $\frac{(a^2)^3 \cdot (b^3)^2}{(ab)^5}$, $\frac{(a^3b^4)^2}{(a^2b^3)^3}$

196. $\frac{(2^3)^5}{4^4}$, $\frac{(3^3)^3}{9^4}$, $\frac{(3^3)^5}{27^{13}}$ 196$_1$. $\frac{(3 . 4^2)^3}{12^4}$, $\frac{(6^2)^3}{(4 . 3^3)^2}$, $\frac{(8^2 . 5^3)^3}{20^9}$

197. $\left(\frac{2a^3 b^2}{3xy^4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3x^2 y}{5a^2 b}\right)^3 \cdot \left(\frac{5ay^2}{2bx^2}\right)^2$

198. $\frac{3(2a^2 b^3)^2}{4(3x^3 y^2)^3} \cdot \frac{7(3x^4 y^3)^2}{5(2ab^2)^3}$ 198$_1$. $\frac{2(4a^3b^2c^2)^2}{3(6x^2y^3z^4)^3} \cdot \frac{6(3xy^2z^3)^4}{5(2a^2bc)^3}$

198$_2$. $\left(\frac{4a^{n-1}b^3c^{3-x}}{9x^2y^{3n-2}z^6}\right)^2 : \left(\frac{2a^nb^2c^{2-x}}{3xy^{2n-1}z^4}\right)^3$

Untersuche, welchen gemeinschaftlichen Faktor Zähler und Nenner in folgenden Brüchen haben, und hebe durch diesen Faktor.

199$_1$. $\frac{2x^3 - x^2 + 2x + 5}{3x^3 - x^2 + 3x + 7}$ 199$_2$. $\frac{2x^3 + 3x^2 + 4x - 3}{6x^3 + 5x^2 + 6x - 5}$

199$_3$. $\frac{x^4 + x^3 - 2x + 8}{2x^4 + 3x^3 - 9x + 4}$ 199$_4$. $\frac{6x^4 - 5x^3 - 20x^2 + 1}{4x^4 - 17x^2 - 10x + 3}$

Entwickele folgende Brüche in unendliche Reihen, die sechs ersten nach steigenden, die sechs folgenden nach fallenden Potenzen von x. Dies kann geschehen durch einfache Division, oder durch Anwendung der unbestimmten Koefficienten, oder bei einfachem Nenner auch mit Hülfe der bekannten Entwickelungen von $\frac{1}{1+x}$ und $\frac{1}{1-x}$.

200$_1$. $\frac{a}{b + cx}$ 200$_2$. $\frac{1}{3 - 2x}$ 200$_3$. $\frac{ax + 1}{bx + 1}$

200$_4$. $\frac{x}{(1 - x)^2}$ 200$_5$. $\frac{x + x^2}{(1 - x)^3}$ 200$_6$. $\frac{x(1 + x)^2}{(1 - x)(1 + x^2)}$

200$_7$. $\frac{a}{cx - b}$ 200$_8$. $\frac{6}{3x + 2}$ 200$_9$. $\frac{x + a}{x + b}$

200$_{10}$. $\frac{5 - 2x - x^2}{1 - x^3}$ 200$_{11}$. $\frac{ax - b}{1 + x + x^2}$ 200$_{12}$. $\frac{x}{(x - 1)^3}$

Entwickele folgende Quadrate und Kuben unendlicher Reihen bis auf sieben Glieder.

201$_1$. $(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdot \cdot)^2$

201$_2$. $(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \cdot \cdot)^2$

201$_3$. $(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + \cdot \cdot)^2$

201$_4$. $(a - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + a_4 x^4 - a_5 x^5 + a_6 x^6 - \cdot \cdot)^2$

201$_5$. $(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + \cdot \cdot)^2$

201$_6$. $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdot \cdot)^3$

201$_7$. $(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \cdot \cdot)^3$

Verwandle folgende unendliche Reihen in unendliche Produkte.

202_1. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdot\cdot$

202_2. $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdot\cdot$

202_3. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \cdot\cdot$

202_4. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \cdot\cdot$

Berechne die Summen folgender unendlichen Reihen für die angegebenen Werte von x, die der ersten sechs auf sieben, die der letzten auf zwölf Decimalen.

203_1. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ für 1) 0,2, 2) 0,3, 3) $\frac{1}{7}$, 4) $\frac{3}{16}$

203_2. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ für 1) $\frac{1}{9}$, 2) $\frac{1}{19}$, 3) $\frac{1}{89}$,

203_3. $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 \cdots$ für 1) $\frac{1}{51}$, 2) $\frac{1}{46}$

203_4. $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdot\cdot$ für 1) 0,1, 2) 1

203_5. $x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdot\cdot$ für $\frac{3}{172}$ *)

203_6. $1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots$ für $\frac{3}{172}$

203_7. $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdot\cdot$ für 1) $\frac{1}{2}$, 2) $\frac{1}{5}$, 3) $\frac{1}{8}$, 4) $\frac{1}{18}$, 5) $\frac{1}{70}$, 6) $\frac{1}{99}$, 7) $\frac{1}{307}$.

Bezeichnet man die Summen, welche aus der letzten Reihe für die angegebenen Werte von x entstehen, entsprechend mit F_2, F_5, F_8 u. s. w., so hat man

$$\frac{\pi}{4} = F_2 + F_5 + F_8, \text{ oder}$$

$$\frac{\pi}{4} = 12F_{18} + 3F_{70} + 5F_{99} + 8F_{307}.$$

Berechne $\frac{\pi}{4}$ und somit auch π auf diese Weise bis auf 12 Decimalen.

204_1. Wie wird man folgende dekadische Zahlen im heptadischen Zahlensystem schreiben: 12, 21, 37, 49, 70, 87, 100, 700, 8941?

204_2. Wie werden die Zahlen 17, 25, 50, 111, 333, 527 im pentadischen Zahlensystem heißen?

204_3. Wie heißen die Zahlen 7, 9, 27, 40, 100 im triadischen System?

204_4. Wie werden umgekehrt die Zahlen 27, 71, 100, 555, 1574, welche dem oktadischen Zahlensystem entnommen sind, im dekadischen System heißen?

---

*) Diese und die folgende Reihe liefern für den angegebenen Wert von x den Sinus von 1° bis auf 0,00001, den Cosinus von 1° bis auf 0,0000005 richtig.

204_5. Welche Werte haben die dem tetradischen System angehörigen Zahlen 13, 123, 300, 333, 1023?

204_6. Desgleichen die dem dyadischen System angehörigen Zahlen 11, 111, 1011, 1001001, 1011101?

XII.

Potenzen mit ganzen negativen Exponenten.

Wenn man die Reihen

$$\begin{array}{cccc} aaaa & aaa & aa & a \\ a^4 & a^3 & a^2 & a^1, \end{array}$$

deren entsprechende Glieder einander gleich sind, nach demselben Bildungsgesetz*) weiter führt, so erhält man

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{aa} & \frac{1}{aaa} & \frac{1}{aaaa} & \text{u. s. w.} \\ a^0 & a^{-1} & a^{-2} & a^{-3} & a^{-4} & \text{u. s. w.} \end{array}$$

Hat man daher einmal das Zeichen a^4 für aaaa, das Zeichen a^3 für aaa u. s. w. eingeführt, so wird es jedenfalls vorteilhaft sein, auch die Zeichen a^0, a^{-1}, a^{-2} u. s. w. einzuführen, damit man nicht erst jedesmal zu untersuchen hat, ob der Exponent positiv ist. Dann kann man aber, falls man nicht eine große Konfusion in die Rechnung bringen will, diesen Zeichen konsequenter Weise keine andere Bedeutung beilegen, als a^0 muß 1, a^{-1} muß $\frac{1}{a}$, a^{-2} muß $\frac{1}{aa}$ oder $\frac{1}{a^2}$, a^{-3} muß $\frac{1}{aaa}$ oder $\frac{1}{a^3}$ u. s. w. bedeuten**). Es muß demnach, falls die Rechnung auf den Exponenten 0 oder einen negativen Exponenten führt, sein

1. $a^0 = 1$

2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, oder

3. $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Drücke diese Formeln in Worten aus.

---

*) In der Reihe oben entsteht das folgende Glied aus dem vorhergehenden durch Division mit a, in der zweiten dadurch, daß man den Exponenten um 1 vermindert.

**) Von einem Beweise kann hier nicht die Rede sein. Es ist nur eine Ausdehnung der Bezeichnung, welche auf Potenzen mit negativen Exponenten führt, wie man das Zahlensystem über die Einer hinaus fortsetzt und auf Decimalstellen kommt, oder wie man sich die positiven Zahlen über Null hinaus abnehmend denkt und die negativen Zahlen erhält.

Da die Ausdrücke a^{-n} und a^0, die jetzt eine bestimmte Bedeutung haben, welche aus der Bedeutung von a^n folgt, n als positive ganze Zahl genommen, von derselben Form sind, wie a^n, so nennt man sie ebenfalls Potenzen. Man unterscheidet daher Potenzen mit positiven Exponenten, Potenzen mit negativen Exponenten und Potenzen mit dem Exponenten 0.

Darnach ist eine Potenz ein Ausdruck von der Form a^n, der für ein positives ganzes n ein Produkt aus n Faktoren bedeutet, von denen jeder a ist, für ein negatives n einen Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner dieselbe Potenz mit positivem Exponenten ist, für den Exponenten 0 gleich 1 sein muß. Wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist wieder eine besondere Betrachtung und eine neue Definition nötig, welche sich aus der ursprünglichen ergiebt.

Die Potenzen mit negativen Exponenten und dem Exponenten 0 sind denselben Gesetzen unterworfen, wie die Potenzen mit positiven Exponenten. Der Beweis ist leicht zu führen, im Grunde jedoch ebenso überflüssig, wie der Beweis für die Richtigkeit der Rechnung mit Decimalbrüchen, wenn die Richtigkeit der Rechnung mit ganzen Zahlen bewiesen ist.

Bei den folgenden Aufgaben sollen die Resultate stets in ihrer einfachsten Form dargestellt werden. Dahin gehört besonders, daß sie keine Potenzen mit negativen Exponenten oder mit dem Exponenten Null enthalten. Sind Operationen auszuführen, so sollen diese so viel als möglich zuerst ausgeführt und dann erst die Umformung, wenn eine solche nötig ist, vorgenommen werden.

1.	$a^4 \cdot a^0$,	$a^0 \cdot x^0$,	$3a^0$
2.	$4(a-b)^0$,	$5^0 \cdot (x-y)$,	$7^0 \cdot (x+y)^0$
3.	$(a^0)^n$,	$(a^n)^0$,	$(a^0)^0$
4.	1^0,	1^n,	1^{-n}
5.	$1^x \cdot 1^y$,	$1^x \cdot 1^0$,	$1^n \cdot a^0$
6.	$9 \cdot 3^{-2}$,	$8 \cdot 2^{-2}$,	$16 \cdot 4^{-3}$
7.	$9^2 \cdot 3^{-5}$,	$25^3 \cdot 5^{-4}$,	$96 \cdot 2^{-6}$
8.	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$,	$5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$,	$8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$
9.	$\frac{1}{4^{-2}}$,	$\frac{1}{3^{-3}}$,	$\frac{1}{2^{-5}}$
10.	$\frac{5}{2^{-1}}$,	$\frac{8}{5^{-3}}$,	$\frac{25}{4^{-4}}$
11.	$(0{,}2)^{-1}$,	$(0{,}5)^{-2}$,	$(1{,}5)^{-2}$
12.	$(-0{,}1)^{-2}$,	$9 \cdot (4{,}5)^{-1}$,	$10 \cdot (2{,}5)^{-1}$
13.	x^{-n},	$\left(\frac{1}{x}\right)^{-n}$,	$\left(\frac{a}{x}\right)^{-n}$
14.	x^{-1},	$\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$,	$\left(\frac{5}{x}\right)^{-2}$

15. $3\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$, $a\left(\frac{a}{x}\right)^{-1}$, $\frac{1}{x}\left(\frac{m}{x}\right)^{-1}$

16. $\frac{1}{a^{-1}}$, $\frac{1}{a^{-n}}$, $\frac{a}{b^{-n}}$

17. $\frac{1}{a^0}$, $\frac{a^0}{b^{-n}}$, $\frac{a^{-n}}{x^0}$

18. $ax^{-4} + bx^{-3} + cx^{-2} + dx^{-1} + ex^0$

19. $\frac{a}{x^{-4}} + \frac{b}{x^{-3}} + \frac{c}{x^{-2}} + \frac{d}{x^{-1}} + \frac{e}{x^0}$

20. $a^5 \cdot a^{-5}$, $b^{-4} \cdot b^{-7}$, $c^7 \cdot c^{-8}$

21. $p^8 \cdot p^{-5}$, $q^{-11} \cdot q^9$, $r^{12} \cdot r^{-10}$

22. $x^m \cdot x^{-n}$, $y^m \cdot y^{-3}$, $z^{n+3}\, z^{-5}$

23. $a^{-3}x \cdot a^{-5}y$, $a^{-7}x \cdot a^5x^{-2}$, $8a^{-4} \cdot 3a^3$

24. $5ax^{-6} \cdot \frac{1}{2}bx^2$ 25. $\frac{3}{2}mx^{-n} \cdot \frac{4}{5}px^{n-4}$

26. $\frac{3}{2}x^3y^4 \cdot \frac{5}{6}x^{-2}y \cdot \frac{4}{3}xy^{-6}$

27. $(-7a^{-3}b^{-2})(-4a^2b^{-1})(-a^2b^2x^{-1})$

28. $(-3\frac{1}{3}a^{-5}b^2c^{-n})(-2\frac{2}{5}a^4b^{-3}c^{n-1})$

29. $3\frac{1}{2}a^{-n}b^{-x}c^y \cdot \frac{5}{7}a^{n-1}b^{x-2}c^{-y}$

30. $(x + y)^{-n}p^3q^2 \cdot (x + y)^{n-2}p^{-1}q^{n-2}$

31. $(a - x)^{-3} \cdot (x - a)^2$, $(1 - x)^{-4}(x - 1)^5$

32. $\frac{a^8}{a^{-3}}$, $\frac{b^{-4}}{b^{-9}}$, $\frac{c^{-8}}{c^{-5}}$

33. $\frac{a^{-5}}{a^{11}}$, $\frac{b^{-5}}{b^{-11}}$, $\frac{x^5}{x^{-11}}$

34. $\frac{a^m}{a^{-n}}$, $\frac{b^{n-3}}{b^{-5}}$, $\frac{x^{-n}}{x^{n-2}}$

35. $\frac{a^{-2}b^3}{x^4y^{-5}}$, $\frac{ab^{-4}}{x^{-1}y^0}$, $\frac{a^{-3}b^{-m}}{x^{-4}y^{-n}}$

36. $\frac{2a^0b^{-1}c^{-2}}{3x^0y^{-1}z^{-2}}$, $\frac{4a^3b^{-5}c^0}{x^{-4}yz^{-1}}$, $\frac{36a^{-2}b^{-1}c^5}{47x^3y^{-5}z^{-2}}$

37. $\frac{3a^{-2}b^3c^0}{5a^5b^{-4}c^{-2}}$, $\frac{7a^{-1}b^{-2}c^{-3}}{8a^{-2}b^{-3}c^{-4}}$, $\frac{36a^0b^{-4}}{24a^{-1}b^3c^{-4}}$

38. $\frac{54x^5y^{-7}z^4}{42x^{-1}y^{-8}z^{-4}}$, $\frac{18x^{-4}y^{-5}z}{24x^{-3}y^3z^{-1}}$, $\frac{21x^{-1}y^5z^{-3}}{35x^{-2}y^6z^{-4}}$

39. $\frac{a^3b^{-4}}{x^{-7}y^5} \cdot \frac{a^{-4}b^5}{x^9y^{-3}}$, $\frac{2a^4b^{-3}}{3x^4y^{-3}} \cdot \frac{6a^{-4}b^4}{5x^{-5}y^3}$

40. $\frac{3a^{-1}b^{-2}}{4x^{-2}y^{-4}} \cdot \frac{6a^2x^{-1}}{5b^{-1}c^2}$, $\frac{15a^3b^{-2}}{16x^5y^{-4}} \cdot \frac{12a^{-4}b}{25x^{-7}y^2}$

41. $\frac{4x^{-n}y^{-3}}{5a^{-4}b^{-m}} \cdot \frac{15a^{-2}b^{3-m}}{14x^n y^{n-3}}$, $\frac{4}{15a^{-4}b^{-n}c} \cdot \frac{9}{8a^2b^{n-1}c^{-n}}$

42. $a^{-8} : -a^8$, $a^{-5} : -5a$

43. $-7a : a^{-7}$, $3a^3 : -3a^{-3}$

44. $\frac{3}{4}x^{-3} : \frac{1}{8}x^3$, $\frac{2}{3}a^3 : -\frac{5}{6}a^{n+3}$

45. $2a^{-1}x^3 : -3bx^{-5}$, $-4x^{-3}y^2 : -6xy^{-2}$

46. $(x-y)^{-2} : (y-x)^{-1}$, $(x-y)^{-3} : (y-x)^2$

47. $(a-x)^n : (x-a)^{-3}$, $(1-x)^3 : (x-1)^{-n}$

48. $\frac{3}{5}x^{-n}y^nz^{-1} : \frac{6}{7}x^{2-n}y^{n-2}z^{-3}$

49. $\frac{7}{3}a^{-5}b^{n-1}c : \frac{5}{6a^4bc^2}$ 50. $\frac{1}{6a^{n-1}b^{-2}c^{-3}} : \frac{5}{3}a^{-n}b^{n+2}c^3$

51. $(a^{-2})^{-3}$. $(a^{-3})^2$, $(a^{-3})^0$

52. $(-a^2)^{-5}$, $(-a^5)^{-2}$, $(-a^{-5})^{-2}$

53. $(-a^3)^{-4}$, $(-a^{-3})^4$, $(-a^{-4})^{-3}$

54. $(-a^3)^{-2n}$, $(-a^{2n})^{-3}$, $(-a^{-2n})^{-3}$

55. $(-a^{-2})^{2n-1}$, $(-a^{-3})^{2n-1}$, $(-a^{2n-1})^2$

56. $\left(\frac{a^{-2}b^3}{x^{-1}y^{-4}}\right)^2$, $\left(\frac{a^{-3}b}{x^3y^{-2}}\right)^{-3}$, $\left(\frac{a^{-4}b^3}{x^2y^{-3}}\right)^{-2}$

57. $\left(\frac{a^0b^{-2}}{xy^3}\right)^3$, $\left(\frac{a^{-2}b^0}{x^4y^{-1}}\right)^{-2}$, $\left(\frac{a^5b^{-3}}{x^{-1}y^2}\right)^{-1}$

58. $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a-b}{c+d}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2$

59. $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{(x+y)^{-3}} \cdot (x-y)^{-3}$

60. $\left(\frac{1}{1+x}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-6}$

61. $(ax^{-4} + bx^{-3} + cx^{-2} + dx^{-1} + e) \cdot x^4$

62. $(ax^2 + bx + c + dx^{-1} + ex^{-2}) \cdot x^2$

63. $(x + x^{-1})(x - x^{-1})$ 64. $(x^3 + x^{-1})(x - x^{-3})$

65. $(2x + 3x^{-1})(2x - 3x^{-1})$ 66. $(5x^2 + 2x^{-1})(3x - 4x^{-2})$

67. $(x + x^{-1})^2$ 68. $(x^2 - 2x^{-2})^2$

69. $(x + x^{-1})^3$ 70. $(x + x^{-1})^4$

71. $(2x + 3x^{-1} + 5)(2x + 3x^{-1} - 5)$

72. $(3x + x^{-1} + 2)(3x + x^{-1} - 2)$
73. $(8x^2 - 5x^{-2} + 3)(3x^2 + 4x^{-2} - 5)$
74. $(9x^2 + 2x^{-2} + 6)(9x^2 + 2x^{-2} - 6)$
75. $(25x^2 + 2x^{-2} + 10)(25x^2 + 2x^{-2} - 10)$
76. $(6x^2 - 3x + 4 - 2x^{-1})(6x^2 + 3x - 4 - 2x^{-1})$

XIII.

Wurzeln oder irrationale Größen.

Unter Wurzel (radix) einer Zahl versteht man eine Zahl, welche wiederholt als Faktor gesetzt jene Zahl giebt. Da $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ist, so ist 2 eine Wurzel der Zahl 8. Da $3 \cdot 3 = 9$ ist, so ist 3 eine Wurzel der Zahl 9. Da $aaaa = a^4$ ist, so ist a eine Wurzel von a^4. Bestimmter nennt man in diesem Falle a eine Wurzel des 4. Grades oder die 4. Wurzel aus a^4 und schreibt das $\sqrt[4]{a^4} = a$. Ebenso ist $\sqrt[3]{8} = 2$, weil $2 \cdot 2 \cdot 2$, d. h. $2^3 = 8$ ist; $\sqrt[4]{81} = 3$, weil $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ oder $3^4 = 81$ ist; $\sqrt[6]{64} = 2$, weil $2^6 = 64$ ist.

Allgemein ist $\sqrt[n]{a} = b$, wenn $b^n = a$ ist. Die Wurzel des n. Grades aus a oder die n. Wurzel aus a bedeutet daher die Zahl (b), welche mit n potenziert a giebt.

Das Zeichen $\sqrt{\ }$ (ursprünglich ein r) nennt man das Wurzelzeichen; die Zahl a, aus welcher man die Wurzel ziehen soll, heißt der Radikand; die Zahl n, mit welcher man die Wurzel b potenzieren muß, um den Radikanden zu erhalten, heißt Wurzelexponent. Die Wurzel aus einer Zahl suchen oder ausziehen heißt radizieren. Das Radizieren ist die sechste der sieben Fundamentaloperationen.

Da nach dem Obigen

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \text{ und ebenso } \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

sein muß, so heben sich Wurzelexponent und Potenzexponent gegenseitig auf; Potenzieren und Radizieren sind somit entgegengesetzte Operationen.

Aus der Definition der Wurzel folgt ferner auch, daß

$$\sqrt[3]{a^{12}} = a^4, \ \sqrt[n]{a^{nx}} = a^x$$

sein muß. Aus einer Potenz zieht man demnach die Wurzel, indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert.

Die Gleichungen $b^n = a$ und $\sqrt[n]{a} = b$ bedingen sich gegenseitig. Wenn die eine gilt, so muß auch die andere gelten. Hat man beim Potenzieren $b^n = a$, so sind b und n gegeben, es wird a gesucht. Beim Radizieren verwandelt sich diese Gleichung in $\sqrt[n]{a} = b$; es sind

a und n gegeben, es wird b gesucht. Das Radizieren ist mithin eine Umkehrung des Potenzierens. Was beim Potenzieren Potenz heißt, heißt beim Radizieren Radikand; was beim Potenzieren Basis heißt, heißt beim Radizieren Wurzel; was beim Potenzieren Potenzexponent heißt, heißt beim Radizieren Wurzelexponent.

Der Wurzelexponent 2 wird meistens fortgelassen. Man schreibt statt $\sqrt[2]{a}$ nur $\sqrt{a}$, und wie man a^2 meistens a Quadrat liest, so liest man $\sqrt{a}$ meistens Quadratwurzel aus a oder kurz nur Wurzel aus a. Ebenso liest man $\sqrt[3]{a}$ meistens Kubikwurzel aus a.

Eine Wurzel aus einer ganzen Zahl, welche sich durch eine ganze Zahl nicht angeben läßt, läßt sich auch nicht durch eine ganze Zahl und einen Bruch angeben, sondern nur genähert. Ebenso kann eine Wurzel aus einem Bruch, der auf seine einfachste Form gebracht ist, weder eine ganze Zahl, noch ein Bruch sein, wenn sich die Wurzel nicht aus dem Zähler und aus dem Nenner ziehen läßt, kann also ebenfalls nur genähert angegeben werden. Wurzeln, welche sich nur genähert angeben lassen, nennt man irrational. Wurzeln, welche sich genau in ganzen Zahlen oder Brüchen angeben lassen, heißen rational. Die rationalen Zahlen sind entweder ganze oder gebrochene; die irrationalen Zahlen sind weder ganze noch gebrochene.

Die Wurzel aus 9 ist 3, mithin ist $\sqrt{9}$ eine rationale Größe. $\sqrt{11}$ ist eine irrationale Größe und läßt sich nur genähert angeben.

Eine Wurzel von einem geraden Grade kann positiv und negativ genommen werden, ist also doppeldeutig. So kann $\sqrt{a^2} = + a$ u. $= - a$ gesetzt werden, da sowohl $(+ a)^2$ als auch $(- a)^2$ wieder a^2 giebt. Ebenso kann $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b$ oder $= b - a$ gesetzt werden, d. h. $\pm (a - b)$, $\sqrt{9} = \pm 3$. Aber $\sqrt{(+ a)^2}$ darf nur $= + a$, $\sqrt{(- a)^2}$ nur $= - a$ gesetzt werden.

Eine Wurzel von einem geraden Grade aus einer negativen Zahl ist eine unmögliche Größe, da keine Zahl, mit einer geraden Zahl potenziert, ein negatives Resultat geben kann. So ist $\sqrt{- 9}$ eine unmögliche Größe, da weder $+ 3$, noch $- 3$ paßt. Ebenso ist allgemein $\sqrt[2n]{- a}$ eine unmögliche Größe. Man weiß von ihr nur, daß sie, mit 2n potenziert, $- a$ giebt. Die unmöglichen Größen werden imaginäre Größen genannt, denen entgegen alle übrigen Größen reelle heißen.

Eine Wurzel von einem ungeraden Grade aus einer positiven Zahl muß wieder positiv, aus einer negativen Zahl muß wieder negativ sein. So ist $\sqrt[3]{+ 8} = + 2$, weil $(+ 2)^3 = + 8$ ist; $\sqrt[3]{- 8} = - 2$, weil $(- 2)^3 = - 8$ ist. Aber $\sqrt[3]{+ 8}$ kann nicht $= - 2$, $\sqrt[3]{- 8}$ nicht $= + 2$ sein.

Über die Rechnung mit Wurzeln oder Wurzelgrößen gelten folgende Sätze:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

4. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nx]{a^{mx}}$

5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Wie werden diese Sätze bewiesen, und wie heißen dieselben in Worten? Vergiß dabei den Satz nicht, der entsteht, wenn du die Formel von rechts nach links liest.

1. Ueber die Definition der Wurzel.

1. $\sqrt[1]{7}$,	$\sqrt[1]{a}$,	$\sqrt[7]{1}$,	$\sqrt[1]{1}$
2. $\sqrt[3]{0}$,	$\sqrt[0]{1}$,	$\sqrt[0]{a}$,	$\sqrt{a^0}$
3. $(\sqrt[3]{8})^3$,	$\sqrt[3]{8^3}$,	$(\sqrt[4]{16})^4$,	$\sqrt[4]{16^4}$
4. $\sqrt[7]{a^7}$,	$(\sqrt[3]{x})^3$,	$\sqrt{y^2}$,	$\sqrt{m^4}$
5. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$,	$\sqrt{3x} \cdot \sqrt{3x}$,	$(\sqrt{ay})^2$,	$\sqrt{(a-y)^2}$
6. $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}$,	$(\sqrt{2x-1})^2$,	$\sqrt[3]{(ax-b)^3}$,	$\sqrt[4]{(x-y)^4}$
7. $\sqrt{a^6}$,	$\sqrt{b^{10}}$,	$\sqrt{c^{14}}$,	$\sqrt{d^{2n}}$
8. $\sqrt[3]{m^3}$,	$\sqrt[3]{n^6}$,	$\sqrt[3]{p^{12}}$,	$\sqrt[3]{q^{3x}}$
9. $\sqrt[4]{x^4}$,	$\sqrt[5]{y^{10}}$,	$\sqrt[6]{u^{30}}$,	$\sqrt[7]{v^{7x}}$
10. $\sqrt[x]{a^x}$,	$\sqrt[x]{b^{2x}}$,	$\sqrt[x]{c^{5x}}$,	$\sqrt[n]{d^{np}}$
11. $\sqrt[4]{81}$,	$\sqrt[5]{32}$,	$\sqrt[6]{64}$,	$\sqrt[6]{729}$
12. $3\sqrt{4}$,	$7\sqrt{9}$,	$5\sqrt{36}$,	$10\sqrt{49}$
13. $\sqrt{\frac{1}{4}}$,	$6\sqrt{\frac{4}{9}}$,	$8\sqrt{1\frac{9}{16}}$,	$10\sqrt{4\frac{21}{25}}$
14. $(5\sqrt{a})^2$,	$(7\sqrt{x})^2$,	$(a\sqrt{b})^2$,	$(x\sqrt{x})^2$
15. $(5\sqrt{2})^2$,	$(3\sqrt{3})^2$,	$(2\sqrt{5})^2$,	$(10\sqrt{10})^2$
16. $(a\sqrt{a})^3$,	$(a\sqrt[3]{a})^3$,	$(2\sqrt{5})^3$,	$(2\sqrt[3]{5})^3$

17. $(4\sqrt{x})^2 + (3\sqrt{x})^2 + (4\sqrt{a-b})^2 + (5\sqrt{b-x})^2$

18. $(4\sqrt{a})^2 + (3\sqrt{b})^2 + (2\sqrt{7b-4a})^2 - (6\sqrt{b})^2$

19. $(8\sqrt{a})^2 - (12\sqrt{b})^2 + (4\sqrt{9b-4a-3x})^2 + (7\sqrt{x})^2$

2. Vereinfachung des Radikanden. Fortschaffung des Nenners unter der Wurzel.

1.	$\sqrt{a^2b}$,	$\sqrt{ax^6}$,	$\sqrt[4]{5x^4}$,	$\sqrt[5]{3x^5y}$
2.	$\sqrt{4ab^2}$,	$\sqrt{9a^2x}$,	$\sqrt{7x^2y^2}$,	$\sqrt{ax^4y^2}$
3.	$\sqrt{5abc^2}$,	$\sqrt{9a^4b^2c}$,	$\sqrt{16a^2bc^4}$,	$\sqrt{7a^2b^4x^2}$
4.	$\sqrt{a^2b^2}$,	$\sqrt{a^2+b^2}$,	$\sqrt{a^2-b^2}$,	$\sqrt{(a+b)^2}$
5.	$\sqrt{1+x^2}$,	$\sqrt{1-x^2}$,	$\sqrt{(1+x)^2}$,	$\sqrt{(1-x)^2}$
6.	$\sqrt[3]{8ab^3}$,	$\sqrt[3]{27a^3x}$,	$\sqrt[3]{11x^3y^3}$,	$\sqrt[3]{12x^6y^9}$
7.	$\sqrt[3]{a^3b^3}$,	$\sqrt[3]{a^3+b^3}$,	$\sqrt[3]{a^3-b^3}$,	$\sqrt[3]{(a-b)^3}$
8.	$\sqrt{x^3}$,	$\sqrt{x^7}$,	$\sqrt{x^{2n+1}}$,	$\sqrt{x^{2n-1}}$
9.	$\sqrt[3]{x^4}$,	$\sqrt[3]{x^8}$,	$\sqrt[3]{x^{3n+1}}$,	$\sqrt[3]{x^{3n-2}}$
10.	$\sqrt[n]{x^{n+1}}$,	$\sqrt[n]{x^{n+3}}$,	$\sqrt[n]{5x^{2n+1}}$,	$\sqrt[n]{ax^{2n-1}}$
11.	$\sqrt{ab^3c^4}$,	$\sqrt{4a^2b^2c^3}$,	$\sqrt{7x^4y^9z^{11}}$,	$\sqrt{9x^3y^8z^{10}}$
12.	$\sqrt[3]{ab^3c^4}$,	$\sqrt[3]{8a^5b^2c^3}$,	$\sqrt[3]{7x^2y^9z^4}$,	$\sqrt[3]{9x^3y^8z^{10}}$
13.	$\sqrt{a^2+b^4}$,	$\sqrt{a^6+b^6}$,	$\sqrt{a^2(1+b^2)}$,	$\sqrt[3]{a^3(1-b)^3}$
14.	$\sqrt{28}$,	$\sqrt{45}$,	$\sqrt{18}$,	$\sqrt{24}$
15.	$\sqrt{27}$,	$\sqrt{32}$,	$\sqrt{96}$,	$\sqrt{243}$
16.	$\sqrt{320}$,	$\sqrt{405}$,	$\sqrt{363}$,	$\sqrt{432}$
17.	$3\sqrt{8}$,	$5\sqrt{80}$,	$8\sqrt{75}$,	$6\sqrt{150}$
18.	$3\sqrt{12a^2}$,	$4\sqrt{20b^2}$,	$5\sqrt{40c}$,	$7\sqrt{48ax^2}$
19.	$\frac{5}{2}\sqrt{24a^3}$,	$\frac{4}{3}\sqrt{27b^5}$,	$\frac{5}{6}\sqrt{45c^6}$,	$\frac{5}{8}\sqrt{80x^3y^4}$
20.	$1\frac{1}{4}\sqrt{72a^2}$,	$7\frac{1}{2}\sqrt{96b^7}$,	$3\frac{1}{3}\sqrt{54c^9}$,	$2\frac{1}{5}\sqrt{125x^2y^3}$
21.	$\sqrt[3]{16}$,	$\sqrt[3]{24}$,	$\sqrt[3]{54}$,	$\sqrt[3]{72}$
22.	$\sqrt[3]{80}$,	$\sqrt[3]{-81}$,	$\sqrt[3]{250}$,	$\sqrt[3]{-648}$
23.	$2\sqrt[3]{48}$,	$7\sqrt[3]{108}$,	$5\sqrt[3]{-320}$,	$8\sqrt[3]{-375}$
24.	$\sqrt{\frac{3}{4}}$,	$\sqrt{\frac{5x}{9}}$,	$8\sqrt{\frac{7a}{16x^2}}$,	$15\sqrt{\frac{11b}{25y^2}}$,
25.	$\sqrt{\frac{1}{2}}$,	$\sqrt{\frac{1}{3}}$,	$\sqrt{\frac{3}{5}}$,	$\sqrt{\frac{7}{8}}$,
26.	$\sqrt{\frac{5}{7}}$,	$\sqrt{\frac{9}{8}}$,	$\sqrt{\frac{5}{14}}$,	$\sqrt{\frac{10}{27}}$
27.	$\sqrt{\frac{1}{2{,}8}}$,	$\sqrt{\frac{1}{0{,}75}}$,	$\sqrt{\frac{3}{0{,}5}}$,	$\sqrt{\frac{4}{0{,}7}}$

28. $\sqrt{\frac{5,4}{2,4}}$, $\sqrt{\frac{0,8}{3,6}}$, $\sqrt{\frac{4,4}{0,96}}$, $\sqrt{\frac{0,15}{5,4}}$,

29. $a\sqrt{\frac{x}{a}}$, $b\sqrt{\frac{x^2}{b}}$, $c\sqrt{\frac{x^3}{c}}$, $c\sqrt[3]{\frac{x^3}{c}}$

30. $\sqrt{\frac{2a^2}{3b^2}}$, $\sqrt{\frac{3a^2}{5x^3}}$, $\sqrt{\frac{5a^3}{6x^5}}$, $\sqrt{\frac{7a^5}{10b}}$,

31. $2a\sqrt{\frac{5}{8a^2}}$, $\frac{2}{a}\sqrt{\frac{11}{12}a^3}$, $2ax\sqrt{\frac{17x^2}{24a}}$, $\frac{3}{a^2}\sqrt{\frac{13a^7}{18x}}$

32. $7ab\sqrt{\frac{81a^2}{98b^2}}$, $20b^3\sqrt{\frac{31a}{50b^3}}$, $1\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{45}a^4}$, $2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{28}{75}x^3}$

33. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{x^2y^2}}$, $\sqrt{\frac{a^2(1+b^2)}{x^2(1+y^2)}}$, $\sqrt{\frac{a^2(1+b)^2}{x^2(1-y^2)}}$, $\sqrt{\frac{a+b^2}{(x+y)^2}}$

34. $\sqrt{\frac{a^4+b^6}{a^4b^6c^2}}$, $\sqrt{\frac{xy^3z^5}{x+y^3}}$, $\sqrt{\frac{(a^2+b^4)c^6}{x^2y^2(1+z^4)}}$, $\sqrt{\frac{a^2(b+c^2)}{(x+y^2)^2}}$

35. $\sqrt{16+9}$, $\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}}$, $\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$

36. $\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{25}}$, $\sqrt{\frac{1}{8}-\frac{1}{16}}$, $\sqrt{\frac{5}{18}-\frac{1}{36}}$, $\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{9}{4}}$

37. $\frac{7}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}}$, $\frac{7}{4}\sqrt{1-\frac{1}{49}}$, $\frac{9}{4}\sqrt{1-\frac{1}{81}}$, $\frac{5}{2}\sqrt{1-\frac{1}{25}}$

38. $\frac{12}{5}\sqrt{1+\frac{1}{24}}$, $\frac{8}{3}\sqrt{1-\frac{1}{64}}$, $\frac{10}{3}\sqrt{1-\frac{1}{10}}$, $\frac{10}{3}\sqrt{1-\frac{1}{100}}$

38_1. $\sqrt{ax^2-bx^2+7x^2}$ $\qquad$ $\sqrt{a^3+2a^2b+a^2c}$

38_2. $\sqrt{x^3-2x^2y+xy^2}$ $\qquad$ $\sqrt{5x^3-20x^2+20x}$

38_3. $\sqrt{3a^2c^3-6abc^3+3b^2c^3}$, $\sqrt{18x^2y-60xy^3+50y^5}$

38_4. $\sqrt{\frac{a^3-2a^2+a}{ax^2+bx^2}}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{a^3+a^2b-ab^2-b^3}{9(a-b)}}$

38_5. $\sqrt{\frac{2a^3-8a^2+8a}{8x-8x^2+2x^3}}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{2x^3-12x^2+18x}{50y-20y^2+2y^3}}$

39. Wenn $\sqrt{50}=a$ ist, wie groß sind dann $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{72}$ und $\sqrt{98}$?

40. Wenn $\sqrt{\frac{3}{5}}=a$ ist, wie groß sind dann $\sqrt{\frac{5}{3}}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{60}$, $\sqrt{2,4}$, $\sqrt{3\frac{3}{4}}$, $\sqrt{5\frac{2}{5}}$?

41. Wenn $\sqrt[3]{250}=a$ ist, wie groß sind dann $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[3]{128}$, $\sqrt[3]{1024}$?

---

3. Addition und Subtraktion der Wurzeln.

1. $\sqrt{3}+2\sqrt{3}$, $\qquad$ $8\sqrt{7}-3\sqrt{7}$, $\qquad$ $9\sqrt{5}-\sqrt{5}$

2. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $\qquad$ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\qquad$ $\sqrt{a}+3\sqrt{a}$

3. $a\sqrt{x} - \sqrt{x}$, $a\sqrt{x} - b\sqrt{x}$, $a\sqrt{x} - b\sqrt[3]{x}$
4. $8\sqrt{a} + 5\sqrt{x} - 7\sqrt{a} + 4\sqrt{a} - 6\sqrt{x} - 3\sqrt{a}$
5. $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} - 3\sqrt{a} + 5\sqrt{b} + 2\sqrt{a^2} - 6\sqrt{b}$
6. $a + 2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{a^2} - 3\sqrt[6]{a^2} - \sqrt[6]{a^3}$
7. $\sqrt{x} + 3\sqrt{2x} - 2\sqrt{3x} + \sqrt{4x} - \sqrt{8x} + \sqrt{12x}$
8. $2\sqrt{a} + 5\sqrt{b} - x\sqrt{a} - c\sqrt{b} + \sqrt{(x-1)^2 a} + \sqrt{bc^2}$
9. $3\sqrt{a} + 2\sqrt{b} - 4\sqrt{a} - 5\sqrt{b} + \sqrt{4a} + \sqrt{9b}$
10. $7\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x} - \sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x^3}$
11. $5\sqrt{x} - 7\sqrt{y} + 2\sqrt{2x} + 8\sqrt{y} - \sqrt{4y} - \sqrt{8x}$
12. $6\sqrt{x} + 3\sqrt{2x} - 5\sqrt{3x} - 2\sqrt{4x} + \sqrt{12x} - \sqrt{18x}$
13. $4\sqrt{a^2x} + 3\sqrt{b^2x} + 2\sqrt{c^2x} + \sqrt{d^2x} - 2\sqrt{(b+d)^2x}$
14. $7\sqrt{4x} + 4\sqrt{9x} + 3\sqrt{45x} - 5\sqrt{36x} - 2\sqrt{80x}$
15. $2\sqrt{81a} - 3\sqrt{24a} + 5\sqrt{36a} + 2\sqrt{54a} - 4\sqrt{100a}$
16. $4\sqrt{3a} - 7\sqrt{12a^2} + 5\sqrt{48a} + 6\sqrt{27a^2} - 5\sqrt{75a}$
17. $3\sqrt{8} + 4\sqrt{32} - 5\sqrt{50} - 7\sqrt{72} + 6\sqrt{98}$
18. $7\sqrt{12} - 5\sqrt{27} + 8\sqrt{48} - 6\sqrt{75} + 2\sqrt{108}$
19. $5\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{-54} - 6\sqrt[3]{-128} + 7\sqrt[3]{-250} + 2\sqrt[3]{432}$
20. $7\sqrt[3]{24} + 5\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{-192} + 2\sqrt[3]{-375} - \sqrt[3]{1029}$
21. $\sqrt{(a+b)^2x} + \sqrt{(a-b)^2x} - \sqrt{a^2x} + \sqrt{(1-a)^2x} - \sqrt{x}$
22. $\sqrt{4+4x^2} + \sqrt{9+9x^2} + \sqrt{a^2+a^2x^2} - 5\sqrt{1+x^2}$
23. $\sqrt{a-b} + \sqrt{16a-16b} + \sqrt{ax^2-bx^2} - \sqrt{9(a-b)}$

---

4. Multiplikation gleichnamiger Wurzeln.

1. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$, $\sqrt{28} \cdot \sqrt{7}$
2. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$, $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$, $\sqrt{7} \cdot \sqrt{42}$
3. $\sqrt{10} \cdot \sqrt{15}$, $\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}$, $\sqrt{20} \cdot \sqrt{30}$
4. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{18}$, $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{50}$
5. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{x}$, $2\sqrt{a} \cdot \sqrt{3x}$, $5\sqrt{2a} \cdot 3\sqrt{5x}$
6. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{3a}$, $\sqrt{5x} \cdot \sqrt{x}$, $\sqrt{y} \cdot \sqrt{8y}$

7. $a\sqrt{x}\cdot b\sqrt{x}$, $5\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}$, $7\sqrt{x}\cdot a\sqrt{x}$

8. $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{8a}$, $\sqrt{3a}\cdot\sqrt{5a}$, $\sqrt{6x}\cdot\sqrt{8x}$

9. $\sqrt{6x}\cdot\sqrt{10x}$, $\sqrt{3y}\cdot\sqrt{6y}$, $\sqrt{5z}\cdot\sqrt{35z}$

10. $\sqrt{7a}\cdot\sqrt{21a}$, $\sqrt{10b}\cdot\sqrt{15b}$, $\sqrt{14c}\cdot\sqrt{70c}$

11. $\sqrt{d^3}\cdot\sqrt{d^3}$, $\sqrt{b^5}\cdot\sqrt{b^7}$, $\sqrt{c^7}\cdot\sqrt{7c}$

12. $\sqrt{p}\cdot\sqrt{p^9}$, $\sqrt{5q}\cdot\sqrt{q^5}$, $\sqrt{q^{n+1}}\cdot\sqrt{q^{n-1}}$

13. $\sqrt[3]{2d^2}\cdot\sqrt[3]{4d}$, $\sqrt[3]{9x}\cdot\sqrt[3]{9x^2}$, $\sqrt[3]{25y^2}\cdot\sqrt[3]{50y^2}$

14. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}$, $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[4]{ax}$

15. $\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{x}{a}}$, $a\cdot\sqrt{\frac{x}{a^2}}$, $\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{x}{a^3}}$

16. $\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{a}{x}}$, $\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{5x}{4a}}$, $\sqrt{3a}\cdot\sqrt{\frac{7x}{6a}}$

17. $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{\frac{3a}{2x}}$, $\sqrt{5a}\cdot\sqrt{\frac{10a}{3x}}$, $\sqrt{7a}\cdot\sqrt{\frac{35a}{3x}}$

18. $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{5}{6}}$, $\sqrt{\frac{7}{40}}\cdot\sqrt{\frac{21}{10}}$, $\sqrt{\frac{24}{35}}\cdot\sqrt{\frac{10}{21}}$

19. $\sqrt{\frac{2a}{3b}}\cdot\sqrt{\frac{2b}{3a}}$, $\sqrt{\frac{5a}{6b}}\cdot\sqrt{\frac{10a}{3b}}$, $\sqrt{\frac{8a}{15x}}\cdot\sqrt{\frac{10ax}{3y^2}}$

20. $(3\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{50}-2\sqrt{72})\cdot\sqrt{2}$

21. $(4\sqrt{12}-2\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}$

22. $(2\sqrt{6}-\sqrt{12}-\sqrt{24}+\sqrt{48})\cdot\sqrt{2}$

23. $(5\sqrt{24}-4\sqrt{32}+3\sqrt{50}-3\sqrt{54})\cdot\sqrt{3}$

24. $(7\sqrt{2}-5\sqrt{6}-3\sqrt{8}+4\sqrt{20})\cdot 3\sqrt{2}$

25. $(2\sqrt{20}-7\sqrt{8}-3\sqrt{5}+3\sqrt{18})\cdot 4\sqrt{10}$

26. $(\sqrt{7}-\sqrt{3})\ (\sqrt{3}-\sqrt{2})$ 27. $(\sqrt{6}+\sqrt{3})\ (\sqrt{3}-\sqrt{2})$

28. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})\ (7\sqrt{2}+5\sqrt{3})$ 29. $(5\sqrt{7}-2\sqrt{5})(3\sqrt{7}+10\sqrt{5})$

30. $(8+3\sqrt{5})\ (2-\sqrt{5})$ 31. $(3-\sqrt{2})\ (2+3\sqrt{2})$

32. $(5\sqrt{3}+\sqrt{6})\ (5\sqrt{2}-2)$ 33. $(5-2\sqrt{3})\ (6+5\sqrt{3})$

34. $(2a+3\sqrt{x})\ (3a-2\sqrt{x})$ 35. $(4\sqrt{a}-\sqrt{3x})\ (\sqrt{a}+2\sqrt{3x})$

36. $(2\sqrt{6}+5\sqrt{3}-7\sqrt{2})\ (\sqrt{6}-2\sqrt{3}+4\sqrt{2})$

37. $(2\sqrt{30}-3\sqrt{5}+5\sqrt{3})\ (\sqrt{8}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$

38. $(3+\sqrt{6}+\sqrt{15})\ (2+\sqrt{6}-\sqrt{10})$

39. $(2\sqrt{5}+\sqrt{8}-\sqrt{12})\,(\frac{1}{3}\sqrt{30}-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$39_1.$ $(\sqrt{75}+3\sqrt{162}-2\sqrt{450})\,(3\sqrt{147}+\sqrt{98}-\sqrt{675})$

$39_2.$ $(\sqrt{243}-3\sqrt{242}+2\sqrt{968})\,(2\sqrt{1452}-\sqrt{242}-5\sqrt{147})$

$39_3.$ $(5\sqrt{112}+\sqrt{176}-\sqrt{4375})\,(3\sqrt{396}+\sqrt{175}-2\sqrt{539})$

$39_4.$ $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})\,(2\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{4})$, $(\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{4})\,(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{54})$

$39_5.$ $(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{9})(\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{375})$, $(7\sqrt[3]{16}-3\sqrt[3]{49})(3\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{7})$

$39_6.$ $(5\sqrt[3]{500}+\sqrt[3]{24}-6\sqrt[3]{256})\,(\sqrt[3]{54}+5\sqrt[3]{243}-4\sqrt[3]{576})$

$39_7.$ $(\sqrt[3]{128}-3\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{2000})\,(\sqrt[3]{500}+\sqrt[3]{448}-\sqrt[3]{32})$

40. $(a+\sqrt{b})\,(a-\sqrt{b})$ 41. $(\sqrt{a}+x)\,(\sqrt{a}-x)$

42. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ 43. $(\sqrt{3a}+\sqrt{2b})\,(\sqrt{3a}-\sqrt{2b})$

44. $(a\sqrt{x}+\sqrt{y})(a\sqrt{x}-\sqrt{y})$ 45. $(a\sqrt{b}+x\sqrt{y})\,(a\sqrt{b}-x\sqrt{y})$

46. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ 47. $(\sqrt{7}+\sqrt{3})\,(\sqrt{7}-\sqrt{3})$

48. $(3\sqrt{5}+2\sqrt{11})(3\sqrt{5}-2\sqrt{11})$ 49. $(7+4\sqrt{3})\,(7-4\sqrt{3})$

50. $(\sqrt{x+y}+\sqrt{y})\,(\sqrt{x+y}-\sqrt{y})$

51. $(\sqrt{x}+\sqrt{x-y})\,(\sqrt{x}-\sqrt{x-y})$

52. $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$

53. $(\sqrt{9x+5}+3\sqrt{x})(\sqrt{9x+5}-3\sqrt{x})$

54. $(\sqrt{a+b+x}+\sqrt{a+b-x})(\sqrt{a+b+x}-\sqrt{a+b-x})$

55. $(\sqrt{3a-b}+\sqrt{3b-a})\,(\sqrt{3a-b}-\sqrt{3b-a})$

56. $\left(\sqrt{\frac{a+1}{2}}+\sqrt{\frac{a-1}{2}}\right)\,\left(\sqrt{\frac{a+1}{2}}-\sqrt{\frac{a-1}{2}}\right)$

57. $[\sqrt{(x+1)\,(y+1)}+\sqrt{(x-1)\,(y-1)}]\,.$
$[\sqrt{(x+1)\,(y+1)}-\sqrt{(x-1)\,(y-1)}]$

58. $\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b}}$ 59. $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$59_1.$ $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$ $59_2.$ $\sqrt{6+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

$59_3.$ $\sqrt[n]{8+3\sqrt{7}}\cdot\sqrt[n]{8-3\sqrt{7}}$ $59_4.$ $\sqrt[3]{2\sqrt{13}+5}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{13}-5}$

60. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ 61. $(a-b\sqrt{x})^2$

62. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ 63. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

64. $(1+\sqrt{2})^2$ 65. $(-1+\sqrt{3})^2$

66. $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$ 67. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$

68. $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})^2$ 69. $(\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b})^2$

70. $(a+\sqrt{1-a^2})^2$ 71. $(\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax})^2$

72. $(\sqrt{3-x}-\sqrt{2+x})^2$ 73. $(\sqrt{7-5x}+\sqrt{4x-5})^2$

74. $(\sqrt{3a-2b}-\sqrt{3b-2a})^2$ 75. $(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1+a^2})^2$

76. $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ 77. $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$

78. $\left(\sqrt{\frac{2a}{3b}}-\sqrt{\frac{2b}{3a}}\right)^2$ 79. $\left(\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}-\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}\right)^2$

80. $(\sqrt{a+b-x}+\sqrt{a-b+x})^2$

80_1. $(\sqrt{4a+b-4x}-2\sqrt{3b-a+x})^2$

80_2. $(\sqrt{3a-2b-5x}-\sqrt{3b-2a+5x})^2$

81. $[\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}]^2$

82. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$

82_1. $(\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{10})(\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{10})$

83_1. $\sqrt{a+\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{a^2-x^2}}$

83_2. $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}$

83_3. $\sqrt[3]{a\sqrt{a}+\sqrt{a^3-x^3}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}-\sqrt{a^3-x^3}}$

83_4. $\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2$

83_5. $\sqrt{ax+a}\,.\,\sqrt{ax^2+ax}$ 83_6. $\sqrt{6a-6b}\,.\,\sqrt{2a^2-2b^2}$

83_7. $\sqrt{ax-a}\,.\,\sqrt{ax^2-a}$ 83_8. $\sqrt{x^2-x}\,.\,\sqrt{x^3-x}$

83_9. $\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 83_{10}. $\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{\frac{5a+5b}{ax^2-bx^2}}$

84. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3$ 85. $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3$

86. $(1+\sqrt{2})^3$ 87. $(2-\sqrt{3})^3$

88. $(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})^3$ 89. $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4})^3$

90. $(a\sqrt{b}+b\sqrt{a})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ 91. $(a+b-\sqrt{ab})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

92. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x^2+xy+y^2)(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

93. $(a+b+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$

94. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

95. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

96. $(a+\sqrt{x})^3+(a-\sqrt{x})^3$

97. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^4+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$

98. $(a+\sqrt{x})^4-(a-\sqrt{x})^4$

99. $(a+\sqrt{x})^5+(a-\sqrt{x})^5$

---

5. Division gleichnamiger Wurzeln. Fortschaffung der Wurzeln aus dem Nenner.

1. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}}$, $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}$

2. $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}}$, $\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{7}}$, $\frac{\sqrt{6x}}{\sqrt{2x}}$, $\frac{\sqrt{48x}}{\sqrt{6x}}$

3. $\frac{a}{\sqrt{a}}$, $\frac{a}{\sqrt[3]{a}}$, $\frac{a}{\sqrt[4]{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}}$

4. $\frac{3}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{2}}$, $\frac{8}{\sqrt{6}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$

5. $\frac{9}{2\sqrt{3}}$, $\frac{10}{3\sqrt{5}}$, $\frac{48}{5\sqrt{32}}$, $\frac{54}{\sqrt{72}}$

6. $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$, $\frac{a}{\sqrt[4]{a^3}}$, $\frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}$, $\frac{a}{\sqrt[n]{a}}$

7. $\frac{a}{\sqrt[7]{a^5}}$, $\frac{a}{\sqrt[5]{a^2}}$, $\frac{a}{\sqrt[8]{a^3}}$, $\frac{a}{\sqrt[9]{a^8}}$

8. $\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}$, $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a-b}}$, $\frac{a^2-1}{\sqrt{a-1}}$, $\frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}$

---

9. $\sqrt{ax}:\sqrt{x}$, $\sqrt{5x}:\sqrt{5}$, $\sqrt{a^2b}:\sqrt{b}$, $\sqrt{ab}:\sqrt{bx}$

10. $\sqrt{28}:\sqrt{7}$, $\sqrt{32}:\sqrt{2}$, $\sqrt{60}:\sqrt{5}$, $\sqrt{72}:\sqrt{30}$

11. $3\sqrt{6}:2\sqrt{3}$, $5\sqrt{7}:2\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}:5\sqrt{2}$, $8\sqrt{9}:3\sqrt{2}$

12. $6 : \sqrt{\tfrac{2}{3}}$, $15 : \sqrt{\tfrac{5}{7}}$, $18 : \sqrt{\tfrac{6}{7}}$, $20 : 5\sqrt{\tfrac{4}{5}}$

13. $a : \sqrt{\frac{a}{b}}$, $a : \sqrt{\frac{a}{b^2}}$, $ax : \sqrt{\frac{a}{x}}$, $\frac{a}{x} : \sqrt{ax}$

14. $\sqrt{\tfrac{4}{5}} : 2$, $\sqrt{\tfrac{8}{9}} : 6$, $\sqrt{\tfrac{25}{27}} : 10$, $\sqrt{\tfrac{5}{8}} : \tfrac{5}{4}$

15. $\sqrt{\frac{a}{b}} : a$, $\sqrt{\frac{a^2}{b}} : a$, $\sqrt{\frac{a^3}{b}} : ab$, $\sqrt{\frac{a}{b}} : \frac{a}{b}$

16. $\sqrt{a} : \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt{ab} : \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\frac{a}{b} : \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} : \sqrt{\frac{b}{a}}$

17. $\sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{\frac{5}{6}} : \frac{5}{\sqrt{3}}$, $\frac{7}{\sqrt{8}} : \sqrt{\frac{7}{8}}$, $\sqrt{\frac{3}{5}} : \frac{\sqrt{3}}{5}$

18. $\frac{7}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{7}}{2}$, $\tfrac{1}{3}\sqrt{7} : \frac{7}{\sqrt{3}}$, $\tfrac{7}{3}\sqrt{5} : 5\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\tfrac{3}{5}\sqrt{8} : \frac{2}{\sqrt{5}}$

18_1. $(x - y) : (\sqrt{x} + \sqrt{y})$, $(1 - a) : (1 - \sqrt{a})$

18_2. $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) : \left(\sqrt{\frac{a}{x}} + \sqrt{\frac{b}{y}}\right)$, $\left(a\sqrt{\frac{y}{x}} - b\sqrt{\frac{x}{y}}\right) : (\sqrt{ay} + \sqrt{bx})$

18_3. $(x\sqrt{x} - y\sqrt{y}) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})$, $(a\sqrt{a} + b\sqrt{b}) : (a\sqrt{b} + b\sqrt{a})$

18_4. $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})$, $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{b}{a}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$

18_5. $\left(x\sqrt{\frac{x}{y}} - y\sqrt{\frac{y}{x}}\right) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})$, $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$

18_6. $(x^2 + y^2) : (x\sqrt[3]{y} + y\sqrt[3]{x})$, $(a^5 + b^5) : (a^2\sqrt[3]{b} + b^2\sqrt[3]{a})$

18_7. $\frac{x + y}{\sqrt[3]{xy}} : (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})$, $\frac{x^4 - y^4}{\sqrt[3]{xy}} : (x\sqrt[3]{x} - y\sqrt[3]{y})$

---

19. $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$, $\frac{1}{3 - \sqrt{7}}$, $\frac{3}{3 + \sqrt{6}}$, $\frac{2}{2 - \sqrt{2}}$

20. $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$, $\frac{5}{\sqrt{2} + \sqrt{7}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

21. $\frac{13}{7 - \sqrt{10}}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, $\frac{12}{4 - \sqrt{7}}$, $\frac{11}{5 + \sqrt{3}}$

22. $\frac{13}{5 + 2\sqrt{3}}$, $\frac{14}{8 - 5\sqrt{2}}$, $\frac{12}{7 - 3\sqrt{5}}$, $\frac{5\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} + 3\sqrt{\frac{1}{2}}}$

23. $\frac{7 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $\frac{9 - 5\sqrt{3}}{7 - 3\sqrt{3}}$

24. $\frac{3 + \sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, $\frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $\frac{7\sqrt{5} + 5\sqrt{7}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$, $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}}$

25. $\frac{a}{a+\sqrt{a}}$, $\frac{1}{a-\sqrt{b}}$, $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

26. $\frac{5+\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}}$, $\frac{3+2\sqrt{x}}{5+3\sqrt{x}}$, $\frac{a+b\sqrt{x}}{c+d\sqrt{x}}$, $\frac{a\sqrt{x}-b\sqrt{y}}{c\sqrt{x}-d\sqrt{y}}$

---

27. $\frac{28}{3+\sqrt{2}+\sqrt{7}}$

28. $\frac{110}{4+\sqrt{5}+\sqrt{11}}$

29. $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

30. $\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$

31. $\frac{1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

32. $\frac{60\sqrt{2}+12\sqrt{3}}{5\sqrt{6}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

33. $\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

34. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

35. $\frac{2}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}$

36. $\frac{2y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$

37. $\frac{a+x+\sqrt{a^2+x^2}}{a+x-\sqrt{a^2+x^2}}$

38. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$

39. $\frac{1}{a\sqrt{1+b^2}+b\sqrt{1+a^2}}$

40. $\sqrt{\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}}$

41. $\sqrt{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}$

42. $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}}$

43. $\frac{a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2}}$

44. $\frac{x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}}{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}}$

45. $\frac{\sqrt{(1+a)(1+b)}-\sqrt{(1-a)(1-b)}}{\sqrt{(1+a)(1+b)}+\sqrt{(1-a)(1-b)}}$

46. $\frac{(a-\alpha)\sqrt{b^2+\beta^2}-(b-\beta)\sqrt{a^2+\alpha^2}}{(b+\beta)\sqrt{a^2+\alpha^2}+(a+\alpha)\sqrt{b^2+\beta^2}}$

47. $\frac{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}+\sqrt{1+b}-\sqrt{1-b}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}+\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}}$

48. $\frac{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}-\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}+\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}}$

---

6. Anwendung der Sätze $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$ und $\sqrt[mx]{a^{nx}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Multiplikation und Division ungleichnamiger Wurzeln.

1. $\sqrt{25^3}$, $\sqrt{36^3}$, $\sqrt{49^3}$, $\sqrt{16^3}$
2. $\sqrt{64^3}$, $\sqrt{81^3}$, $\sqrt{100^3}$, $\sqrt{196^3}$,

3. $\sqrt[3]{8^2}$, $\sqrt[3]{64^2}$, $\sqrt[3]{125^2}$, $\sqrt[3]{343^2}$

4. $\sqrt[4]{16^3}$, $\sqrt[4]{81^3}$, $\sqrt[4]{256^3}$, $\sqrt[4]{1296^3}$

5. $\sqrt[5]{32^3}$, $\sqrt[5]{243^3}$, $\sqrt[5]{3125^3}$, $\sqrt[5]{100000^3}$

6. $\sqrt{(a^2 - 2ab + b^2)^3}$ $\sqrt{(x^2 + 2x + 1)^3}$

7. $\sqrt{(4a^2 - 12ab + 9b^2)^3}$, $\sqrt[3]{(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)^2}$

8. $\sqrt[9]{a^{12}}$, $\sqrt[6]{a^9}$, $\sqrt[8]{a^{12}}$, $\sqrt[12]{a^{16}}$ 9. $\sqrt[6]{b^3}$, $\sqrt[4]{b^2}$, $\sqrt[4]{b^6}$, $\sqrt[4]{b^{10}}$,

10. $\sqrt[5]{c^{10}}$, $\sqrt[10]{c^5}$, $\sqrt[5]{c^{15}}$, $\sqrt[15]{c^5}$ 11. $\sqrt[18]{p^{12}}$, $\sqrt[12]{p^{18}}$, $\sqrt[10]{p^{12}}$, $\sqrt[10]{p^{15}}$,

12. $\sqrt[3]{q^{3n}}$, $\sqrt[n]{q^{3n}}$, $\sqrt[4]{q^{4n}}$, $\sqrt[n]{q^{7n}}$ 13. $\sqrt{x^{6n}}$, $\sqrt[3]{x^{6n}}$, $\sqrt[n]{x^{6n}}$, $\sqrt[2n]{x^{6n}}$,

14'. $\sqrt[x]{a^{2x} + b^{2x}}$, $\sqrt[x]{(a + b)^{2x}}$ $\sqrt[x]{(a^x + b^x)^2}$, $\sqrt[x]{(a^2 + b^2)^x}$

---

15. $a\sqrt{b}$ *), $5\sqrt{2}$, $2\sqrt{0{,}5}$, $3a\sqrt{x}$

16. $ab\sqrt{c}$, $(a + b)\sqrt{c}$, $(7 - a)\sqrt{x}$, $7a\sqrt{x}$

17. $a\sqrt{\frac{x}{a}}$, $5\sqrt{0{,}6}$, $7\sqrt{\frac{5}{7}}$, $2a\sqrt{\frac{7x}{2a}}$

18. $a\sqrt[3]{b}$, $2\sqrt[3]{3}$, $5\sqrt[3]{4}$, $2a\sqrt[3]{5}$

19. $b\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $2\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$, $4\sqrt[3]{\frac{3}{80}}$, $5\sqrt[3]{\frac{8}{75}}$

20. $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$, $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^3c}{a}}$, $ab\sqrt{\frac{c}{ab}}$, $ab^2\sqrt{\frac{3c}{b^3}}$

21. $\frac{ab^2}{xy^2}\sqrt{\frac{xy^3}{ab^3}}$ $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b^2x}{a^2y}}$, $\frac{a^2}{b}\sqrt[4]{\frac{b^5x}{a^9y}}$, $\frac{ab^n}{xy^n}\sqrt{\frac{ay^3}{b^3x}}$

21_1. $(a+x)\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, $\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$, $\frac{x}{a}\sqrt{\frac{a^4 - 2a^3 + a^2}{x^4 + 2x^3 + x^2}}$

21_2. $(a-x)\sqrt{\frac{9a + 9b}{4a^2 - 8ax + 4x^2}}$, $(a + b)\sqrt{\frac{ax^2 - bx^2}{9a^2 + 18ab + 9b^2}}$

21_3. $(\sqrt{5}-2)\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$, $(\sqrt{10} + \sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$

21_4. $(2\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$, $(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{12 + 5\sqrt{6}}$

---

22. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a}$, $\sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{c} \cdot \sqrt{d}$, $\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[4]{y}$

23. $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$, $\sqrt{m} \cdot \sqrt[4]{m}$, $\sqrt{p} \cdot \sqrt[5]{q}$, $\sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{b}$

*) In den Aufgaben 15. — 21_4. soll der Faktor, welcher vor der Wurzel steht, unter die Wurzel gebracht werden.

24. $\sqrt[4]{c} \cdot \sqrt[6]{c}$, $\sqrt[4]{d} \cdot \sqrt[8]{d}$, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[9]{c}$, $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[8]{y}$

25. $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[9]{a}$, $\sqrt[8]{d} \cdot \sqrt[12]{d}$, $\sqrt[9]{x} \cdot \sqrt[12]{y}$, $\sqrt[12]{p} \cdot \sqrt[16]{q}$

26. $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{x}}$, $\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$, $\sqrt{p} \cdot \sqrt[5]{\frac{q}{p}}$, $\sqrt{n} \cdot \sqrt[6]{\frac{p}{n}}$

27. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$, $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{\frac{a}{x}}$, $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[9]{\frac{y}{x}}$, $\sqrt[4]{d} \cdot \sqrt[5]{\frac{b}{d}}$,

28. $\sqrt{\frac{m}{n}} \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{m}}$, $\sqrt[3]{\frac{q}{p}} \cdot \sqrt[4]{\frac{p}{q}}$, $\sqrt[4]{\frac{q}{p}} \cdot \sqrt[6]{\frac{p}{q}}$, $\sqrt[6]{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt[9]{\frac{y}{x}}$

29. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{6}$, $\sqrt[3]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{10}}$, $\sqrt[3]{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{3}}$

30. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[2n]{y}$, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[nx]{b}$, $\sqrt[mx]{a} \cdot \sqrt[nx]{b}$

31. $\sqrt[2n]{x} \cdot \sqrt[3n]{x}$, $\sqrt{y} \cdot \sqrt[2n]{y}$, $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3n]{x}$, $\sqrt[4]{d} \cdot \sqrt[6n]{d}$

---

32. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}$, $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{b}}$, $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt[5]{c}}$, $\frac{\sqrt{d}}{\sqrt[6]{d}}$ 33. $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$, $\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{y}}$, $\frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt[6]{m}}$, $\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[9]{n}}$

34. $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}}$, $\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[8]{b}}$, $\frac{\sqrt[8]{c}}{\sqrt[12]{c}}$, $\frac{\sqrt[9]{d}}{\sqrt[12]{d}}$ 35. $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt{6}}$, $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt[3]{100}}{\sqrt{10}}$

36. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{2}}$, $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt[3]{9}}$, $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt[3]{16}}$, $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$ 37. $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$, $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[4]{64}}$, $\frac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt[4]{324}}$, $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[4]{729}}$

38. Was muß der Ausdruck $\sqrt[-n]{a}$ bedeuten, wenn man in der Rechnung nach den bisherigen Sätzen auf einen solchen Ausdruck kommt? Wie werden darnach folgende Ausdrücke sich in ihrer einfachsten Form darstellen ohne negative Exponenten:

39. $\sqrt[-n]{a} \cdot \sqrt[n]{a}$, $\sqrt[-3]{a} \cdot \sqrt{a}$, $a \cdot \sqrt[-1]{a}$, $\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[-2]{a}$

40. $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[-2]{a}}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[-1]{a}}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[-2]{a}}$, $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[-3]{a}}$

---

7. Wurzeln aus Wurzeln.

1. $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{b}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[5]{c}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[n]{d}}$

2. $\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}$, $\sqrt[4]{\sqrt{y^4}}$, $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{y^{15}}}$

3. $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{81}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$, $\sqrt{\sqrt[8]{36}}$

4. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{216}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{512}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[3]{256}}$

5. $\sqrt[4]{36}$, $\sqrt[4]{25}$, $\sqrt[4]{49}$, $\sqrt[4]{64}$

6. $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[6]{36}$, $\sqrt[6]{27}$, $\sqrt[6]{81}$

7. $\sqrt[6]{a^2}$, $\sqrt[6]{a^3}$, $\sqrt[6]{a^4 x^2}$, $\sqrt[4]{a^6 x^6}$

8. $\sqrt[9]{8}$, $\sqrt[9]{27}$, $\sqrt[9]{64}$, $\sqrt[9]{125}$

9. $\sqrt[12]{16}$, $\sqrt[12]{27}$, $\sqrt[12]{81}$, $\sqrt[18]{64}$

10. $\sqrt[10]{4}$, $\sqrt[10]{36}$, $\sqrt[10]{32}$, $\sqrt[10]{243}$

11. $\sqrt[9]{a^3}$, $\sqrt[12]{b^8}$, $\sqrt[10]{c^5}$, $\sqrt[9]{d^{12}}$

11′. $\sqrt[9]{8x^6}$, $\sqrt[12]{a^4 b^8}$, $\sqrt[6]{9a^2 b^4}$, $\sqrt[8]{16a^{12}}$

12. $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$,*) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$, $\sqrt{y\sqrt{y}}$, $\sqrt{x\sqrt[3]{y}}$

13. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$, $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$, $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{b\sqrt[3]{c}}}$, $\sqrt[m]{x\sqrt[n]{y\sqrt[p]{z}}}$

14. $\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a}}$, $\sqrt[3]{b^2\sqrt[4]{b}}$, $\sqrt[4]{c\sqrt[3]{c}}$, $\sqrt[4]{d\sqrt[5]{d^3}}$

15. $\sqrt[6]{m\sqrt[5]{m}}$, $\sqrt[5]{n\sqrt[3]{n^2}}$, $\sqrt[5]{p^2\sqrt{p}}$, $\sqrt[5]{q+\sqrt[3]{q^2}}$

16 $\sqrt[7]{p\sqrt[5]{p^2}}$, $\sqrt[5]{q\sqrt[7]{q^3}}$, $\sqrt[5]{m+\sqrt[7]{m^3}}$, $\sqrt[5]{n^3\sqrt[8]{n}}$

17. $x\sqrt{x^{-1}\sqrt{x^{-1}}}$, $y\sqrt[3]{y^{-2}\sqrt[3]{y^{-2}}}$, $a\sqrt[4]{a^{-3}\sqrt[4]{a^{-8}}}$

XIV.

Das Ausziehen der Quadratwurzel.

A. Aus Zahlen.

1_1. $\sqrt{961}$	1_2. $\sqrt{484}$	1_3. $\sqrt{121}$
1_4. $\sqrt{169}$	1_5. $\sqrt{225}$	1_6. $\sqrt{529}$
1_7. $\sqrt{441}$	1_8. $\sqrt{900}$	1_9. $\sqrt{625}$
1. $\sqrt{289}$	2. $\sqrt{361}$	2_1. $\sqrt{841}$
3. $\sqrt{1369}$	4. $\sqrt{1681}$	5. $\sqrt{3249}$

*) Die Ausdrücke in 12.—17. sollen, wenn es möglich ist, so umgeformt werden, daß nur eine Wurzel vorkommt.

6. $\sqrt{4225}$	7. $\sqrt{4900}$	8. $\sqrt{5041}$
9. $\sqrt{7056}$	10. $\sqrt{9604}$	10_1. $\sqrt{9801}$
11. $\sqrt{14161}$	12. $\sqrt{10201}$	13. $\sqrt{56169}$
14. $\sqrt{95481}$	14_1. $\sqrt{8,0089}$	14_2. $\sqrt{388,09}$
15. $\sqrt{119025}$	16. $\sqrt{209764}$	17. $\sqrt{257049}$
18. $\sqrt{877969}$	18_1. $\sqrt{69,8896}$	18_2. $\sqrt{0,822649}$
19. $\sqrt{1555009}$	20. $\sqrt{4153444}$	21. $\sqrt{29495761}$
22. $\sqrt{46335249}$	23. $\sqrt{49533444}$	24. $\sqrt{64128064}$
25. $\sqrt{537729721}$	26. $\sqrt{114597025}$	27. $\sqrt{6092270809}$
28. $\sqrt{6402720289}$	29. $\sqrt{8101080036}$	30. $\sqrt{9820611801}$
30_1. $\sqrt{0,0844309249}$	30_2. $\sqrt{0,00762129}$	30_3. $\sqrt{0,0009979281}$

---

31. $\sqrt{2}$*), $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{0,5}$, $\sqrt{4,5}$, $\sqrt{0,02}$

32. $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{0,03}$, $\sqrt{1\frac{1}{3}}$, $\sqrt{5\frac{1}{3}}$

33. $\sqrt{5}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{0,2}$, $\sqrt{0,8}$, $\sqrt{1,8}$, $\sqrt{3\frac{1}{5}}$

34. $\sqrt{6}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{2\frac{2}{3}}$, $\sqrt{1,5}$, $\sqrt{0,06}$

35. $\sqrt{10}$, $\sqrt{40}$, $\sqrt{90}$, $\sqrt{0,1}$, $\sqrt{0,9}$, $\sqrt{1,6}$, $\sqrt{2,5}$

36. $\sqrt{15}$, $\sqrt{\frac{5}{3}}$, $\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\sqrt{0,6}$, $\sqrt{9,6}$, $\sqrt{6\frac{2}{3}}$, $\sqrt{2\frac{2}{5}}$

---

37. $\sqrt{4}$, $\sqrt{40}$, $\sqrt{0,4}$, $\sqrt{0,04}$, $\sqrt{0,004}$

38. $\sqrt{7}$, $\sqrt{70}$, $\sqrt{0,7}$, $\sqrt{0,07}$, $\sqrt{0,007}$

39. $\sqrt{9}$, $\sqrt{90}$, $\sqrt{0,9}$, $\sqrt{0,09}$, $\sqrt{0,009}$

40. $\sqrt{16}$, $\sqrt{160}$, $\sqrt{1,6}$, $\sqrt{0,16}$, $\sqrt{0,016}$

41. $\sqrt{26}$, $\sqrt{260}$, $\sqrt{2,6}$, $\sqrt{0,26}$, $\sqrt{0,00026}$

42. $\sqrt{65}$, $\sqrt{650}$, $\sqrt{6,5}$, $\sqrt{0,065}$, $\sqrt{0,0065}$

---

*) In jeder Zeile Nr. 31—36 soll nur die erste Wurzel berechnet werden. Die andern sind aus dieser nach S. 59 Nr. 39 u. 40 abzuleiten. — Über die abgekürzte Ausziehung der Quadratwurzel s. Anhang 2.

43. $\sqrt{99}$, $\sqrt{9{,}9}$, $\sqrt{0{,}99}$, $\sqrt{0{,}099}$, $\sqrt{990}$

44. $\sqrt{145}$, $\sqrt{14{,}5}$, $\sqrt{1{,}45}$, $\sqrt{0{,}0145}$, $\sqrt{1450}$

45. $\sqrt{5{,}38}$, $\sqrt{53{,}8}$, $\sqrt{0{,}538}$, $\sqrt{538}$, $\sqrt{5380}$

46. $\sqrt{3{,}785}$, $\sqrt{37850}$, $\sqrt{0{,}3785}$, $\sqrt{37{,}85}$, $\sqrt{0{,}0003785}$

47. $\sqrt{70{,}128}$, $\sqrt{7012{,}8}$, $\sqrt{0{,}00070128}$, $\sqrt{701{,}28}$, $\sqrt{0{,}70128}$

---

48. $\sqrt{\frac{5}{7}}$, $\sqrt{\frac{7}{5}}$, $\sqrt{35}$

49. $\sqrt{\frac{7}{11}}$, $\sqrt{\frac{11}{7}}$, $\sqrt{77}$

50. $\sqrt{\frac{7}{17}}$, $\sqrt{\frac{17}{7}}$, $\sqrt{119}$

51. $\sqrt{\frac{21}{23}}$, $\sqrt{\frac{23}{21}}$, $\sqrt{483}$

52. $\sqrt{5\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{2}{11}}$, $\sqrt{22}$

53. $\sqrt{7\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{3}{23}}$, $\sqrt{69}$

54. $\sqrt{8\frac{4}{7}}$, $\sqrt{2\frac{1}{7}}$, $\sqrt{\frac{7}{15}}$

55. $\sqrt{9\frac{3}{8}}$, $\sqrt{4\frac{1}{6}}$, $\sqrt{6}$

56. $\sqrt{\frac{389}{513}}$ 57. $\sqrt{7\frac{841}{983}}$

58. $\sqrt{51\frac{731}{875}}$ 58_1. $\sqrt{7341\frac{17}{31}}$

---

59. $\sqrt[4]{3418801}$

60. $\sqrt[4]{29986576}$

61. $\sqrt[4]{244140625}$

62. $\sqrt[4]{8882874001}$

63. $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[4]{100}$, $\sqrt[4]{1000}$, $\sqrt[4]{10000}$

64. $\sqrt[4]{0{,}1}$, $\sqrt{0{,}01}$, $\sqrt[4]{0{,}001}$, $\sqrt[4]{0{,}0001}$

65. $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[4]{1{,}6}$, $\sqrt[4]{0{,}16}$, $\sqrt[4]{0{,}016}$, $\sqrt[4]{0{,}0016}$

66. $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[4]{8{,}1}$, $\sqrt[4]{0{,}81}$, $\sqrt[4]{0{,}081}$, $\sqrt[4]{0{,}0081}$

67. $\sqrt[4]{810}$, $\sqrt[4]{8100}$, $\sqrt[4]{81000}$, $\sqrt[4]{810000}$

68. Die Seiten des regulären Vierecks, Achtecks und Sechzehnecks in einem Kreise, dessen Radius $= 1$ ist, sind bezüglich $\sqrt{2}$, $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. Berechne dieselben auf 4 Decimalstellen.

69. Die Seiten eines regulären Dreiecks, Zwölfecks und Vierundzwanzigecks in einem Kreise, dessen Radius $= 1$ ist, sind bezüglich $\sqrt{3}$, $\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. Berechne dieselben auf 4 Decimalstellen.

70. Die Seiten eines Zehnecks, Fünfecks und Zwanzigecks in einem Kreise, dessen Radius $= 1$ ist, sind bezüglich $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}$, $\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}$. Berechne dieselben auf 4 Decimalstellen.

B. Aus Buchstabenausdrücken.

1. $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ 2. $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2}$

3. $\sqrt{a^2 - 6ab^2 + 9b^4}$ 4. $\sqrt{a^{2m} + 2a^m x^n + x^{2n}}$

5. $\sqrt{2 + a^2x^{-2} + a^{-2}x^2}$ 6. $\sqrt{2 + a^{2(m-n)} + a^{2(n-m}}$

7. $\sqrt{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4}$

8. $\sqrt{1 - 2x^3 + x^4 - 2x + 3x^2}$

9. $\sqrt{9x^4 - 12x^3 + 34x^2 - 20x + 25}$

10. $\sqrt{49a^4 - 42a^3b + 37a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4}$

11. $\sqrt{2ab - 2ac - 2bc + a^2 + b^2 + c^2}$

12. $\sqrt{4x^2 - 20ax + 25a^2 + 2a^2x - 5a^3 + \frac{1}{4}a^4}$

13. $\sqrt{2x + 2x^{-1} + 3 + x^2 + x^{-2}}$

14. $\sqrt{13x^4 + 13x^2 + 4x^6 - 14x^3 + 4 - 4x - 12x^5}$

15. $\sqrt{2acx^2 - 2abx - 2adx - 2bcx - 2cdx + 2bd + a^2x^2 + c^2x^2 + b^2 + d^2}$

16. Beweise durch Ausziehung der Wurzel, daß man hat

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \ldots$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 - \ldots$$

Wie leitet man die eine Formel aus der andern ab?

17. Berechne $\sqrt{10}$ mit Hülfe einer der Reihen in Nr. 16., da $\sqrt{10} = \frac{10}{3}\sqrt{1 - \frac{1}{10}}$ ist (7 Decimalstellen).

18. Berechne ebenso $\sqrt{11}$, da man hat $\sqrt{11} = \frac{10}{3}\sqrt{1 - \frac{1}{100}}$, auf 12 Decimalstellen.

19. Berechne in ähnlicher Weise $\sqrt{2}$, da $\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{9}}$ ist, auf 6 Decimalstellen.

20. Berechne ebenso $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ auf 6 Decimalstellen. Es ist $\sqrt{3} = \frac{12}{7}\sqrt{1 + \frac{1}{48}}$ und $\sqrt{5} = \frac{20}{9}\sqrt{1 + \frac{1}{80}}$.

21. Ebenso hat man $\sqrt{6} = \frac{5}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{25}}$, $\sqrt{7} = \frac{8}{3}\sqrt{1 - \frac{1}{64}}$ u. s. w. Berechne beide auf 6 Decimalstellen.

XV.

Das Ausziehen der Kubikwurzel.

A. Aus Zahlen.

1. $\sqrt[3]{9261}$ 2. $\sqrt[3]{12167}$

3. $\sqrt[3]{39304}$ 3_1. $\sqrt[3]{68921}$

3_2. $\sqrt[3]{32768}$ 3_3. $\sqrt[3]{79507}$

4. $\sqrt[3]{103823}$ 5. $\sqrt[3]{148877}$

6. $\sqrt[3]{287496}$ 7. $\sqrt[3]{373248}$

8. $\sqrt[3]{531441}$ 9. $\sqrt[3]{857375}$

9_1. $\sqrt[3]{205,379}$ 9_2. $\sqrt[3]{0,054872}$

9_3. $\sqrt[3]{0,004913}$ 9_4. $\sqrt[3]{0,000343}$

10. $\sqrt[3]{2299968}$ 11. $\sqrt[3]{15069223}$

12. $\sqrt[3]{29218112}$ 13. $\sqrt[3]{156590819}$

14. $\sqrt[3]{350402625}$ 15. $\sqrt[3]{952763904}$

15_1. $\sqrt[3]{8,998912}$ 15_2. $\sqrt[3]{480,048687}$

15_3. $\sqrt[3]{529475,129}$ 15_4. $\sqrt[3]{6,331625}$

15_5. $\sqrt[3]{0,057960603}$ 15_6. $\sqrt[3]{0,007762392}$

15_7. $\sqrt[3]{0,000778688}$ 15_8. $\sqrt[3]{0,000050653}$

15_9. $\sqrt[3]{0,000006859}$ 16. $\sqrt[3]{2237810112}$

17. $\sqrt[3]{29076046875}$ 18. $\sqrt[3]{105890949891}$

19. $\sqrt[3]{130478133248}$ 20. $\sqrt[3]{513345176343}$

21. $\sqrt[3]{758301032159}$ 22. $\sqrt[3]{829789013773}$

22_1. $\sqrt[3]{0,096892315857}$ 22_2. $\sqrt[3]{0,005240822553}$

---

23. $\sqrt[3]{2}$, *) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[3]{6\frac{3}{4}}$, $\sqrt[3]{31\frac{1}{4}}$

24. $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{13\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{500}$

25. $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{36}}$, $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[3]{1\frac{7}{9}}$

26. $\sqrt[3]{9}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{21\frac{1}{3}}$

---

*) Für die Aufgaben 23—39 vgl. S. 70 Anmerk.

27. $\sqrt[3]{10}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{100}}$, $\sqrt[3]{80}$, $\sqrt[3]{\frac{16}{25}}$

28. $\sqrt[3]{12}$, $\sqrt[3]{1\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$, $\sqrt[3]{5\frac{1}{16}}$

---

29. $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{0{,}5}$, $\sqrt[3]{0{,}05}$, $\sqrt[3]{0{,}005}$

30. $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{0{,}8}$. $\sqrt[3]{0{,}08}$, $\sqrt[3]{0{,}008}$

31. $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{2{,}7}$, $\sqrt[3]{0{,}27}$, $\sqrt[3]{0{,}027}$

32. $\sqrt[3]{73}$, $\sqrt[3]{7{,}3}$, $\sqrt[3]{0{,}73}$, $\sqrt[3]{730}$

33. $\sqrt[3]{543}$, $\sqrt[3]{54{,}3}$, $\sqrt[3]{5{,}43}$, $\sqrt[3]{5430}$

34. $\sqrt[3]{9{,}28}$, $\sqrt[3]{0{,}928}$, $\sqrt[3]{0{,}0928}$, $\sqrt[3]{9280}$

35. $\sqrt[3]{0{,}3786}$, $\sqrt[3]{37860}$, $\sqrt[3]{3{,}786}$, $\sqrt[3]{37{,}86}$

---

36. $\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$, $\sqrt[3]{\frac{3}{25}}$, $\sqrt[3]{1\frac{7}{8}}$, $\sqrt[3]{0{,}12}$

37. $\sqrt[3]{\frac{25}{24}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{15}}$, $\sqrt[3]{8\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{225}$

38. $\sqrt[3]{\frac{45}{64}}$, $\sqrt[3]{1\frac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{5\frac{5}{8}}$, $\sqrt[3]{0{,}36}$

39. $\sqrt[3]{\frac{100}{63}}$, $\sqrt[3]{\frac{3}{70}}$, $\sqrt[3]{42\frac{6}{7}}$, $\sqrt[3]{14{,}7}$

40. $\sqrt[3]{\frac{713}{991}}$ 41. $\sqrt[3]{5\frac{317}{793}}$ 42. $\sqrt[3]{18\frac{415}{817}}$ 43. $\sqrt[3]{23\frac{273}{588}}$

---

44. $\sqrt[6]{4826809}$ 45. $\sqrt[6]{308915776}$

46. $\sqrt[6]{1838265625}$ 47. $\sqrt[6]{128100283921}$

48. $\sqrt[6]{10}$, $\sqrt[6]{100}$, $\sqrt[6]{1000}$, $\sqrt[6]{10000}$, $\sqrt[6]{100000}$

49. $\sqrt[6]{0{,}1}$, $\sqrt[6]{0{,}01}$, $\sqrt[6]{0{,}001}$, $\sqrt[6]{0{,}0001}$, $\sqrt[6]{0{,}00001}$

50. $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[6]{6{,}4}$, $\sqrt[6]{0{,}64}$, $\sqrt[6]{0{,}064}$, $\sqrt[6]{0{,}0064}$, $\sqrt[6]{0{,}00064}$

51. $\sqrt[6]{74300}$, $\sqrt[6]{7430}$, $\sqrt[6]{743}$, $\sqrt[6]{74{,}3}$, $\sqrt[6]{7{,}43}$, $\sqrt[6]{0{,}743}$

52. Entwickele die Formel für die Ausziehung der Wurzel des 4. Grades und berechne nach dieser Formel

$\sqrt[4]{194481}$, $\sqrt[4]{1336336}$, $\sqrt[4]{12117361}$, $\sqrt[4]{47458321}$.

B. Aus Buchstabenausdrücken.

1. $\sqrt[3]{54x - 36x^2 + 8x^3 - 27}$
2. $\sqrt[3]{8 - 60x + 150x^2 - 125x^3}$
3. $\sqrt[3]{27x^3 - 189x^2y + 441xy^2 - 343y^3}$
4. $\sqrt[3]{300ab^2 - 240a^2b - 125b^3 + 64a^3}$
5. $\sqrt[3]{a^6 - 3a^5b + 6a^4b^2 - 7a^3b^3 + 6a^2b^4 - 3ab^5 + b^6}$
6. $\sqrt[3]{8x^6 - 36x^5 + 66x^4 - 63x^3 + 33x^2 - 9x + 1}$
7. $\sqrt[3]{8x^3 - 12x^2 + 30x - 25 + 30x^{-1} - 12x^{-2} + 8x^{-3}}$

8. Beweise durch Ausziehung der Kubikwurzel die Richtigkeit folgender Reihenentwickelungen:

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \frac{22}{729}x^5 - \ldots$$

$$\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 - \frac{22}{729}x^5 - \ldots$$

Wie leitet man aus einer Formel die andere ab?

9. Berechne mit Hilfe einer der Reihen $\sqrt[3]{37}$ auf 15 Decimalstellen (5 Glieder der Reihe genügen), da $\sqrt[3]{37} = \frac{10}{3}\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1000}}$ ist.

10. Berechne ebenso $\sqrt[3]{28} = 3\sqrt[3]{1 + \frac{1}{27}}$ auf 9 Decimalstellen (6 Glieder genügen).

XVI.

Bruchpotenzen.

Da nach dem XIII. Abschnitt $a^{\frac{nx}{n}}$ und $\sqrt[n]{a^{nx}}$ einander gleich sind, so kann man dem Ausdruck $a^{\frac{m}{n}}$, wenn man in der Rechnung überhaupt auf einen solchen kommt, konsequenter Weise keine andere Bedeutung beilegen als $\sqrt[n]{a^m}$. Der Ausdruck $a^{\frac{m}{n}}$, dessen Bedeutung hiernach fest-

gestellt ist, heißt eine Potenz, weil er dieselbe Form hat und denselben Gesetzen unterworfen ist, wie a^n, wenn n eine ganze Zahl ist.

Beweise die Sätze:

$$1.\ a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

$$2.\ \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$

$$3.\ (ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$$

$$4.\ \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

$$5.\ \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$$

Auch für den Ausdruck $a^{\frac{m}{n}}$ heißt a die Basis und $\frac{m}{n}$ der Exponent, obgleich weder die Basis und der Exponent, noch die Potenz selber die einfache Erklärung zulassen, welche für Potenzen mit ganzen positiven Exponenten aufgestellt ist. — Anstatt Potenzen mit gebrochenen Exponenten, oder Potenzen, deren Exponenten Brüche sind, sagt man auch kurz Bruchpotenzen.

Bei den folgenden Aufgaben sollen die Ausdrücke in 1. — 7. als Bruchpotenzen, die Ausdrücke in 8. — 16. als Wurzeln und Potenzen mit ganzen positiven Exponenten dargestellt werden. Die Ausdrücke in 17.—24. sind zu berechnen. Bei den folgenden Aufgaben 25.—48. sind die oben gegebenen Sätze anzuwenden und beim Resultat die Brüche und aus dem Exponenten das negative Zeichen fortzuschaffen.

1. $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{b^3}$, $\sqrt[5]{c^6}$, $\sqrt[6]{d^5}$

2. $\sqrt{m}$, $\sqrt[4]{n}$, $\sqrt[4]{p^3}$, $\sqrt[5]{q}$

3. $\sqrt[3]{x^5}$, $\sqrt[n]{y^p}$, $\sqrt[n]{n}$, $\sqrt[3]{v^{n-p}}$

4. $\sqrt{a+b}$, $\sqrt[4]{(a-b)^3}$, $(\sqrt[3]{x-y})^2$, $\sqrt[3]{x^2+y^2}$

5. $\sqrt[3]{3ax}$, $\sqrt[3]{a+3}$, $\sqrt[x]{ax}$, $\sqrt[x]{(a-b)x}$

6. $\sqrt[3]{a^3-b^3}$, $\sqrt[6]{a^6+b^6}$, $\sqrt[n]{(a-bx)^{n-1}}$, $\sqrt[m]{(x-y)^{2n-m}}$

7. $\sqrt{(x^2-xy+y^2)^3}$, $\sqrt[3]{(ax^3-bx^2+c)^2}$

8. $a^{\frac{2}{3}}$, $b^{\frac{3}{4}}$, $c^{\frac{1}{2}}$, $d^{\frac{1}{3}}$

9. $m^{\frac{3}{4}}$, $n^{\frac{1}{4}}$, $p^{\frac{3}{8}}$, $q^{\frac{1}{8}}$

10. $x^{\frac{n}{p}}$, $y^{\frac{1}{n}}$, $u^{n+\frac{1}{2}}$, $v^{n-\frac{3}{4}}$

11. $a^{3\frac{1}{2}}$, $b^{2\frac{1}{3}}$, $c^{1\frac{1}{3}}$, $d^{4\frac{3}{4}}$

12. $u^{-\frac{2}{3}}$, $x^{-\frac{1}{4}}$, $x^{-1\frac{1}{2}}$, $y^{-3\frac{1}{3}}$

12′. $x^{0,5}$, $x^{1,2}$, $x^{-0,25}$ $x^{-1,75}$

13. $(a-b)^{\frac{1}{3}}$, $(c+d)^{\frac{1}{2}}$, $(ax-b)^{\frac{3}{4}}$, $(7x-3y)^{\frac{3}{7}}$

14. $(px-q)^{\frac{p}{q}}$, $(a-bx)^{\frac{b}{a}}$, $(ax-b)^{\frac{n-1}{2}}$, $(x-y)^{\frac{m-3}{4}}$

15. $(a^3-b^3)^{-\frac{1}{3}}$, $(x^2-y^2)^{-\frac{5}{2}}$, $(m-n)^{p+\frac{2}{3}}$ $(p-q)^{n-\frac{1}{4}}$

16. $(x^2+3x-5)^{\frac{3}{2}}$, $(x^2-2xy+3y^2)^{-\frac{1}{4}}$

---

17. $36^{\frac{1}{2}}$, $27^{\frac{1}{3}}$, $16^{\frac{1}{4}}$, $32^{\frac{1}{5}}$

18. $4^{\frac{5}{2}}$, $8^{\frac{2}{3}}$, $27^{\frac{4}{3}}$, $64^{\frac{2}{3}}$

19. $32^{\frac{3}{5}}$, $64^{\frac{1}{6}}$, $64^{\frac{5}{6}}$, $81^{\frac{3}{4}}$

20. $(3\frac{3}{8})^{\frac{1}{3}}$, $(3\frac{3}{8})^{\frac{2}{3}}$, $(5\frac{1}{16})^{\frac{1}{4}}$, $(5\frac{1}{16})^{\frac{3}{4}}$

21. $(0,25)^{\frac{1}{2}}$, $(0,027)^{\frac{1}{3}}$, $(0,0081)^{\frac{1}{4}}$, $(0,00032)^{\frac{1}{5}}$

22. $32^{0,2}$, $49^{0,5}$, $16^{0,25}$ $81^{0,75}$

23. $36^{-\frac{1}{2}}$, $27^{-\frac{2}{3}}$, $(0,16)^{-\frac{1}{2}}$, $(0,0016)^{-\frac{3}{4}}$

24. $(\frac{1}{25})^{-\frac{1}{2}}$, $(\frac{1}{64})^{-\frac{2}{3}}$, $(\frac{9}{16})^{-\frac{3}{2}}$, $(\frac{16}{81})^{-\frac{3}{4}}$

---

25. $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$, $b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}}$, $c^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{1}{12}}$, $d^{\frac{3}{5}} \cdot d^{\frac{1}{15}}$

26. $m^{\frac{1}{2}} \cdot m^{-\frac{1}{6}}$, $n^{\frac{3}{4}} \cdot n^{-\frac{1}{12}}$, $p^{\frac{2}{3}} \cdot p^{-\frac{1}{15}}$, $q^{-\frac{1}{4}} \cdot q^{-\frac{1}{12}}$

27. $a^0 \cdot a^{\frac{1}{2}}$, $a^0 \cdot a^{-\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}$, $a \cdot a^{-\frac{4}{3}}$

28. $a^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{a}$, $c^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{c}$, $x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{x}$, $y^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{y}$

29. $x^{\frac{2}{5}} \sqrt[5]{x^3}$, $y^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[5]{y^{-3}}$, $u^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt[6]{u}$, $v^{\frac{5}{8}} \sqrt{v^{-1}}$

30. $ab^{\frac{1}{2}}c \cdot a^{-\frac{1}{2}}bc^{\frac{1}{3}}$, $\quad a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}d$

31. $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{6}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{2}}$, $\quad x^{\frac{5}{8}}y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{8}}y^{-\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{2}}$

---

32. $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}$, $\quad \dfrac{b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{4}}}$, $\quad \dfrac{c^{\frac{5}{8}}}{c^{\frac{1}{2}}}$, $\quad \dfrac{d^{\frac{7}{10}}}{d^{\frac{1}{5}}}$

33. $\dfrac{m^{\frac{1}{6}}}{m^{\frac{1}{5}}}$, $\quad \dfrac{n^{\frac{3}{8}}}{n^{\frac{1}{2}}}$, $\quad \dfrac{p^{\frac{7}{12}}}{p^{\frac{3}{4}}}$, $\quad \dfrac{q^{\frac{5}{9}}}{q^{\frac{2}{3}}}$

34. $\dfrac{x^{\frac{8}{15}}}{x^{\frac{1}{5}}}$, $\quad \dfrac{y^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{7}{12}}}$, $\quad \dfrac{u^{\frac{1}{18}}}{u^{\frac{1}{2}}}$, $\quad \dfrac{v^{\frac{1}{5}}}{v^{\frac{9}{20}}}$

35. $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}}$; $\quad \dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a}}$, $\quad \dfrac{a^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{a}}$, $\quad \dfrac{a^{\frac{5}{6}}}{\sqrt[3]{a^2}}$

36. $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{a^3}}$, $\quad \dfrac{a^{\frac{3}{8}}}{\sqrt[4]{a}}$, $\quad \dfrac{a^{\frac{1}{12}}}{\sqrt[3]{a}}$, $\quad \dfrac{a^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{a}}$

$36_1'$. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x^{\frac{1}{6}}}$, $\quad \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{x^{\frac{2}{3}}}$, $\quad \dfrac{\sqrt[12]{x^5}}{x^{\frac{1}{4}}}$, $\quad \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{x^{\frac{11}{20}}}$

---

37. $a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$, $\quad a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}}$, $\quad c^{\frac{2}{5}} \cdot d^{\frac{3}{5}}$, $\quad c^{\frac{1}{6}} \cdot d^{\frac{5}{6}}$

38. $m^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{3}}$, $\quad m^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{6}}$, $\quad p^{\frac{1}{5}} \cdot q^{\frac{1}{10}}$, $\quad p^{\frac{2}{3}} \cdot q^{\frac{5}{6}}$

39. $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}$, $\quad \dfrac{a^{\frac{2}{5}}}{b^{\frac{3}{5}}}$, $\quad \dfrac{a^{\frac{3}{7}}}{b^{\frac{1}{7}}}$, $\quad \dfrac{a^{\frac{5}{8}}}{b^{\frac{3}{8}}}$

40. $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{4}}}$, $\quad \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{5}{6}}}$, $\quad \dfrac{u^{\frac{1}{4}}}{v^{\frac{1}{3}}}$, $\quad \dfrac{u^{\frac{2}{5}}}{v^{\frac{1}{15}}}$

41. $(\frac{4}{5})^{\frac{1}{2}} \cdot (3\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{3}{2})^{\frac{1}{2}}$, $\quad (7\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} \cdot (2\frac{2}{3})^{\frac{1}{3}} \cdot (3\frac{1}{5})^{\frac{1}{3}}$

42. $(2\frac{2}{5})^{\frac{3}{4}} \cdot (6\frac{2}{3})^{\frac{3}{4}} \cdot (\frac{1}{4})^{1\frac{1}{2}}$, $\quad (1\frac{3}{5})^{\frac{3}{2}} \cdot (22\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}} \cdot (3\frac{3}{8})^{-\frac{2}{3}}$

---

43. $(a^6)^{\frac{1}{2}}$, $\quad (b^9)^{\frac{1}{3}}$, $\quad (c^{20})^{\frac{1}{4}}$, $\quad (d^{10})^{\frac{1}{5}}$

44. $(x^6)^{\frac{2}{3}}$, $\quad (y^8)^{\frac{3}{4}}$, $\quad (u^{10})^{\frac{3}{5}}$, $\quad (v^4)^{\frac{3}{4}}$

45. $(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{5}}$, $\quad (b^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}$, $\quad (c^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}}$, $\quad (d^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}}$

46. $(m^{-\frac{1}{2}})^{4}$, $\quad (n^{\frac{1}{3}})^{-3}$, $\quad (p^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{2}{3}}$, $\quad (q^{\frac{2}{5}})^{-\frac{1}{2}}$

47. $(a^2b^3)^{\frac{1}{6}}$, $\quad (a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{6}{5}})^{\frac{10}{3}}$, $\quad (a^2d^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$, $\quad (a^5b^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{5}}$

48. $(x^{12}y^6)^{\frac{5}{6}}$, $\quad (x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{3}{4}})^{12}$, $\quad (x^{\frac{3}{8}}y^{\frac{9}{4}})^{-\frac{4}{9}}$, $\quad (x^{\frac{1}{7}}y^{\frac{1}{8}})^{14}$

XVII.

Imaginäre Größen.

Unter imaginären oder unmöglichen Größen versteht man im allgemeinen Wurzeln von einem geraden Grade aus negativen Zahlen (S. 49). Die einfachste imaginäre Größe ist $\sqrt{-1}$. Durch diese lassen sich mit Hinzuziehung reeller Größen alle imaginären Größen ausdrücken. Wegen dieser Wichtigkeit der Größe $\sqrt{-1}$ pflegt man sie mit dem Buchstaben i zu bezeichnen. Dann sind alle imaginären Größen auf die Form $p + q\sqrt{-1}$ oder $p + qi$ zu bringen, wo p und q reelle Größen sind. Ist $p = 0$, so bleibt nur qi, eine rein imaginäre Größe.

Als Wurzelgrößen sind die imaginären Größen den über Wurzelgrößen aufgestellten Gesetzen unterworfen. Man hat hier besonders zu merken:

1. $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$
2. $(\sqrt{-a})^2 = -a,\ i^2 = -1$
3. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$.

In den nachstehenden Aufgaben soll der gegebene Ausdruck auf die einfachste Form gebracht oder die angedeutete Operation ausgeführt werden. In Nr. 54.—70. sind die Wurzeln aus dem Nenner fortzuschaffen. In Nr. 71.—75. soll das Reinimaginäre vom Reellen gesondert, der Ausdruck also auf die Form $p + qi$ gebracht werden. Bei den Aufgaben, in welchen das Imaginäre noch nicht durch i ausgedrückt ist, wird man meistens am besten thun, das i zunächst einzuführen und dann erst die Reduktion oder Operation vorzunehmen. In den Resultaten soll das Imaginäre stets durch i bezeichnet werden.

1.	$\sqrt{-36}$	$\sqrt{-49}$	$\sqrt{-81}$	$\sqrt{-100}$
2.	$\sqrt{-4}$	$\sqrt[3]{-8}$	$\sqrt[4]{-16}$	$\sqrt[3]{-125}$
3.	$\sqrt{-a^2}$	$\sqrt{-b^4}$	$\sqrt{-x^{2n}}$	$\sqrt[3]{-x^{3n}}$
4.	$\sqrt{-8}$	$\sqrt{-12}$	$\sqrt{-48}$	$\sqrt{-96}$
5.	$5\sqrt{-40}$	$2\sqrt[3]{-40}$	$3\sqrt{-72}$	$4\sqrt[3]{-72}$
6.	$\sqrt{-a^2b}$	$\sqrt{-3ax^4}$	$\sqrt{-9x^2y}$	$2\sqrt{-8x^2y^3}$
7.	$\sqrt{-x}.\sqrt{-x}$,	$\sqrt{-x}.\sqrt{-y}$,	$\sqrt{-a}.\sqrt{-1}$,	$\sqrt{-a^2}.\sqrt{-1}$
8.	$\sqrt{3}.\sqrt{-b}$,	$\sqrt{-8}.\sqrt{-12}$,	$\sqrt{15}.\sqrt{-5}$,	$\sqrt{-5}.\sqrt{-20}$
9.	i^2	i^3	i^4	i^5
10.	i^{13}	i^{14}	i^{15}	i^{16}
10_1.	$ai\,.\,bi$	$i\sqrt{a}\,.\,i\sqrt{b}$	$2i\,.\,5i$	$7i\,.\,i^2\sqrt{7}$

$10_2.$ $i\sqrt{-a}$ $\quad i\sqrt{-x^2}$ $\quad i\sqrt[3]{-x^3}$ $\quad i\sqrt{a}\,.\,\sqrt{-a}$

$10_3.$ $i\sqrt{x}\,.\,\sqrt{-xy^2}$, $\quad 3i\sqrt{-n}\,.\,\sqrt{4n}$, $\quad 5i^2\sqrt{-9n}$, $\quad i^3\sqrt{-5p^2}$

$10_4.$ i^{4n} $\quad i^{4n+1}$ $\quad i^{4n-1}$ $\quad i^{4n-2}$

$10_5.$ $\sqrt{-i^2}$ $\quad \sqrt{-i^3}$ $\quad \sqrt{-i^4}$ $\quad \sqrt{-i^5}$

11. $\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{-3}}$ $\quad \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}$ $\quad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$ $\quad \frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-6}}$

12. $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ $\quad \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}$ $\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}$ $\quad \frac{\sqrt{-ax}}{\sqrt{-x}}$

13. $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ $\quad \frac{a}{\sqrt{-a}}$ $\quad \frac{a^2}{\sqrt{-a^2}}$ $\quad \frac{a^3}{\sqrt[3]{-a^3}}$

$13_1.$ $\frac{1}{i^2}$ $\quad \frac{1}{i^3}$ $\quad \frac{1}{i^4}$ $\quad \frac{1}{i^5}$

$13_2.$ $\frac{ai}{\sqrt{-a}}$ $\quad \frac{b}{i\sqrt{b}}$ $\quad \frac{-c}{i\sqrt{-c^2}}$ $\quad -\frac{di^3}{\sqrt{-d^2}}$

14. $\sqrt{a-b}\,.\,\sqrt{b-a}$ 15. $\sqrt{3x-5y}\,.\,\sqrt{5y-3x}$

16. $(3+5i)(7+4i)$ 17. $(2-5i)(8-3i)$

18. $(7-8i)(5+6i)$ 19. $(8-9i)(8-7i)$

20. $(11-12i)(11-10i)$ 21. $(3+i\sqrt{2})(5+7i\sqrt{2})$

22. $(5-2i\sqrt{7})(6-2i\sqrt{7})$ 23. $(7+3i\sqrt{8})(5-4i\sqrt{2})$

24. $(a+bi)(c+di)$ 25. $(\sqrt{a}+i\sqrt{b})(\sqrt{c}+i\sqrt{d})$

26. $(\sqrt{3}-i\sqrt{6})(\sqrt{2}-i\sqrt{6})$ 27. $(\sqrt{10}-i\sqrt{18})(\sqrt{5}-i\sqrt{45})$

28. $(2\sqrt{7}+3i\sqrt{8})(3\sqrt{7}-10i\sqrt{2})$

29. $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{3})$

30. $(a+bi)(a-bi)$ 31. $(ai+b)(ai-b)$

32. $(\sqrt{a}+i\sqrt{b})(\sqrt{a}-i\sqrt{b})$

33. $(a\sqrt{b}+ci\sqrt{d})(a\sqrt{b}-ci\sqrt{d})$

34. $(3+2i)(3-2i)$ 35. $(5+7i)(5-7i)$

36. $(3\sqrt{3}+2i\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2i\sqrt{2})$

37. $(2\sqrt{5}+5i\sqrt{2})(2\sqrt{5}-5i\sqrt{2})$

$37_1.$ $\sqrt{1+i}\,.\,\sqrt{1-i}$ $\quad 37_2.$ $\sqrt{3+4i}\,.\,\sqrt{3-4i}$

$37_3.$ $\sqrt{33+56i}\,.\,\sqrt{33-56i}$ $\quad 37_4.$ $\sqrt{55i+48}\,.\,\sqrt{55i-48}$

38. $(\sqrt{a}+\sqrt{-a})^2$

39. $(1+i)^2$

40. $(3+2i\sqrt{2})^2$

41. $(5-2i\sqrt{6})^2$

42. $(a+bi)^2$

43. $(\sqrt{a}-i\sqrt{b})^2$

43_1. $(a+bi)^2+(a-bi)^2$

43_2. $(a+bi)^2-(a-bi)^2$

43_3. $(a+bi)^2+(ai-b)^2$

43_4. $(7+5i)^2+(7-5i)^2$

43_5. $(\sqrt{1+i}+\sqrt{1-i})^2$

43_6. $(\sqrt{4+3i}+\sqrt{4-3i})^2$

44. $(1+i)^3$

44_1. $(3-2i)^3$

45. $(1+i)^4$

45_1. $(a+bi)^4$

45_2. $(a+bi)^3+(a-bi)^3$

45_3. $(m+ni)^3-(m-ni)^3$

46. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

47. $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

47_1. $(p+qi)^4+(p-qi)^4$

47_2. $(p+qi)^4-(pi+q)^4$

47_3. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4$

47_4. $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^4$

48. $(\sqrt{5}+i\sqrt{7})^4+(\sqrt{5}-i\sqrt{7})^4$

49. $(1+i\sqrt{5})^4+(1-i\sqrt{5})^4$

50. $(5+2i\sqrt{6})^4+(5-2i\sqrt{6})^4$

50_1. $(3+2i\sqrt{2})^4-(3-2i\sqrt{2})^4$

50_2. $(a+bi)^5+(a-bi)^5$

50_3. $(a+bi)^5-(a-bi)^5$

50_4. $(1+i)^5+(1-i)^5$

51. $(1+i\sqrt{2})^5+(1-i\sqrt{2})^5$

52. $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4$

53. $\left(\frac{3+i\sqrt{7}}{2}\right)^5+\left(\frac{3-i\sqrt{7}}{2}\right)^5$

53_1. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6$

53_2. $\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^6$

---

54. $\frac{4}{1+\sqrt{-3}}$

55. $\frac{64}{1+3\sqrt{-7}}$

56. $\frac{29}{4+7\sqrt{-5}}$

57. $\frac{21}{4+3i\sqrt{6}}$

58. $\frac{5}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$

59. $\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{-1}}$

60. $\frac{1-20i\sqrt{5}}{7-2i\sqrt{5}}$

61. $\frac{5-29i\sqrt{5}}{7-3i\sqrt{5}}$

62. $\frac{1+33i\sqrt{3}}{4+3i\sqrt{3}}$

63. $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

64. $\frac{1+i}{1-i}$

65. $\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$

65_1. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$

65_2. $\frac{1-i^3}{1-i}$

65_3. $\frac{1+i^3}{1-i}$

65_4. $\frac{1+i}{(1-i)^3}$

65_5. $\frac{1-i^3}{(1+i)^3}$

65_6. $\frac{m+ni}{m-ni}$

66. $\frac{a+i\sqrt{b}}{a-i\sqrt{b}}$

67. $\frac{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}$

67_1. $\frac{a-bi}{ai+b}$

$67_2.\ \frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$ $67_3.\ \frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$

$67_4.\ \frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1-i)^2}$ $67_5.\ \frac{1}{(1+i)^4}-\frac{1}{(1-i)^3}$

$67_6.\ \frac{\sqrt{x-y}+\sqrt{y-x}}{\sqrt{x-y}-\sqrt{y-x}}$ $67_7.\ \frac{x+i\sqrt{1-x^2}}{x-i\sqrt{1-x^2}}$

68. $\frac{a+bi}{c+di}+\frac{a-bi}{c-di}$ 69. $\frac{a+bi}{c+di}-\frac{a-bi}{c-di}$

70. $\frac{a+bi}{a-bi}+\frac{c+di}{c-di}$ $70_1.\ \frac{\sqrt{x}+i\sqrt{y}}{\sqrt{x}-i\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}+i\sqrt{x}}{\sqrt{y}-i\sqrt{x}}$

$70_2.\ \frac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}}-\frac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$

---

71. $\sqrt{3+4i}\pm\sqrt{3-4i}$, $\sqrt{4+3i}\pm\sqrt{4-3i}$

72. $\sqrt{5+2i\sqrt{6}}\pm\sqrt{5-2i\sqrt{6}}$, $\sqrt{11+4i\sqrt{3}}\pm\sqrt{11-4i\sqrt{3}}$

73. $\sqrt{5+12i}$, $\sqrt{9-40i}$, $\sqrt{2+2i\sqrt{3}}$, $\sqrt{1-6i\sqrt{10}}$

74. $\sqrt{7+30i\sqrt{2}}$, $\sqrt{3+2i\sqrt{10}}$, $\sqrt{1-4i\sqrt{14}}$, $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$

75. $\sqrt{a+i\sqrt{x^2-a^2}}\pm\sqrt{a-i\sqrt{x^2-a^2}}$

XVIII.

Von den Logarithmen.

I. $\log ab = \log a + \log b$ **II.** $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$

III. $\log a^n = n \cdot \log a$ **IV.** $\log\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\cdot\log a.$

A. Einführung in die Lehre von den Logarithmen.

Da b^x im allgemeinen nicht gleich x^b ist, man also bei einer Potenz Basis und Exponent nicht mit einander vertauschen kann, ohne den Wert der Potenz zu ändern, so muß das Potenzieren zwei Umkehrungen haben. Die eine, wo man die Basis b oder die Wurzel sucht, das Radizieren, ist im XIII. Abschnitt vorgekommen; die andere, wo man den Exponenten x sucht, ist das Logarithmieren.

Wenn in der Gleichung $b^x = a$ die Größen b und x gegeben sind und die Größe a gesucht wird, so geschieht dies vermittelst des Potenzierens, und man nennt a oder b^x die x. Potenz von b. Wenn von den drei Größen in der Gleichuug $b^x = a$ die Größen a und x gegeben sind und b gesucht wird, so geschieht dies vermittelst des Radizierens; man nennt b die x. Wurzel aus a und schreibt $\sqrt[x]{a} = b$. Wenn von den drei Größen in der Gleichung $b^x = a$ die Größen a und b gegeben sind und x, der Exponent, gesucht wird, so geschieht dies vermittelst des Logarithmierens; man nennt x den

Logarithmus von a für die Basis b und schreibt $\log a_{(b)} = x$. Die Gleichung $\log a_{(b)} = x$ ist daher, wie $\sqrt[x]{a} = b$, nur eine andere Form der Gleichung $b^x = a$. Alle diese drei Gleichungen bedingen sich gegenseitig. Ist daher $b^x = a$, so muß auch $\log a_{(b)} = x$ sein, und umgekehrt, wenn die eine Gleichung gilt, muß die andere auch gelten. Die Gleichung $\log a_{(b)} = x$ ist dann richtig, wenn $b^x = a$ ist. Die Größe x heißt der Logarithmus, b die Basis, a der Logarithmand, oder kurz die Zahl oder der Numerus. Ist die Basis einmal festgestellt, so wird sie als selbstverständlich angesehen und nicht weiter notiert. Dann ist Logarithmus einer Zahl die Zahl, mit welcher man die Basis zu potenzieren hat, um den Logarithmanden zu erhalten.

1. Welches sind demnach für die Basis 2 die Logarithmen der Zahlen 2, 4, 64, 16, 128, 32, 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$?

2. Welches sind für die Basis 3 die Logarithmen der Zahlen 9, 81, 3, 27, 1, 243, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{81}$?

3. Wie groß muß umgekehrt in jedem einzelnen Falle die Basis sein, wenn man hat $\log 49 = 2$, $\log 81 = 4$, $\log 5329 = 2$, $\log 2197 = 3$, $\log 83521 = 4$?

4. Was heißt ein Logarithmensystem?

5. Welche Sätze lassen sich für die Rechnung mit Logarithmen, die alle demselben System angehören, aufstellen, wie werden dieselben bewiesen, und wie heißen dieselben in Worten?

6. Welches Logarithmensystems bedient man sich gewöhnlich zur Rechnung?

7. Wie nennt man noch besonders die Logarithmen für die Basis 10? (Grund!)

8. Wie groß sind für das Briggssche System $\log 10$, $\log 100$, $\log 1000$, $\log 1000000$, $\log 10000$? ferner $\log 1$, $\log 0{,}1$, $\log 0{,}0001$, $\log 0{,}01$, $\log 0{,}00001$?

9. Zwischen welchen Zahlen für die Basis 10 liegen die Logarithmen von 5, 9, 23, 48, 73, 385, 888, 1768? Zwischen welchen Zahlen jedoch für die Basis 7?

10. Worin liegt daher der Vorteil des Briggsschen Systems vor andern Systemen?

11. Was heißt das, wenn man für das Briggssche Logarithmensystem sagt $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$, $\log 10000 = 4$, $\log 10 = 1$, $\log 1 = 0$? Was heißt es weiter, wenn man genähert hat $\log 126 = 2{,}1$, $\log 251 = 2{,}4$, $\log 464 = 2\frac{2}{3}$, $\log 501 = 2{,}7$, $\log 631 = 2{,}8$?

12. Von welchen Zahlen können im Briggsschen System die Logarithmen nur ganze Zahlen sein?

13. In welcher Form werden daher fast alle Logarithmen erscheinen müssen?

14. Wie nennt man die ganze Zahl bei einem Logarithmus, und wie den Decimalbruch?

15. Wie groß muß die Kennziffer sein für eine Zahl, die größer ist als 1?

16. Wie groß muß die Kennziffer der Logarithmen folgender Zahlen sein: 5, 71, 625, 99, 8017, 101, 10001, 9, 8796, 83, 517634?

17. Desgleichen von folgenden Zahlen: 27,4, 804,71, 1,0837, 98403,08, 1765,07, 34,809, 5,76?

18. Von welcher Zahl ist der Logarithmus gerade gleich Null? Ist das in jedem System oder für jede Basis der Fall?

19. Von welchen Zahlen müssen die Logarithmen negativ sein?

20. Wie groß müssen log 530, log 5300, log 53000, log 5300000, log 5,3, log 0,53, log 0,0053 sein, wenn log 53 = 1,7243 ist? (Beweis!)

21. Wie groß müssen log 4870, log 48700, log 4870000, log 48,7, log 0,487, log 0,00487 sein, wenn log 487 = 2,6875 ist?

22. Unter welcher Form stellt man daher die Logarithmen aller Zahlen dar, welche kleiner als 1 sind?

23. Von welchen Zahlen wird man daher den Logarithmus sofort haben, wenn man die Logarithmen der ganzen Zahlen hat?

24. Wie findet man daher den Logarithmus eines Decimalbruchs?

25. Wie groß muß die Kennziffer bei einer Decimalzahl sein, die vorn noch Ganze hat. Wie groß bei einem Decimalbruch, der vorn keine Ganze hat?

26. Wenn log 194 = 2,2878 ist, wie groß ist dann log 0,0194? Wie wird ein solcher Logarithmus mit negativer Kennziffer auch oft geschrieben, und wie werden mit dieser Abkürzung log 0,194 und log 0,000194 heißen?

27. Wie werden nach der abgekürzten Bezeichnung log 0,87, log 0,087, log 0,0000087 heißen, wenn log 87 = 1,9395 ist?

28. Wie groß sind $\log \frac{1}{13}$, $\log \frac{1}{130}$, $\log \frac{1}{1300}$, $\log \frac{1}{13000}$, $\log \frac{1}{1,3}$, $\log \frac{1}{0,13}$, $\log \frac{1}{0,013}$, wenn log 13 = 1,1139 ist?

29. Wie groß muß log 0 sein?

30. Was gilt von den Logarithmen negativer Zahlen?

31. Kann man alle Zahlen zur Basis eines Logarithmensystems gebrauchen? Weshalb 0 und 1 nicht?

32. Weshalb eignet sich eine negative Zahl nicht zur Basis eines Logarithmensystems?

33. Wenn man für ein Logarithmensystem, dessen Basis b ist, $\log a = \alpha$, $\log a_1 = \alpha_1$, $\log a_2 = \alpha_2$, $\log a_3 = \alpha_3$ u. s. w. hat, wie groß werden dann $\log a$, $\log a_1$, $\log a_2$ u. s. w. in einem System sein, dessen Basis c ist?

34. Wenn man alle Briggsschen Logarithmen in andere umrechnen wollte, welche die Basis 7 hätten, wie hätte man da zu verfahren?

35. Von welchen Zahlen braucht man überhaupt nur die Logarithmen zu wissen, um auch leicht die Logarithmen aller übrigen Zahlen finden zu können?

36. Wenn man hat log 2 = 0,30103 und log 3 = 0,47712, wie groß sind dann log 4, log 5, log 6, log 8, log 9, log 12,

log 15, log 16, log 18, log 20, log 24, log 25, log 27, log 30, log 32, log 36, log 40, da log 10 = 1 ist (für die Basis 10)?

37. Auf welchem Wege ist nach dem Bisherigen die Berechnung eines Logarithmus denkbar? (s. Anhang 3).

38. Es wird sich später ohne erhebliche Schwierigkeiten nachweisen lassen, daß man für irgend eine Basis hat

$$\log (1 + x) = M \cdot (x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \ldots),$$

wo M eine Zahl ist, die sich nach der Größe der Basis richtet und der Modul des Systems heißt. Für die Basis 10 ist $M = 0{,}4342944819$, wofür man ziemlich genau $\frac{304}{700}$ setzen kann (vgl. XIX, 48). Berechne hiernach mit Hilfe der Reihe auf 5 Decimalstellen log 11, log 101 und log 1001, indem du bezüglich $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ und $\frac{1}{1000}$ setzest.

39. Berechne mit Hilfe von log 11 den log 3, indem du $x = \frac{1}{99}$ setzest; mit Hilfe von log 3 auch log 2, indem du $x = \frac{1}{80}$ setzest; mit Hilfe von log 2 den log 5, da log 10 = 1 ist; mit Hilfe von log 5 den log 7, indem du $x = \frac{1}{49}$ setzest. Hat man log 2, log 3, log 5, log 7 und log 11 berechnet, so lassen sich aus diesen fünf Logarithmen die ersten 50 alle bis auf 14 durch einfache Addition finden. (Über die allgemeine Berechnung der Logarithmen siehe Anhang 4.)

B. Anwendung der Sätze von den Logarithmen und ihre Umkehrung.

1. $\log abc$
2. $\log 3ax(x + y)$
3. $\log \dfrac{ab}{c(x + 7)}$
4. $\log \dfrac{(a + b)x}{(c - d)y}$
5. $\log ab^2$
6. $\log (ab)^2$
7. $\log (a^2 + b^2)$
8. $\log (a^2 - b^2)$
9. $\log a\sqrt[3]{b}$
10. $\log \sqrt{ab}$
11. $\log 5a^2b\sqrt[3]{c}$
12. $\log 7x\sqrt[4]{ab^3}$
13. $\log 31x(7x - 8)^3$
14. $\log 8a^2b(6c - d)^2$
15. $\log 5x\sqrt[4]{a(8y - z)}$
16. $\log 9xy^3\sqrt{(a^2 + b^2)c}$
17. $\log \dfrac{ab^3}{c\sqrt{d}}$
18. $\log \dfrac{a^2\sqrt[3]{x}}{5cy^3}$
19. $\log \dfrac{23a(x - y)^4}{324\sqrt[3]{(ax - y)^2}}$
20. $\log \dfrac{a^3\sqrt{c(ax - b)}}{(x + z)\sqrt[3]{cx - d}}$

21. $\log \sqrt{\frac{ax}{x - y}}$ 22. $\log \left(\frac{a - b}{x - y}\right)^5$

23. $\log \frac{a}{b} \sqrt[5]{\frac{cx^3}{d^2}}$ 24. $\log \frac{a - b}{c - d} \sqrt[3]{\frac{cx - d}{ax - b}}$

25. $\log \frac{1}{(a + b^2)^7}$ 26. $\log \frac{1}{a \sqrt[5]{c - x}}$

27. $\log \frac{a(bx - c)^{\frac{1}{2}}}{(mx - n)^{-3}}$ 28. $\log \left(\frac{ax - b}{x\sqrt{y - z}}\right)^{-\frac{2}{3}}$

29. $\log \sqrt{3 + \sqrt{2}}$ 30. $\log \sqrt[3]{b + \sqrt[5]{c}}$

31. $\log \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$ 32. $\log \frac{a + \sqrt[3]{b}}{c - \sqrt[3]{d}}$

---

33. $\log a + \log b - \log c$
34. $\log a - \log b + \log c - \log d$
35. $\log a - (\log b + \log c) + \log d$
36. $3 \log a + 2 \log b - 4 \log c$
37. $\frac{1}{2} \log x - \frac{1}{3} \log y + \frac{1}{4} \log z$
38. $2 \log a - \frac{1}{2} \log b + \frac{1}{3} \log x - 3 \log y$
39. $7 \log (a + b) - \frac{2}{5} \log (a - b) + \frac{1}{2} \log x - 4 \log y$
40. $\frac{2}{3} \log (ax - b) - \frac{5}{4} \log (cx - d) + \frac{3}{5} \log (mx - n)$
41. $\frac{1}{3} \log (a^2 + b^2) - \frac{1}{2} [\log (a + b) + \log (a - b)]$
42. $2 \log (x - y) - \frac{1}{2} \log (x^2 - xy + y^2) - \frac{1}{2} \log (x + y)$
43. $\log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{c} + \log \frac{c}{d} - \log \frac{ax}{dy}$
44. $\log \frac{x}{y} + \log (xy) - 3 \log (x - y) - \log \sqrt{\frac{x}{y}}$

C. Aufsuchung des Logarithmus und des Numerus in den Tafeln.

1. log 5	log 31	log 378
2. log 981	log 101	log 873
3. log 70	log 999	log 333

4. log 3491	log 6897	log 4389
5. log 3780	log 7314	log 5390
6. log 1866	log 9901	log 1111
7. log 2299	log 7809	log 5406

8. log 58343	log 78651	log 13084
9. log 70633	log 30127	log 90801
10. log 77860	log 54327	log 12028
11. log 99286	log 81472	log 55080
12. log 10010	log 99991	log 10001

---

13. log 730,84	log 73,084	log 0,0073084
14. log 0,008765	log 0,00987	log 0,00003
15. log 0,87701	log 368,13	log 5,0009
16. log 0,000875	log 1,0001	log 0,00173
17. log 8,0808	log 0,3769	log 0,070707

---

18. Nlog 2,5078559	Nlog 2,9712758	Nlog 0,9542425
19. Nlog 1,6434527	Nlog 2,9995655	Nlog 2,7723217

---

20. Nlog 4,2488067	Nlog 4,7317177	Nlog 4,8663405
21. Nlog 3,6329935	Nlog 1,9730077	Nlog 0,2787307
22. Nlog $\overline{1}$,8800014	Nlog $\overline{3}$,5740660	Nlog $\overline{2}$,9860010
23. Nlog $\overline{3}$,0080037	Nlog 0,5890220	Nlog $\overline{1}$,0409977
24. Nlog 2,5310060	Nlog $\overline{2}$,6580400	Nlog $\overline{1}$,8420036
25. Nlog 6,9484081	Nlog 5,6531160	Nlog $\overline{3}$,0215614

---

26. log 730843	log 135781	log 763089
27. log 203401	log 3780093	log 8047107
28. log 5499,914	log 87708,02	log 86,37009
29. log 0,876404	log 0,003176849	log 1708,009
30. log 73,89065	log 0,0387695	log 8305,649
31. log 0,003890908	log 0,00008376	log 801,0005
32. log 400,0004	log 7,069907	log 1,002989

33.	Nlog 6,5388046	Nlog 3,9017465	Nlog 1,2076059
34.	Nlog 0,7158090	Nlog 2,3187000	Nlog 0,4441708
35.	Nlog 0,8550225	Nlog 4,2221888	Nlog 1,0089771
36.	Nlog $\overline{1}$,9991768	Nlog $\overline{2}$,7323900	Nlog 0,1613800
37.	Nlog $\overline{1}$,5555555	Nlog 1,8027725	Nlog 2,9850099
38.	Nlog 0,0000009	Nlog 3,0790009	Nlog 6,9710420
39.	Nlog 1,738	Nlog 0,30102	Nlog $\overline{2}$,84198
40.	Nlog (0,4 — 1)	Nlog 3,333	Nlog 1,5
41.	Nlog (0,2 — 2)	Nlog $\overline{1}$,888	Nlog 0,7
42.	Nlog $3\frac{5}{6}$	Nlog $4\frac{3}{4}$	Nlog $2\frac{7}{11}$
43.	Nlog $\frac{5}{7}$	Nlog $\frac{7}{8}$	Nlog $\frac{9}{13}$
44.	Nlog $(-1\frac{5}{9})$	Nlog $(-3\frac{1}{4})$	Nlog $(-\frac{1}{2})$
45.	Nlog (— 0,73406)	Nlog (— 1,4567)	Nlog (— 0,3)

D. Berechnung von Zahlenausdrücken mit Hilfe der Logarithmen.

1. 948,76 . 0,043875

2. 3,4097 . 0,0087634

3. 0,00037689 . 830,7549

4. 8,439507 . 98,27308

5. $\frac{70654}{54013}$

6. $\frac{58706}{93078}$

7. $\frac{4376545}{7401286}$

8. $\frac{65039}{90761,87}$

9. $\frac{70368 \,.\, 0,003764}{983,745}$

10. $\frac{8,3709 \,.\, 834,637}{7308,946}$

11. $\frac{0,0765437}{83,947 \,.\, 0,8395}$

12. $\frac{580036}{8945,07 \,.\, 73,846}$

13. $\frac{7564 \,.\, 0,0764317}{8093 \,.\, 0,0981756}$

14. $\frac{3,7648 \,.\, 0,083497}{5,840359 \,.\, 0,00178}$

15. $\frac{89 \,.\, 753 \,.\, 0,0074}{36709 \,.\, 0,08497}$

16. $\frac{413 \,.\, 8,17 \,.\, 3182}{915 \,.\, 728 \,.\, 2,315}$

17. $\left(\frac{13}{11}\right)^9$

18. $\left(\frac{73}{61}\right)^{11}$

19. $(2\frac{2}{3})^{10}$

20. $(1\frac{7}{9})^8$

21. $\left(\frac{7}{8}\right)^{13}$

22. $\left(\frac{14}{51}\right)^7$

23. $\left(\frac{9519}{8238}\right)^6$

24. $\left(\frac{538274}{763847}\right)^8$

25. $(1{,}1768)^5$ 26. $(0{,}78765)^6$

27. $(1{,}31768)^{10}$ 28. $(0{,}690376)^9$

29. $(7\frac{6}{11})^{0,38}$ 30. $(3\frac{27}{31})^{4,17}$

31. $\sqrt[3]{7}$ 32. $\sqrt[5]{11}$

33. $\sqrt[6]{783}$ 34. $\sqrt[10]{8379}$

35. $\sqrt[4]{906{,}8043}$ 36. $\sqrt[5]{8{,}19043}$

37. $\sqrt[3]{0{,}7645}$ 38. $\sqrt[6]{0{,}0176439}$

39. $\sqrt{\frac{27}{14}}$ 40. $\sqrt[8]{\frac{222}{97}}$

41. $\sqrt[3]{\frac{229}{531}}$ 42. $\sqrt{\frac{431}{788}}$

43. $\sqrt[5]{\frac{9}{8763}}$ 44. $\sqrt[7]{\frac{71}{93406}}$

45. $\sqrt[10]{\frac{34}{1608945}}$ 46. $\sqrt[12]{\frac{19}{1870507}}$

47. $\sqrt[4]{7\frac{35}{74}}$ 48. $\sqrt[5]{9\frac{21}{43}}$

49. $\sqrt[3]{723\frac{5}{9}}$ 50. $\sqrt[4]{98765\frac{7}{11}}$

51. $\sqrt[5]{6\frac{8017}{145306}}$ 52. $\sqrt[7]{3\frac{78015}{190817}}$

53. $\frac{50864 \cdot (0{,}0008769)^3}{98017 \cdot (0{,}0019843)^4}$ 54. $\frac{2019 \cdot (0{,}008715)^7}{3051 \cdot (0{,}000631)^5}$

55. $\frac{8\sqrt{10}}{17}$ 56. $\frac{371}{834}\sqrt[3]{100}$

57. $\frac{109}{716}\sqrt{\frac{76}{93}}$ 58. $\frac{0{,}0875}{9{,}8304}\sqrt{\frac{78}{0{,}007615}}$

59. $\frac{5076 \cdot \sqrt{0{,}007109}}{9384 \cdot \sqrt[3]{0{,}0005318}}$ 60. $\frac{80904 \cdot \sqrt[5]{0{,}031}}{54081 \cdot \sqrt[6]{0{,}017}}$

61. $\sqrt[4]{0{,}47 \cdot \sqrt{\frac{19}{34}}}$ 62. $\sqrt[3]{0{,}09 \cdot \sqrt[3]{\frac{29}{71}}}$

63. $\left(\frac{318 \cdot \sqrt[3]{0{,}045}}{43{,}0798}\right)^5$ 64. $\sqrt[3]{\frac{87 \cdot \sqrt{7194}}{9807654}}$

65. $\sqrt[3]{\frac{76}{93}} \cdot \sqrt{\frac{751}{518}}$ 66. $\left(\frac{38}{27}\right)^{0,07} \cdot \left(\frac{51}{43}\right)^{0,03}$

67. $\left(\frac{9}{13}\right)^{0,08}$

68. $\left(\frac{23}{71}\right)^{0,318}$

69. $(0,0009)^{0,0009}$

70. $(0,0378)^{0,0378}$

71. $(0,3768)^{-0,7}$

72. $(0,00893)^{-0,08}$

73. $(-8,5768)^{-0,4}$

74. $(-7,05873)^{-2,5}$

74_1. $(0,637803)^{\frac{1}{0,65}}$

74_2. $(0,0237998)^{\frac{1}{1,48}}$

74_3. $\left(\frac{3806}{5117}\right)^{\frac{1}{0,73}}$

74_4. $\left(\frac{1201}{2940}\right)^{\frac{1}{2,51}}$

75. $\sqrt[3]{78+\sqrt[5]{31}}$

76. $\sqrt[4]{83-7\sqrt[3]{0,947}}$

77. $\sqrt[3]{5-4,38\sqrt{8,76}}$

78. $\sqrt[7]{2,3-19\sqrt[3]{0,07031}}$

---

79. Wie groß ist $\sqrt{a^2-b^2}$, wenn $a=6,36894$ und $b=5,32103$ ist?

80. Dsgl. für $a = 0,845960$ und $b = 0,682384$?

81. Wie groß ist $\sqrt{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ für $p = 0,47109$ und $q=0,39876$?

82. Wie groß ist $\sqrt{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$ für $a = 273,86$ und $b = 194,78$?

83. Wie groß ist $\sqrt{a^2+b^2}$, wenn $a=3,7685$ u. $b=2,3908$ ist?

84. Wie groß ist $\sqrt[3]{a^2+b^2}$, wenn $a=780,94$ u. $b=473,57$ ist?

85. Wie groß ist $\sqrt{a^3+b^3}$, wenn $a=83,463$ u. $b=67,905$ ist?

86. Wie groß ist $\sqrt{a^3-b^3}$, wenn $a=7,8309$ u. $b=4,3918$ ist?

87. Dasselbe für $a = 18,738$ u. $b = 17,907$.

88. Wie groß ist $\sqrt[3]{a^3+b^3}$ für $a = 28,507$ u. $b = 13,834$?

89. Wie groß ist $\sqrt[3]{a^3-b^3}$ für $a = 384,71$ u. $b = 305,36$?

90. Desgl. $\sqrt{1+\frac{ac}{b^2}}$ für $a=4,8375$, $b=5,7036$ und $c=9,3681$?

91. Desgleichen für $a = 48,709$, $b=91,716$ u. $c=63,473$?

92. Wie groß ist $\sqrt{1 - \frac{ac}{b^2}}$ für $a = 28,371$, $b = 39,832$ und $c = 41,504$?

93. Desgleichen für $a = 173,54$, $b = 375,42$ u. $c = 280,19$?

94. Die quadratische Gleichung $ax^2 - 2bx - c = 0$ giebt $x = \frac{b}{a} \pm \frac{b}{a}\sqrt{1 + \frac{ac}{b^2}}$. Hier ist zunächst $\frac{ac}{b^2}$ logarithmisch zu berechnen; dann beide Teile von x. Ihre Summe und Differenz giebt x_1 und x_2. Was erhält man für $a = 237,08$, $b = 349,35$ und $c = 193,16$?

95. Desgleichen für $a = 41,781$, $b = 53,834$ u. $c = 93,586$?

96. Die quadratische Gleichung $ax^2 - 2bx + c = 0$ liefert $x = \frac{b}{a} \pm \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{ac}{b^2}}$. Wie groß sind demnach x_1 u. x_2 für $a = 1,8351$, $b = 7,4935$ und $c = 9,8761$?

97. Desgleichen für $a = 17,618$, $b = 99,837$ u. $c = 97,364$?

98. Der Inhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten ist, wenn $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$ gesetzt wird, $\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$. Wie groß ist derselbe für $a = 897,5$, $b = 786,3$, $c = 645,6$?

99. Desgleichen für $a = 9,417$, $b = 8,216$, $c = 6,853$?

100. Der reziproke Wert für den Inhalt eines Dreiecks aus den drei Höhen ist $= 4\sqrt{p\left(p - \frac{1}{h}\right)\left(p - \frac{1}{h_1}\right)\left(p - \frac{1}{h_2}\right)}$, wo $p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)$ ist. Wie groß ist der Inhalt für $h = 6,846$, $h_1 = 5,417$, $h_2 = 4,315$?*)

101. Desgleichen für $h = 54,37$, $h_1 = 46,84$, $h_2 = 35,93$?

102. Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich der Wurzel aus dem Produkt der vier Berührungsradien, also $= \sqrt{e\varrho\varrho_1\varrho_2}$, wo $\frac{1}{e} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$ ist. Wie groß ist der Inhalt für $\varrho = 89,7$, $\varrho_1 = 67,5$, $\varrho_2 = 58,9$?**)

---

*) Man berechnet am besten die reziproken Werte der Höhen logarithmisch und verfährt dann ähnlich wie in 98.

**) Setzt man $\frac{\varrho(\varrho_1 + \varrho_2)}{\varrho_1\varrho_2} = \varepsilon$ und berechnet ε logarithmisch, so ist $J = \sqrt{\frac{\varrho^2\varrho_1\varrho_2}{1 + \varepsilon}}$

103. Desgleichen für $\varrho = 5{,}387$, $\varrho_1 = 4{,}192$, $\varrho_2 = 2{,}874$?

104. Nach Hodgkinson ist die Last, welche ein hohler gußeiserner Cylinder tragen kann, bis er zerknickt,

$$3170 \cdot \frac{d^{3,76} - {d_1}^{3,76}}{L^{1,7}} \text{ Pfd. oder } 88370 \cdot \frac{d^{3,55} - {d_1}^{3,55}}{L^{1,7}} \text{ Pfd.},$$

jenachdem die Enden des Cylinders erstens drehbar oder abgerundet, oder zweitens fest sind, die Maße in Centimeter genommen: d der äußere, d_1 der innere Durchmesser, L die Länge. Wie groß ist darnach die Tragfähigkeit eines solchen Cylinders in beiden Fällen, wenn $d = 9\,cm$, $d_1 = 7\,cm$, $L = 2{,}3\,m$ ist? — Die Berechnung geschieht am einfachsten, indem man die Formel in zwei Teile teilt und jeden für sich berechnet.

105. Dasselbe für $d = 11\,cm$, $d_1 = 8\,cm$, $L = 3\,m$.

---

106. Wie heißen die Basen der Logarithmensysteme, in welchen man bezw. hat: 1) log 10 = 2; 2) log 100 = 3; 3) log 3 = 4; 4) log 33 = 3; 5) log 444 = 4; 6) log 6666 = 6?

107. Desgl. die Basen derjenigen Systeme, in denen bis auf 6 Decimalstellen richtig ist: 1) log 5 = 2,321928: 2) log 10 = 1,660964; 3) log 88 = 2,153144; 4) log 99 = 4,182658; 5) log 1000 = 3,549884; log 3333 = 3,691761?

108. Wie groß sind: 1) $\log 7_{(3)}$; 2) $\log 9_{(2)}$; 3) $\log 10_{(5)}$; 4) $\log 100_{(8)}$; 5) $\log 777_{(7)}$; 6) $1000_{(17)}$?

109. Berechne 1) $N\log 0{,}4450972_{(6)}$; 2) $N\log 3{,}2297158_{(4)}$; 3) $N\log 3{,}6039774_{(7)}$; 4) $N\log 3_{(2)}$; 5) $N\log 5_{(3)}$; 6) $N\log 2\tfrac{1}{2}{}_{(6)}$; 7) $N\log 3\tfrac{1}{3}{}_{(11)}$.

110. Die Basis des sogenannten natürlichen Logarithmensystems ist e = 2,718281828. Wie groß ist darnach: 1) logn 10; 2) logn 100; 3) logn 22; 4) logn 81; 5) logn 500; 6) logn 1111? (logn = log. naturalis).

111. Berechne die Logarithmen der ersten 6 Primzahlen: 2, 3, 5, 7, 11, 13 für die Basen 1) 8,8308; 2) 9,977.

XIX.

Kettenbrüche.

1. Was ist ein Kettenbruch?

2. Welche Form haben die gewöhnlichen Kettenbrüche zum Unterschied von der allgemeinen Form der Kettenbrüche?

3. Verwandle folgende Kettenbrüche in gemeine Brüche:

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3}}, \quad \frac{1}{4+\frac{1}{7}}, \quad \frac{1}{a+\frac{1}{b}}, \quad \frac{1}{x+\frac{1}{x}}$$

4. Ebenso folgende:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}} \qquad \frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5}}} \qquad \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$$

5. Desgleichen folgende:

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}} \qquad \frac{1}{x+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}} \qquad \frac{1}{x-1+\frac{1}{x+\frac{1}{x+1}}}$$

6. Verwandle folgende gemeine Brüche in Kettenbrüche: $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{11}{34}$, $\frac{19}{96}$, $\frac{33}{100}$, $\frac{67}{202}$.

7. Ebenso: $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{8}{31}$, $\frac{11}{82}$, $\frac{13}{97}$, $\frac{61}{437}$.

8. Ferner: $\frac{5}{8}$, $\frac{13}{24}$, $\frac{12}{29}$, $\frac{115}{151}$, $\frac{56}{457}$, $\frac{204}{457}$.

9. Desgleichen: $\frac{x^3+2x}{x^4+3x^2+1}$, $\frac{ax^2+2x}{a^2x^2+3ax+1}$.

10. Desgleichen: $\frac{a^2+2a+2}{a^3+3a^2+3a+1}$, $\frac{bcd+b+d}{abcd+ab+ad+cd+1}$.

11. Wie heißen die Glieder der Kettenbrüche:

$$\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}}}} \qquad \frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}}}} \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}}}}$$

12. Wie heißen die Glieder des Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}}$$

13. Wie nennt man die ganzen Zahlen a, b, c, d? Weshalb?

14. Wie leitet man bei einem Kettenbruch von der Form in 12. aus je zwei auf einander folgenden Gliedern das nächstfolgende ab?

15. In welcher Beziehung stehen die Glieder des Kettenbruchs zum ganzen Kettenbruch, vorausgesetzt, daß die Größen a, b, c u. s. w. positive ganze Zahlen sind? (Grund!)

16. Welches ist der Unterschied zwischen zwei auf einander folgenden Gliedern eines Kettenbruchs von der Form desjenigen in 12.?

17. Welche Grenze kann der Unterschied zwischen einem Gliede und dem ganzen Kettenbruch nie überschreiten?

18. Wie nennt man die Glieder eines Kettenbruchs in Bezug auf den ganzen Kettenbruch? (Grund!)

19. Was ist über die Form der Näherungswerte zu sagen?

20. Nach welchem Schema berechnet man ganz mechanisch die einzelnen Näherungswerte, wenn man die Quotienten a, b, c u. s. w. gefunden hat?

21. Wie verwandelt man daher einfach einen gemeinen Bruch in einen Kettenbruch?

22. Gieb die Näherungswerte folgender Kettenbrüche an:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}} \qquad \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}}$$

23. Desgleichen:

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}} \qquad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}}}$$

24. Ebenso:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}} \qquad \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}}}}}$$

25. Ebenso:

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5}}}}}} \qquad \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}}}}$$

26. Ebenso:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}}} \qquad \cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6}}}}}}$$

27. Suche die Näherungswerte von folgenden gemeinen Brüchen? $\frac{77}{247}$, $\frac{65}{352}$, $\frac{241}{1760}$.

28. Ebenso von $\frac{30}{41}$, $\frac{36}{121}$, $\frac{57}{161}$.

29. Desgleichen von $\frac{100}{137}$, $\frac{408}{985}$, $\frac{1500}{2149}$.

30. Desgleichen von $\frac{75}{194}$, $\frac{613}{2363}$, $\frac{1557}{9697}$.

31. Desgleichen von $\frac{55}{89}$, $\frac{192}{505}$, $\frac{900}{3361}$.

32. Gieb die vier ersten Näherungswerte des Decimalbruchs 0,7142943 an und untersuche, wie nahe der vierte Näherungswert kommt.

33. Gieb von 0,371317 die fünf ersten Näherungswerte an und untersuche, wie nahe der fünfte kommt.

34. Gieb von 0,92731 den dritten Näherungswert an und untersuche, wie nahe derselbe der Wahrheit kommt.

35. Eine preußische Elle hat 0,6669 Meter, eine englische (Yard) 0,9144 Meter. Wie verhalten sich die Ellen in kleineren Zahlen?

36. Eine preußische Elle hat 296 Pariser Linien, eine Hamburger Elle 254 Pariser Linien. Wie verhalten sich die Ellen in kleineren Zahlen?

37. Ein Meter hat 443,296 Pariser Linien, ein preußischer Fuß 139,13. Wie verhalten sich Meter und preußischer Fuß in kleineren Zahlen?

38. Ein mecklenburgischer Fuß hatte bisher 0,2865 Meter, ein

preußischer 0,3138 Meter. Wie ist das Verhältnis der Maße in kleinen Zahlen?

39. Eine mecklenburgische Rute hatte bis dahin 16 mecklenb. Fuß, eine preußische Rute 12 preußische Fuß. Wie ist das Verhältnis der Ruten in kleinen Zahlen?

40. Wie ist darnach ferner das Verhältnis einer mecklenburgischen Quadratrute zu einer preußischen Quadratrute?

41. In welchem Verhältnis stehen ein preußisches Pfund und ein englisches Pfund, wenn ein englisches Pfund 453,598 Gramm und ein preußisches 500 Gramm hat?

42. Ein russisches Pfund hat 8518 holländische Aß, ein Leipziger 9723 holländische Aß. Welches ist das Verhältnis?

43. In welchem Verhältnis stehen ein baierisches Maß und ein preußisches Quart, wenn ersteres 1,0688 Liter, letzteres 1,145 Liter hält?

44. Wie verhalten sich ein Pariser Fuß, ein englischer Fuß und ein preußischer Fuß in kleinen Zahlen, wenn ein Pariser Fuß 0,324839 Meter, ein englischer Fuß 0,304795 Meter und ein preußischer Fuß 0,313854 Meter hat?

45. Wie verhalten sich ein alter pr. Scheffel und ein nordamerikanischer Bushel, wenn ersterer 54,961 Liter, letzterer 36,348 Liter hat?

46. Nach den Messungen betrug der Durchmesser der Erde am Äquator 39264926, die Erdachse 39133668 Pariser Fuß. Wie ist das Verhältnis des Durchmessers zur Achse in kleinen Zahlen?

47. Die Zahl π ist 3,14159265. Wie läßt sich dieselbe in kleinen Zahlen genähert ausdrücken, und wie nahe kommen der 1. und 3. Näherungswert der Wahrheit?*)

48. Der Modul M des Briggsschen Logarithmensystems ist 0,4342944819. Wie heißen die sechs ersten Näherungswerte von M, und wie nahe kommen der zweite und der sechste der Wahrheit?

49. Die Basis des natürlichen Logarithmensystems, welche man meist mit e bezeichnet, ist 2,718281828459. Wie heißen die sieben ersten Näherungswerte von e, und wie nahe kommen der vierte und der siebente der Wahrheit?

50. Das tropische Sonnenjahr hat 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 49 Sekunden. Nach wie viel Jahren werden sich die Stunden, Minuten und Sekunden zu ganzen Tagen ansammeln, oder in welchem Verhältnis müssen (nach dem ersten und dritten Näherungswert) die Zahl der Schaltjahre und die Zahl der gemeinen Jahre zu einander stehen, und wie genau würde das in jedem Falle stimmen?

51. Ein synodischer Monat, d. h. die Zeit, welche zwischen zwei

---

*) In den Fällen, wo die Zahl, deren Näherungswerte gesucht werden sollen, noch Ganze hat, sind hier die Näherungswerte nur auf den Bruch bezogen, die Ganzen also denselben jedesmal hinzuzufügen. Will man die Ganzen gleich mit in Anschlag bringen, so muß man sich beim Schema $\frac{1}{0}$ statt $\frac{0}{1}$ vorgeschrieben denken.

entsprechenden Mondphasen liegt, beträgt 29 Tage 12 Stunden 44 Minuten und 3 Sekunden. Wie verhält sich die Zeit zu einem tropischen Jahr, und was folgt aus dem sechsten Näherungswert?

---

52. Wie verwandelt man eine Quadratwurzel in einen Kettenbruch?

53. Verwandle $\sqrt{2}$ in einen Kettenbruch, und untersuche, wie nahe der fünfte Näherungswert kommt.

54. Verwandle $\sqrt{5}$ und $\sqrt{17}$ in Kettenbrüche und untersuche, wie weit der zweite Näherungswert stimmt.

55. Verwandle $\sqrt{65}$ und $\sqrt{101}$ in Kettenbrüche, und untersuche, wie weit der erste Näherungswert stimmt.

56. Verwandle $\sqrt{35}$ und $\sqrt{99}$ in Kettenbrüche, und untersuche, wie nahe der dritte Näherungswert kommt.

57. Welche Quotienten erhält man, wenn man $\sqrt{7}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{41}$ und $\sqrt{55}$ in Kettenbrüche verwandelt?

58. Desgleichen für $\sqrt{14}$, $\sqrt{23}$, $\sqrt{34}$, $\sqrt{47}$, $\sqrt{62}$, $\sqrt{79}$, $\sqrt{98}$?

59. Desgleichen für $\sqrt{19}$, $\sqrt{22}$, $\sqrt{45}$, $\sqrt{59}$, $\sqrt{88}$?

60. Desgleichen für $\sqrt{31}$, $\sqrt{43}$, $\sqrt{67}$, $\sqrt{71}$?

61. Desgleichen für $\sqrt{46}$, $\sqrt{61}$, $\sqrt{94}$?

62. Verwandle $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ in einen Kettenbruch.

XX.

Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

Im allgemeinen Sinne ist eine Gleichung eine Verbindung zweier (einfacher oder zusammengesetzter) Größen durch das Gleichheitszeichen (=). Die Größen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens heißen die Seiten der Gleichung. Gleichungen sind

1. $a = a$ 2. $7 + 3 = 2 . 5$ 3. $ab = ba$

4. $8 = 9$ 4. $7 + x = 12$ 6. $2x = 6$

Die ersten drei Gleichungen heißen identische Gleichungen. Unter identischen Gleichungen versteht man solche Gleichungen, deren beide Seiten von ganz gleichem Werte sind, welche Bedeutung auch die darin vorkommenden allgemeinen Größen haben mögen. Man darf daher überall in der Rechnung für den Ausdruck der einen Seite den der andern setzen. Schließt eine identische Gleichung einen mathematischen Satz ein, so nennt man sie eine Formel, z. B. $a + b - c = a - c + b$, $ab = ba$, $(+a) . (-b) = -ab$ u. s. w.

Die Gleichung 4. ist widersinnig. Sie beweist, daß die Voraussetzung, welche auf eine solche Gleichung führt, unrichtig ist.

Die Gleichungen 5. und 6. heißen Bestimmungsgleichungen. Sie können nur erfüllt werden, wenn die darin vorkommende allgemeine Größe (hier x) einen besonderen Wert erhält. Für diese Gleichungen muß x bezüglich 5 und 3 sein. Bestimmungsgleichungen sind solche Gleichungen, welche zur Bestimmung einer oder mehrerer in ihnen vorkommenden Größen dienen. Sie enthalten daher mindestens eine vorläufig noch nicht bestimmte Größe. Diese heißt die unbekannte Größe oder die Unbekannte und wird der Unterscheidung wegen meistens mit einem der letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet. Die andern vorkommenden Größen heißen die bekannten oder gegebenen Größen und werden durch Zahlen oder die ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnet. Eine Bestimmungsgleichung schließt daher immer eine Aufgabe ein, die unbekannte Größe durch die bekannten auszudrücken oder zu bestimmen.

Manche Gleichungen sind bald als identische, bald als Bestimmungsgleichungen anzusehen. Dahin gehören alle Gleichungen in der Geometrie und Trigonometrie, welche eine Beziehung (Relation) zwischen den Stücken einer Figur angeben, z. B. für das rechtwinklige Dreieck $b^2 + c^2 = a^2$. Eine solche Gleichung nennt man eine Bedingungsgleichung oder Relation. Sie muß identisch sein, wenn alle darin vorkommenden Größen bekannt sind; sie dient als Bestimmungsgleichung, wenn eine der darin vorkommenden Größen unbekannt ist.

Im besonderen Sinne versteht man unter Gleichungen nur Bestimmungsgleichungen, und nur in diesem Sinne spricht man von der Auflösung der Gleichungen, von der Anwendung der Gleichungen, von dem Grade der Gleichungen u. s. w.

Die Auflösung der Gleichungen geschieht im wesentlichen nach dem Satze: Gleiche Operationen mit gleichen Größen vorgenommen geben gleiche Resultate. Dieser allgemeine Satz zerfällt für die einzelnen Operationen in folgende besondere: Gleiches zu Gleichem addiert giebt Gleiches; Gleiches von Gleichem subtrahiert giebt Gleiches; Gleiches mit Gleichem multipliziert giebt Gleiches; Gleiches durch Gleiches dividiert giebt Gleiches; Gleiches mit Gleichem potenziert giebt Gleiches; Gleiches durch Gleiches radiziert giebt Gleiches; Gleiches durch Gleiches logarithmiert giebt Gleiches.

Diese Sätze auf eine Gleichung angewendet heißen: Man kann beide Seiten der Gleichung um dieselbe Zahl vermehren oder vermindern; man kann beide Seiten der Gleichung mit derselben Zahl multiplizieren oder dividieren; man kann beide Seiten der Gleichung mit derselben Zahl potenzieren, radizieren oder logarithmieren. In dem zweiten Satze ist auch der Satz enthalten: Man kann allen Gliedern auf beiden Seiten der Gleichung das entgegengesetzte Zeichen geben.

Aus diesen Sätzen gehen zunächst die Sätze von der Versetzung der Glieder von der einen Seite nach der andern hervor: Ein Summand der einen Seite wird ein Subtrahend der andern Seite, ein Subtrahend der einen Seite wird ein Summand der andern Seite; ein Faktor der einen Seite wird ein Divisor der andern Seite, ein Divisor der einen Seite

wird ein Faktor der andern Seite; ein Potenzexponent der einen Seite wird ein Wurzelexponent der andern Seite, ein Wurzelexponent der einen Seite wird ein Potenzexponent der andern Seite. — Diese sechs Sätze lassen sich auch in dem einen allgemeinen zusammenfassen: Eine Größe, welche durch eine Operation mit der einen Seite der Gleichung verbunden ist, wird dadurch nach der andern geschafft, daß man sie mit dieser durch die entgegengesetzte Operation verbindet. — Vielfache Anwendung finden auch die zwei Operationen zugleich umfassenden Sätze: Subtrahendus und Rest, Divisor und Quotient (auch Potenzexponent und Wurzelexponent) lassen sich mit einander vertauschen. — Man hat aber stets wohl achtzugeben, daß sich die Operation auf die ganze Seite bezieht, nicht auf ein einzelnes Glied derselben allein.

Die einfachsten der hierher gehörigen Gleichungen sind solche, in denen keine Brüche, keine Klammern und keine Wurzeln vorkommen, oder was die Hauptsache ist, in denen x weder im Nenner noch in einer Klammer, noch unter einer Wurzel vorkommt. Diese Gleichungen werden dadurch aufgelöst, daß man die Glieder mit x auf die eine Seite, meist nach links, die Glieder ohne x auf die andere Seite, meist nach rechts bringt, die Glieder mit x vereinigt und durch den Faktor von x dividiert.

Kommen in der Gleichung Brüche vor, so wird die Auflösung meistens am bequemsten, wenn man die Brüche fortschafft. Dies geschieht dadurch, daß man die ganze Gleichung mit dem Generalnenner multipliziert. Kommt x im Nenner vor, so muß ein solcher Nenner immer fortgeschafft werden. Das geschieht dadurch, daß man die ganze Gleichung mit diesem Nenner multipliziert.

Kommt x in einer Klammer vor, so muß die Klammer aufgelöst werden. Klammern, in denen x nicht vorkommt, werden nur aufgelöst, wenn das Resultat und die Rechnung sich dadurch vereinfacht.

Kommt x unter einer Wurzel vor, so muß man die Wurzel isolieren und sie durch Potenzieren fortschaffen, z. B. $a + \sqrt[n]{x} = b$ giebt $\sqrt[n]{x} = b - a$, $x = (b - a)^n$. — Kommt x als Basis einer Potenz vor, so muß man diese isolieren und sie durch Radizieren fortschaffen ($x^n = a$, $x = \sqrt[n]{a}$). Kommt x als Basis verschiedener Potenzen vor, so ist die Auflösung solcher Gleichungen oft mit Schwierigkeiten verbunden, z. B. $x^5 + x^3 = a$. Kommt x als Potenzexponent vor, so muß man die Potenz isolieren und den Exponenten durch Logarithmieren fortschaffen, z. B. $a^x = b$, $x \log a = \log b$.

Die einfachste Form einer Gleichung nennt man ihre Normalform. Die Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten erscheinen in ihrer einfachsten Form, wenn alle Glieder mit x nach links geschafft und zu einem Gliede vereinigt, alle Glieder ohne x nach rechts geschafft und ebenfalls möglichst vereinigt sind. Man muß schließlich eine Gleichung von der Form $ax = b$ erhalten, welches die Normalform dieser Gleichungen ist.

1. $x + 3 = 7$
2. $5 + x = 15$
3. $x - 7 = 1$
4. $x - 3 = 8$
5. $9 - x = 4$
6. $11 - x = 10$
7. $3x = 12$
8. $4x = 20$
9. $2x + 7 = 13$
10. $8 + 6x = 20$
11. $5x - 3 = 17$
12. $4x - 8 = 16$
13. $7 - 6x = 1$
14. $24 - 7x = 3$
15. $100 - 10x = 19 - x$
16. $4x + 5 - x = 8$
17. $5x + 2 + x = 20$
18. $9 + 3x - 2x = 10$
19. $7 - 3x + x = 7$
20. $111 - x - 7x = 31$
21. $18 + 8x = 27 + 5x$
22. $31 - 7x = 41 - 8x$
23. $17 - x = 7x - 7$
24. $19 - 2x = 5x - 16$
25. $9x + 22 - 2x = 100 - 11x - 42$
26. $30x + 39 - 35x = 47 - 20x - 8$
27. $8x - 7 + x = 9x - 3 - 4x$
28. $7x - 6 = 8x - 9 - 4x + 5$
29. $14 + x - 8x - 3x - 6 + x = 0$
30. $8 = 9x + 12 - 6x - 13 + 2x$
31. $9x = 7x + 15 + 5x + 8 - 10x$
32. $15 + 5x - 7 = 2x - 9 + 8x + 10$
33. $7x - 6 + 5x - 4 + 3x - 2 + x = -4$
34. $7 - 6x - 11 - 4x - 5 - 2x + 1 = -8$
35. $12x - 10 + 8x - 6 + 4x - 2 = 0$
36. $x - 3 + 6x - 9 + 12x - 15 = x$
37. $x = 3x + 2 + 5x + 3 + 7x + 9$
38. $x = 7 - 5x + 10 + 8x - 7 + 3x$
39. $0 = 6 + 12x - 9 - 8x + 10 + x$
40. $100 + 2x - 9x + 15 = 10 - 7x + 5 - 11x$
41. $10x - 11 - 12x - 13 = 13 + 12x + 11 - 10x$
42. $7x - 9 - 9x + 7 = 9x + 9 - 7x - 7$

---

43. $3x + (7 - x) = 11$
44. $5x - (3 + 2x) = 9$
45. $x - (8 - x) = 10$
46. $3(x - 2) - 7 = 8$
47. $x - 9 = 5(x - 5)$
48. $10(x + 1) = 11x + 7$
49. $4(10 - 2x) - 3(x - 5) = 0$
50. $3(9 - 2x) - 5(2x - 9) = 0$
51. $7(4x - 3) + 3(7 - 8x) = 1$
52. $8(3x - 2) - 7x - 5(12 - 3x) = 13x$

53. $7(3x - 6) + 5(x - 3) + 4(17 - x) = 11$

54. $4x - 3(20 - x) = 6x - 7(11 - x) + 11$

---

55. $\frac{x}{7} = 4$

56. $\frac{1}{2}x = 7$

57. $\frac{5}{x} = 9$

58. $\frac{5}{6} = \frac{3}{4} : x$

59. $\frac{x}{5} + 8 = 13$

60. $\frac{12}{x} + 5 = 8$

61. $15 : (-x) = 3$

62. $8 = 18 : (-x)$

63. $x : 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

64. $x : \left(-3\frac{1}{3}\right) = 2\frac{1}{10}$

65. $x : 0{,}925 = 120$

66. $x : 0{,}175 = 4{,}44$

67. $55{,}5 : x = 0{,}375$

68. $666 : (-x) = 2{,}25$

69. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 5$

70. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}x$

71. $2x - \frac{3}{5}x = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}x + 2$

72. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{6} + \frac{x}{8} + \frac{x}{12} = 11$

73. $x - \frac{3x}{2} + 9 = \frac{2x}{3} + 4 + \frac{5x}{6} - \frac{6x}{5} + \frac{1}{5}$

74. $2\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{5}x + 1 = x$

75. $2\frac{2}{3}x + \frac{x}{3} = 2\frac{1}{2} + x - 4\frac{1}{5}x + 5\frac{1}{4}$

76. $8\frac{1}{4}x - \frac{x}{5} - 3\frac{2}{3}x - 4\frac{1}{5}x + 1 = 0$

77. $1\frac{5}{9}x - 100 = 2\frac{1}{3}x - 186\frac{1}{3} + 55\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$

78. $\frac{1}{4}x + \frac{5}{6}x = x + 1 + \frac{1}{18}x - 2\frac{1}{6}x + 1\frac{2}{3}x + 18$

79. $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}x + \frac{9}{10}x + \frac{11}{12}x + \frac{14}{15}x = 5x - 2$

80. $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x - \frac{3}{5}x + \frac{5}{3} = 0$

81. $\frac{7x}{3} - \frac{5x}{2} + \frac{9x}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = 2$

82. $0 = \frac{2x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x}{6} - 1\frac{3}{4}x + 2\frac{4}{5} - 3\frac{9}{10}x + 61$

83. $x = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}x$

84. $2{,}25x - 5 - 0{,}4x + 2{,}6 = 2x - 3$

85. $84 + 31{,}5x + 4{,}2x + 16{,}8 = 44x - 32$

86. $0{,}75x - 2x - 0{,}6x + 0{,}5x - 9 = 0$

87. $12{,}34 - 1{,}234x = 0{,}617x - 0{,}617$

88. $44{,}44x = 2222 + 222{,}2 + 22{,}22 + 2{,}222$

89. $5{,}55x + 333{,}33 - 44{,}4x - 30{,}91 = 0{,}5555$

90. $4{,}8x - 0{,}05x + 5{,}76 = 6{,}99x - 1{,}995x + 5{,}13$

91. $5x + 3{,}48 - 2{,}35x = 5{,}381 - 2{,}9x + 10{,}42$

92. $12{,}9x - 1{,}45x - 3{,}29 - 0{,}99x - 11x + 0{,}32 = 0$

---

93. $\frac{2}{3}(7x - 10) - \frac{1}{2}(50 - x) = 20$

94. $3x + \frac{2}{5}(x + 3) - \frac{1}{2}(11x - 37) = 5$

95. $\frac{2}{3}(3x - 5) - 1 = \frac{2}{3}(11 - 2x) + x$

96. $1 - 3\left(7\frac{1}{2} + x\right) + 7\left(\frac{2}{3}x - \frac{5}{2}\right) + \frac{8}{3}x = 0$

97. $2x - 3\left(5 + \frac{3}{4}x\right) + \frac{2}{3}(4 - x) - \frac{1}{4}(3x - 16) = 0$

98. $4 - \frac{7 - 3x}{5} = 3 - \frac{3 - 7x}{10} + \frac{x + 1}{2}$

99. $\frac{4x - 1}{3} - 4 = 1 - \frac{x - 4}{6} + \frac{3x + 5}{4} - 4\frac{1}{4}$

100. $\frac{3x - 4}{5} - \frac{3 - 4x}{7} = \frac{5x - 6}{10} - \frac{9 - 10x}{14}$

101. $\frac{4x + 9}{10} - \frac{x + 5}{5} = \frac{7x - 1}{25} - \frac{x + 3}{20}$

102. $\frac{x - 3}{7} - \frac{x - 25}{5} = 7 - \frac{2 + x}{4}$

103. $\frac{7x - 2}{3} - \frac{4}{5}(x + 3) + 6 = \frac{3(x + 2)}{2}$

104. $11 - \left(\frac{3x - 1}{4} + \frac{2x + 1}{3}\right) = 10 - \left(\frac{2x - 5}{3} + \frac{7x - 1}{8}\right)$

105. $\frac{5x + 2}{3} - \left(\frac{3x - 1}{2} - 3\right) = \frac{3x + 3}{2} - \left(\frac{x + 1}{6} + 3\right)$

106. $3x - \frac{2x+5}{7} = 16 - \frac{7x+19}{2} - \frac{2x+1}{3}$

107. $\frac{2x-1}{2} + \frac{3x-2}{4} + \frac{5x-4}{8} = 1 - \frac{7x-6}{8}$

108. $\frac{13x+5}{2} - \frac{16x+5}{3} = \frac{11x+4}{3} - \frac{5x-1}{2} - x$

109. $\frac{5+3x}{2} - \frac{4x-7}{3} = \frac{16x-27}{21} - \frac{x+3}{5}$

110. $\frac{3x+4}{7} - \frac{9x+44}{5} = \frac{5x+12}{3} - \frac{9x+30}{4}$

111. $\frac{5x-2}{12} - \frac{3x-2}{40} = \frac{x-6}{18} + \frac{7x-4}{30} + \frac{2(2x+3)}{45}$

112. $\frac{5x+1}{4} + \frac{4x-1}{9} + \frac{x+5}{4} + \frac{x-1}{6} = 2(x+1)$

113. $\frac{3-x}{2} - \left(\frac{7-x}{3} - \frac{x+3}{4}\right) + \left(\frac{7-x}{6} - \frac{9+3x}{8}\right) + x = 0$

114. $\frac{10}{x} + \frac{4}{9} = \frac{9}{x} + \frac{1}{2}$

115. $\frac{7}{x} + \frac{1}{3} = \frac{23-x}{3x} + \frac{7}{12} - \frac{1}{4x}$

116. $\frac{7}{3} + \frac{13}{5x} = \frac{13x-24}{3x} - \frac{37}{20} + \frac{10}{x}$

117. $\frac{10-x}{3} + \frac{13+x}{7} = \frac{7x+26}{x+21} - \frac{17+4x}{21}$

118. $\frac{6x+5}{8x-15} - \frac{1+8x}{15} = \frac{1-x}{3} + \frac{3-x}{5}$

119. $\frac{5}{x+3} + \frac{3}{2(x+3)} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2(x+3)}$

120. $\frac{2x+1}{3x-15} - \frac{x-11}{2x-10} = 1$

121. $\frac{3x-5}{5x-5} + \frac{5x-1}{7x-7} + \frac{x-4}{x-1} = 2$

122. $\frac{8x+2}{x-2} - \frac{2x-1}{3x-6} + \frac{3x+2}{5x-10} = 10$

123. $\frac{3x-1}{2x-6} + \frac{5x-7}{3x-9} + \frac{7x+1}{4x-12} = 11$

124. $\frac{4-2x}{3} - \frac{4}{6x-3} = \frac{1,5x}{x-0,5} - \frac{4x^2}{3(2x-1)}$

125. $\frac{5x-1}{7} : \frac{19-x}{4} = 1 : 2$ $\quad$ 125_1. $\frac{7x+1}{8} : 4 = \frac{8x-2}{7} : 5$

126. $\frac{5x-7}{3} : \frac{3x+5}{4} = 6 : 5$

127. $\frac{4x+8}{3} : \frac{9x-5}{2} = 2 : 1$

128. $\frac{\frac{2}{5}(x-4)}{\frac{3}{8}(3x+5)} = \frac{1}{6}$

129. $\frac{\frac{2}{3}(4x-1)}{\frac{3}{4}(5x+1)} = \frac{2}{3}$

130. $(x-3)(x-4) = (x-6)(x-2)$

131. $(2x+7)(x+3) = 2(x+5)(x+2)$

132. $(x-8) : (x-9) = (x-5) : (x-7)$

133. $(x+1) : (x+3) = (x-5) : (x-7)$

134. $\frac{x-4}{x-5} = \frac{x-1}{x-3}$

135. $\frac{2x-1}{2(x-3)} = \frac{3(x-2)}{3x-1}$

136. $\frac{5}{7} \cdot \frac{2x-5}{3x-7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5x-2}{7x-3}$

137. $\frac{3}{4} \cdot \frac{4x-5}{3x-7} = \frac{5}{7} \cdot \frac{7x-3}{5x-4}$

138. $\frac{3x-14}{x-4}(2x-11) = 6(x-6)$

139. $\frac{x+1}{x-1}(3x-11) = 3(x-3)$

140. $2(0{,}6 - 0{,}04x) - 0{,}2(0{,}5x - 2) = 0{,}02x$

141. $3(2x - 0{,}3) = 0{,}6 + 5(x - 0{,}1)$

142. $11{,}1x - 3(2x - 5) = 7(1{,}8x - 3) - 3{,}9$

143. $\frac{5x - 0{,}4}{0{,}3} + \frac{1{,}3 - 3x}{2} = \frac{1{,}8 - 8x}{1{,}2}$

144. $\frac{4(13x - 0{,}6)}{5} + \frac{3(1{,}2 - x)}{10} = \frac{9x + 0{,}2}{20} + \frac{5 + 7x}{4} + x$

145. $\frac{9x - 0{,}7}{4} - \frac{7x - 1{,}1}{3} = \frac{5x - 1{,}5}{7} - \frac{5(0{,}4 - 2x)}{6}$

---

146. $x + a = b$

147. $x - a = 7$

148. $a + x = b$

149. $x + a - b = m$

150. $a - x = b - 8$

151. $a - x + b + c = 0$

152. $a - x + 15 + c = 8 - b + 7$

153. $m - 9 + b = x - a + m - 19$

154. $ax = b$

155. $ax + b = c$

156. $mx - n = p$

157. $a - bx = c$

158. $a - mx + b = -c$

159. $5x - a = 3x + b$

160. $3a + 2x - 4b = 5x - b$

161. $5mx + 2a = 7mx - 2b$

162. $5a - 7b + 6nx = 3a - 5b - 2c + 8nx$

163. $3mx - 7a - 5b = mx + 2b + 7c - 5mx$

164. $a(x - b) = c$ 165. $a(b - x) = c$

166. $4(x - a) = 3x + 5b$ 167. $7(a - x) = 6(b - x)$

168. $3(4a - 3x) = 5(4b - x)$ 169. $(a - 1)x = b - x$

170. $ab + (b + 1)x = (a + x)b + a$

171. $2(3a + 10x) + 7(a - x) = 13(a + b)$

172. $3(2a - x) + 5(3b - 2x) = 5(3a - 2x) + 3(2b - 3x)$

173. $3(5x - 7a) + 7(3a - 5b) + 5(3b - 7x) = 0$

174. $mx + nx = a$ 175. $ax - b = cx - d$

176. $a - bx = cx - d$ 177. $ax + cx = ab + c$

178. $ax + x = m$ 179. $ax + bx = m + x$

180. $a - bx = cx - x$ 181. $ax - bx - m(x - 1) = m$

182. $a(x - 1) - b = x - a$ 183. $ax = b(c - x)$

184. $(a + b)x = m - cx$ 185. $(a - b)x = 2a - (a + b)x$

186. $(a - b)x - c = d - (b - c)x$

187. $ab - (x - c)d = c(d + x)$

188. $a(b - x) + b(c - x) = b(a - x) + cx$

189. $12ax - 3b(x - a) - 5a(2x + b) = 0$

190. $(a + b)x + (a - b)x - ax = b + c$

191. $(a + b)x - (a - b)x - bx = a + c$

192. $(a - x)(b - x) = xx$

193. $(a - x)(1 - x) = xx - b$

194. $(a - x)(1 - x) = xx - 1$

195. $(a - x)(b + x) = aa - xx$

196. $(x - a)(x - b) = xx - aa$

197. $(a + x)(b + x) = (a - x)(b - x)$

198. $(a + bx)(ax + b) + (a - bx)(ax - b) = 0$

199. $(ax - b)(m - n) + b(m - n) = a(m + n)$

200. $(a - x)(b - x) = (x + c)(x + d)$

201. $(a + bx)(a - b) - (ax - b)(a + b) = ab(x + 1)$

202. $(a - x)(b - x) - (c - x)(d - x) = (c + d)x - cd$

203. $(a - b)(x - c) + (a + b)(x + c) = 2(bx + ad)$

204. $(a - b)(x - c) - (a + b)(c + x) + 2a(b + c) = 0$

205. $(a-b)(c-x)+(b-c)(a-x)+(c-a)(b-x)=a-x$

206. $(a-x)b+(a-c-x)(x-b)=x(a-x)$

207. $m(a+b-x)=n(a+b-x)$

208. $(a-b)(a-c+x)+(a+b)(a+c-x)=2aa$

209. $(m+x)(a+b-x)+(a-m)(b-x)=a(m+b)$

210. $(ax-1)(bx-1)(cx-1)+1=ax+bx+cx$

211. $(a+x)(b+x)(c+x)-(a-x)(b-x)(c-x)=2(x^3+abc)$

212. $(a-b)(a-c)(a+x)+(a+b)(a+c)(a-x)=0$

---

213. $\frac{x}{a}=b$

214. $\frac{a}{x}=b$

215. $\frac{x}{a}-b=c$

216. $a-\frac{x}{b}=c$

217. $\frac{a}{x}-b=c$

218. $a-\frac{b}{x}=c$

219. $\frac{a}{x}-\frac{b}{x}=c$

220. $x-\frac{x}{a}=b$

221. $\frac{a}{x}-1=\frac{b}{x}-9$

222. $\frac{x-a}{a}+b=x-1$

223. $\frac{a-bx}{c}+b=\frac{bc-x}{c}$

224. $\frac{a-bx}{c}+x=\frac{cx-b}{c}$

225. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$

226. $\frac{ax}{b}-\frac{cx}{d}=m$

227. $\frac{a-x}{b}=\frac{x-b}{a}$

228. $\frac{a-bx}{b}=\frac{ax-b}{a}$

229. $\frac{x-a}{a}-m=\frac{x-b}{b}-n$

230. $a-\frac{b+x}{b}=b-\frac{a+x}{a}$

231. $\frac{x+a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{x-b}{a}+\frac{a}{b}$

232. $\frac{x}{a}-b=\frac{x}{b}-a$

233. $\frac{a+b}{x}-c=d-\frac{a-b}{x}$

234. $a\left(m-\frac{x}{n}\right)=b\left(n-\frac{x}{m}\right)$

235. $\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{b}$

236. $\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{a}$

237. $\frac{x+a}{x-a}=m$

238. $\frac{ax+b}{ax-b}=\frac{m}{n}$

239. $\frac{a+x}{b+2x}=1$

240. $\frac{a(b+x)}{a-x}=b$

241. $\frac{a}{a-x}=\frac{b}{b-x}$

242. $\frac{a+x}{a-x}=\frac{a+b}{a-b}$

243. $\frac{x+1}{x-1} = \frac{a+b}{a-b}$

244. $\frac{a+b}{c+x} = \frac{a-b}{c-x}$

245. $\frac{a+bx}{a+b} = \frac{c+dx}{c+d}$

246. $\frac{a+bx}{a-b} = \frac{c+dx}{c-d}$

247. $\frac{a-x}{b-x} = \frac{a+x}{b+x}$

248. $\frac{ax-2a}{ax-2b} = \frac{ax-2b}{ax+2a}$

249. $\frac{a}{b+x} - m = n$

250. $\frac{a}{b+x} - m = \frac{c}{b+x} - n$

251. $\frac{a}{mx} + \frac{b}{nx} = c$

252. $\frac{a-bm}{mx} - \frac{c-bn}{nx} = 1$

253. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = d$

254. $\frac{ax}{b} + \frac{cx}{d} + \frac{fx}{g} = h$

255. $\frac{2x-a}{b} - \frac{b-2x}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}$

256. $\frac{ax}{b} - \frac{b}{a}(x-b) = a$

257. $\frac{a(2x+1)}{3b} - \frac{5ax-4b}{5b} = \frac{4}{5}$

258. $\frac{6a-bx}{2a} + \frac{9b-cx}{3b} + \frac{20c-dx}{5c} = 10$

259. $\frac{3b(x-a)}{5a} + \frac{x-b^2}{15b} + \frac{b(4a+cx)}{6a} = 0$

260. $\frac{ax}{b} - \frac{b-x}{2c} + \frac{a(b-x)}{3d} = a$

261. $\frac{a-x}{a} + \frac{b-x}{b} + \frac{c-x}{c} = 3$

262. $\frac{ax-b^2}{a} - \frac{a(b-x)}{b} + \frac{b^2}{a} = a$

263. $\frac{a+1}{x} : \frac{b-1}{x} = (a+x) : (b-x)$

264. $\frac{ax+b}{x} : \frac{a}{d} = \frac{b}{a} : \frac{x}{cx+d}$

265. $\frac{a^2b-x}{a} + \frac{b^2c-x}{b} + \frac{ac^2-x}{c} = 0$

266. $\frac{1-ax}{bc} + \frac{1-bx}{ac} + \frac{1-cx}{ab} = 0$

267. $\frac{a-x}{bc} + \frac{b-x}{ac} + \frac{c-x}{ab} = 0$

268. $\frac{a-bx}{bc}+\frac{b-cx}{ac}+\frac{c-ax}{ab}=0$

269. $\frac{a(b-x)}{bx}+\frac{b(c-a)}{cx}=\frac{a+b}{x}-\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{b}\right)$

---

270. $(1+6x)^2+(2+8x)^2=(1+10x)^2$

271. $9(2x-7)^2+(4x-27)^2=13(4x+15)(x+6)$

272. $(3-4x)^2+(4-4x)^2=(5+4x)^2$

273. $(2-x)(3-x)+(1-8x)(1-3x)=(1-5x)^2$

274. $(9-4x)(9-5x)+4(5-x)(5-4x)=36(2-x)^2$

275. $3[3(3(3x-2)-2)-2]-2=1$

276. $9[7(5(3x-2)-4)-6]-8=1$

277. $\frac{1}{9}\left[\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}(x+2)+4\right)+6\right)+8\right]=1$

278. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2}\right)-1\frac{1}{2}\right)-1\frac{1}{2}\right]-1\frac{1}{2}=0$

279. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right)-1\right)-1\right]-1=0$

280. $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x+2\right)+2\right)+2\right)+2\right]=1$

281. $\frac{2}{7}\left[\frac{5}{12}\left(\frac{7}{8}\left(\frac{3}{4}x+5\right)-10\right)+3\right]-8=0$

282. $\left(7\frac{1}{3}x-2\frac{1}{2}\right)-\left(4\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\left(3\frac{1}{3}-5x\right)\right)=18\frac{1}{3}-5\left(1\frac{1}{2}x-10\right)$

283. $4{,}709-\frac{4}{5}\left(5{,}7x-3\frac{1}{8}\right)-0{,}3\left(2\frac{1}{4}-5{,}3x\right)=0$

284. $5\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}\left(4{,}6-3\frac{1}{3}x\right)=4{,}7x-0{,}8\left(3\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)$

285. $5{,}7x-2\frac{1}{3}(7{,}8-9{,}3x)=5{,}38-4\frac{3}{4}(0{,}28+3{,}6x)$

286. $738x-73{,}8(0{,}738-7{,}38x)=73{,}8-0{,}738(7{,}38-73{,}8x)$

287. $5{,}05x-505(505-5{,}05x)=50{,}5x-50{,}5(50{,}5x-5{,}05)$

288. $3{,}37x-337(337-3{,}37x)=33{,}7x-2(337x-33{,}7)3{,}37$

289. $\frac{1{,}4142}{1+\frac{x}{1{,}4142}}=1{,}4142-\frac{1}{1{,}4142}$

290. $3 - \frac{1}{3} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{x}}$

291. $\frac{\frac{1}{4} - x}{\frac{1}{4} + x} + \frac{1}{4} = \frac{x}{\frac{1}{4} + x} - \frac{1}{4}$

292. $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - x} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - x}$

293. $\frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{x}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{x}} - \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{x}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} + 1}$

294. $\frac{a - \frac{1}{x}}{a + \frac{1}{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x - \frac{1}{a}}{x + \frac{1}{a}} - \frac{1}{a}$

295. $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x}} = \frac{a - \frac{1}{x}}{a + \frac{1}{x}}$

296. $\frac{2x^2 - 3x + 5}{7x^2 - 4x - 2} = \frac{2}{7}$

297. $\frac{2x^2 - 14x + 9}{3x^2 - 14x + 24} = \frac{3}{8}$

298. $\frac{ax^2 - bx + c}{mx^2 - nx + p} = \frac{a}{m}$

299. $\frac{ax^2 - bx + c}{mx^2 - nx + p} = \frac{c}{p}$

300. $\frac{19x^7 - x^8}{2} + x^8 - 2x^7 = \frac{35x^7 - x^8}{3}$

301. $\frac{13x^5 + 10x^4}{16} + x^5 = 55x^4 + \frac{30x^4 - x^5}{10}$

302. $\frac{4 - x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{5,5}{3x} = \frac{67}{15x^2} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3x^2}{5x^3}\right)$

303. $8x^n - \frac{3}{4}x^{n+1} = 7x^n + \frac{1}{4}x^{n+1}$

304. $\frac{2x^n + 7x^{n-1}}{9} + \frac{7x^n - 44x^{n-1}}{5x - 14} = \frac{4x^n + 27x^{n-1}}{18}$

305. $\frac{x^{n+1} - ax^{n-1}}{bx} - \frac{ax^{n-1} - x^n}{b} = \frac{2x^n}{b} - ax^{n-2}$

306. $\frac{4x^2 - 3x}{1 + x} - \frac{3x}{1 - x} = \frac{4x^3 + 2x}{x^2 - 1}$

307. $\frac{x - 9}{x - 5} + \frac{x - 5}{x - 8} = 2$

308. $\frac{x-16}{x-17}+\frac{x-14}{x-9}=2$

309. $\frac{x-12}{x-7}+\frac{x-4}{x-12}=2+\frac{7}{x-7}$

310. $\frac{x-8}{x+2}+\frac{x+12}{x-8}=2+\frac{18}{x+2}$

311. $\frac{3x-19}{x-13}+\frac{5x-25}{x+7}=8$

312. $\frac{x+50}{x-25}+\frac{2x-50}{x+50}=3$

313. $\frac{x-2}{2x+1}+\frac{x-1}{3(x-3)}=\frac{5}{6}$

314. $\frac{x+1}{4(x+2)}+\frac{x+4}{5x+13}=\frac{9}{20}$

315. $\frac{5(2x^2+3)}{2x+1}-\frac{7x-5}{2x-5}=5x-6$

316. $\frac{7x+55}{2x+5}-\frac{3x}{2}=9-\frac{3x^2+8}{2x-4}$

317. $\frac{2x-3}{x-4}+\frac{3x-2}{x-8}=\frac{5x^2-29x-4}{x^2-12x+32}$

318. $\frac{5x-1}{3(x+1)}-\frac{3x+2}{2(x-1)}=\frac{x^2-30x+2}{6x^2-6}$

319. $\frac{3x-7}{2x-9}-\frac{3(x+1)}{2(x+3)}=\frac{11x+3}{2x^2-3x-27}$

320. $\frac{7x-5}{3x-2}+\frac{8x-7}{3x-1}+\frac{10x+7}{9x^2-9x+2}=5$

321. $\frac{3x-2}{x+3}+\frac{7x-3}{x+2}+\frac{x+100}{x^2+5x+6}=10$

322. $\frac{5x-17}{4x-3}+\frac{7(x-4)}{4x-5}+\frac{12(10x+73)}{16x^2-32x+15}=8$

323. $\frac{7x-13}{2x-1}+\frac{13x-28}{2x-3}+\frac{28x+43}{4x^2-8x+3}=10$

324. $\frac{3}{x-7}+\frac{1}{x-9}=\frac{4}{x-8}$

325. $\frac{5}{x-17}+\frac{3}{x-19}=\frac{8}{x-18}$

326. $\frac{17}{x-16}+\frac{15}{x-18}=\frac{32}{x-17}$

327. $\frac{61}{x-38}+\frac{37}{x-62}=\frac{98}{x-50}$

328. $\frac{9}{x-7}-\frac{5}{x-8}=\frac{9}{x-2}-\frac{5}{x+1}$

329. $\frac{2}{x-14} - \frac{5}{x-13} = \frac{2}{x-9} - \frac{5}{x-11}$

330. $\frac{21}{x-98} - \frac{71}{x-94} = \frac{21}{x+44} - \frac{71}{x-52}$

331. $\frac{9}{x-51} - \frac{9}{x-15} = \frac{2}{x-81} - \frac{2}{x+81}$

332. $\frac{7}{x-6} + \frac{3}{x-11} = \frac{9}{x-7} + \frac{1}{x-12}$

333. $\frac{5}{x-6} + \frac{4}{x-9} = \frac{8}{x-7} + \frac{1}{x-10}$

334. $\frac{1}{x-6} + \frac{8}{x-3} = \frac{5}{x-2} + \frac{4}{x-5}$

335. $\frac{x-8}{x-3} + \frac{x-3}{x-5} + \frac{x-9}{x-7} = \frac{x-1}{x-3} + \frac{x-13}{x-5} + \frac{x-6}{x-7}$

336. $\frac{x+2}{x+7} + \frac{x+7}{x+5} + \frac{x+1}{x+3} = \frac{x+9}{x+7} + \frac{x-3}{x+5} + \frac{x+4}{x+3}$

337. $\frac{3x-5}{x-2} + \frac{5x-1}{x-3} = \frac{8x-17}{x-6}$

338. $\frac{5x-6}{x-3} + \frac{7x-8}{x-4} = \frac{4(3x-1)}{x-1}$

339. $\frac{3x-5}{x-3} + \frac{2x-5}{x-4} = \frac{35(x-2)}{7x-24}$

340. $\frac{2(x-1)}{x-7} + \frac{x+8}{x-4} = \frac{3(5x+16)}{5x-28}$

---

341. $(a-b)(ax-b) - (a+b)(a+bx) = 2b^2(1-x)$

342. $((a^2-b^2)x - ab)(a-(a+b)x) + 2ab^2x =$
$((a+b)^2x + ab)(b-(a-b)x)$

343. $a + b + \frac{x}{a+b} = a - b + \frac{x}{a-b}$

344. $\frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{x} = \frac{1}{a-b} + \frac{a-b}{x}$

345. $\frac{x}{ab} + ab = \frac{1}{a+b} + (a+b)x$

346. $a^2b + \frac{a-x}{b} = ab^2 + \frac{b-x}{a}$

347. $\frac{a^2}{b}(x-a) - \frac{b+c}{ab}(a-2x) = \frac{b^2}{a}(a-x) + \frac{b+c}{b}$

348. $\frac{ax-bc}{ab} - \frac{bx-ac}{c^2} = \frac{cx-b^2}{bc} - \frac{x-a}{c} + 1 - \frac{x}{a}$

349. $a(x - a^2) = b(x - b^2)$

350. $(a - 1)^2 (a - x) + (2a + 1)(a - 1) = 3ax$

351. $\frac{a}{b}(x - a) + \frac{b}{a}(x - b) = x$

352. $a^3(a - x) - b^3(b - x) + ab(a - b)x = 0$

353. $a(3b + 2x) - 2a^2 = b(b + x)$

354. $5a(x - a) - 7b(x - b) + 2ab = 0$

355. $(a - x)(b + x) - b(a - b) = (a + c)^2 - (c + x)x$

356. $\frac{3(x - a)}{b} - \frac{2(x - b)}{a} = 1$

357. $\frac{3(x - 2a)}{b} + \frac{2(x - 3b)}{a} = 13$

358. $\frac{a - x}{b} - \frac{c}{a} = \frac{b - x}{a} - \frac{c}{b}$

359. $\frac{a + b - x}{c} + \frac{a + c - x}{b} + \frac{b + c - x}{a} + 3 = 0$

360. $\frac{a}{b}(a - x) + \frac{a}{c}(b - x) + \frac{c^2 - ax}{a} + \frac{ab - cx}{b} = \frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{a}$

361. $\frac{ac}{m(a - b)b} - \frac{(m + n)^2 x}{mb} - \frac{nx}{b} = \frac{c}{m(a - b)} - \frac{3nx}{b}$

362. $\frac{a(3x - 2a)}{a + 3b} + \frac{b(3x - 2b)}{3a + b} = x$

363. $\frac{a(x - a)}{a + 2b} + \frac{b(x - b)}{2a + b} = \frac{x}{2}$

364. $\frac{a}{c} - \frac{ax}{cx - 1} = \frac{c}{a} - \frac{cx}{ax - 1}$

365. $\frac{b - x}{a + x} + \frac{c - x}{a - x} = \frac{a(c - 2x)}{a^2 - x^2}$

366. $\frac{ax + b}{ax - b} - \frac{bx}{ax + b} = \frac{ax}{ax - b} - \frac{(ax^2 - 2b)b}{a^2x^2 - b^2}$

367. $\frac{ax}{mx - p} + \frac{cx}{nx - q} = \frac{a}{m} + \frac{c}{n}$

368. $\frac{ax - b}{mx - p} + \frac{cx - d}{nx - q} + \frac{(bn + dm)x - (bq + dp)}{(mx - p)(nx - q)} = \frac{a}{m} + \frac{c}{n}$

369. $\frac{x - a}{x - m} + \frac{x - b}{x - n} = 2$

370. $\frac{ax + b}{x - m} + \frac{cx + d}{x - n} = a + c$

371. $\frac{m-n}{x-a}-\frac{a-b}{x-m}=\frac{m-n}{x-b}-\frac{a-b}{x-n}$

372. $abcx+ab^2+cd^2x+acd=abdx+a^2b+c^2dx+bcd$

373. $a^2cx+ab^2+abdx+bcd=a^2b+b^2dx+acd+abcx$

374. $\frac{b+d-c}{a}x+\frac{a+c-d}{b}=\frac{b+d-a}{c}+\frac{a+c-b}{d}x$

375. $a+b+(c+d)x=\frac{ab}{cd}(a+b)+\frac{cd}{ab}(c+d)x$

376. $\frac{a(x-3)}{b}+\frac{b(x-3)}{a}+\frac{a^2(x-1)}{b^2}+\frac{b^2(x-1)}{a^2}=4$

377. $\frac{a(3-2x)}{b}+\frac{b(3x-2)}{a}-\frac{a-bx}{2(a+b)}=2$

378. $\frac{a(2x-1)}{b}-\frac{b(x-2)}{a}-\frac{ax+b}{a-b}+2=0$

379. $\frac{(a+b)(x-b)}{ab}+(a-b)x=\frac{a^3-b^3}{a+b}+\frac{a}{b}$

380. $\frac{(a+c)(x-b)}{a^2}+\frac{(b+c)(x-2b)}{bc}+\frac{b(a+c)}{ac}+2=\frac{(2x-b)(a+b)}{ab}$

381. $\frac{a^2+b^2}{b}(x-a)+\frac{a^2-b^2}{a}(x-b)=2a(2a+b-x)$

382. $\frac{(a+1)}{b}x+\frac{(b+1)x}{a}+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

383. $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2x}{ab}$

384. $\frac{(a+b)x}{c^2}+c-\frac{(b-c)x}{a-b}-\frac{a-d}{c}=\frac{(a+c)x}{a-b}-\frac{b-d}{c}$

385. $\frac{(a+1)x}{b}-\frac{(b+1)x}{a}+\frac{a(x-a)}{b^2}-\frac{b(x-b)}{a^2}=(a-b)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$

386. $\frac{ax+b}{mx-n}+\frac{cx+d}{px-q}=\frac{a}{m}+\frac{c}{p}$

387. $\frac{m-n}{x-a}+\frac{n-p}{x-b}+\frac{p-m}{x-c}=0$

388. $\frac{m}{x-a}+\frac{n}{x-b}+\frac{p}{x-c}=\frac{m}{x-c}+\frac{n}{x-a}+\frac{p}{x-b}$

389. $\frac{a+c}{a-b}-\frac{(3a-5c)x}{2a-3b}+\frac{(3a-2b)(x-1)}{a-b}=\frac{(5c-2b)x}{2a-3b}-\frac{a-c}{a-b}$

390. $\frac{ab(3-x)}{(a+b)^2}+\frac{ab(3x-1)}{(a-b)^2}+x-1=\frac{ab(x+1)}{a^2+b^2}$

391. $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}$

392. $\frac{(5a-3c)x}{2a^2}+2a-\frac{3ax}{3a-2c}-\frac{6a-5n}{2a}=\frac{5n-4c}{2a}-\frac{(3c-2a)x}{3a-2c}$

393. $\frac{bx}{2b-a}-\frac{(3bc+ad)x}{2ab(a+b)}-\frac{5ab}{3c-d}=\frac{(3bc-ad)x}{2ab(a-b)}-\frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}$

394. $\frac{x-bc}{a}+\frac{x-ac}{b}+\frac{x-ab}{c}=2(a+b+c)$

395. $\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{3x}{a+b+c}=0$

396. $\frac{a(x-a)}{b+c}+\frac{b(x-b)}{a+c}+\frac{c(x-c)}{a+b}=x$

397. $\frac{(m-n)(x-a)}{b+c}+\frac{(n-p)(x-b)}{a+c}+\frac{(p-m)(x-c)}{a+b}=0$

398. $\frac{ax-1}{a^2(b+c)}+\frac{bx-1}{b^2(a+c)}+\frac{cx-1}{c^2(a+b)}=\frac{3x}{ab+ac+bc}$

399. $\frac{x+2ab}{a+b-c}+\frac{x-2ab}{a-b+c}=\frac{x+2ab}{a+b+c}+\frac{2ab-x}{b+c-a}$

400. $\frac{x-2a}{b+c-a}+\frac{x-2b}{a+c-b}+\frac{x-2c}{a+b-c}=3$

401. $\frac{x-2a}{b+c-a}+\frac{x-2b}{a+c-b}+\frac{x-2c}{a+b-c}=\frac{3x}{a+b+c}$

402. $\frac{a-x}{a^2-bc}+\frac{b-x}{b^2-ac}+\frac{c-x}{c^2-ab}=\frac{3x}{ab+ac+bc}$

403. $\frac{a-x}{a^2-bc}-\frac{b-x}{b^2-ac}+\frac{c-x}{c^2-ab}=\frac{1}{a+b+c}$

---

404. $2x=1+x\sqrt{3}$ 405. $x\sqrt{7}=12+x$

406. $x\sqrt{a}-a=x\sqrt{b}-b$ 407. $x\sqrt{a}+\sqrt{c}=x\sqrt{c}+\sqrt{a}$

408. $x\sqrt{5}-2a=2x-a\sqrt{5}$ 409. $x\sqrt{5}-\frac{5}{2}a=2x-a\sqrt{5}$

410. $(x+a):(x+b)=\sqrt{a}:\sqrt{b}$

411. $(x-a\sqrt{b}):(x-b\sqrt{a})=\sqrt{b}:\sqrt{a}$

412. $\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}=\frac{x+\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}$ 413. $\frac{(x-2)\sqrt{a}}{x\sqrt{a}-2\sqrt{b}}=\frac{x\sqrt{a}-2\sqrt{b}}{(x+2)\sqrt{a}}$

414. $\frac{a+1}{\sqrt{x}}:\frac{b-1}{\sqrt{x}}=(a+\sqrt{x}):(b-\sqrt{x})$

415. $\frac{x-\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{x-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=2$

416. $\frac{\sqrt{a}-x}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}-x}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{c}-x}{\sqrt{c}} = 3$

417. $\frac{x-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{x-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} + \frac{x-\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = 3$

---

418. $\sqrt{x} = 3,\quad \sqrt{x} = 13,\quad \sqrt[3]{x} = 2,\quad \sqrt[3]{x} = a$

419. $\sqrt{x} + 5 = 7$

420. $8 - \sqrt{x} = 3$

421. $5 + \sqrt[3]{x} = 8$

422. $a - \sqrt[3]{x} = b$

423. $\sqrt{3x} - 1 = 5$

424. $5 + \sqrt{2x} = 7$

425. $\sqrt{\tfrac{1}{2}x} - 3 = 2$

426. $7 - \sqrt{\tfrac{3}{4}x} = 4$

427. $3 + 2\sqrt{x} = 5$

428. $5 + 3\sqrt{x} = 7$

429. $4 + \tfrac{1}{2}\sqrt{x} = 6$

430. $\tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{4}\sqrt{x} = 2$

431. $7 + 1\tfrac{1}{2}\sqrt{3x} = 10$

432. $\tfrac{27}{4} - 3\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3x}{2}} = \tfrac{3}{2}$

433. $\sqrt{3x-5} + 4 = 5$

434. $\sqrt[3]{7x-6} + 6 = 10$

435. $\sqrt{x-a} - b = c$

436. $a - \sqrt{b-x} = c$

437. $5 - 3\sqrt{2x-1} = 2$

438. $n\sqrt[3]{a-x} - b = c$

439. $10 - 3\sqrt{\tfrac{1}{3}x+1} = 4$

440. $7\tfrac{1}{2} + 3\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{2\tfrac{1}{2}x+2} = 17\tfrac{1}{2}$

441. $\sqrt{3x-7} = \sqrt{4x-9}$

442. $\sqrt[3]{5x-7} = \sqrt[3]{4x+3}$

443. $2\sqrt{x-7} = \sqrt{3x-17}$

444. $4\sqrt[3]{5x-8} = 3\sqrt[3]{9x+1}$

445. $\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{5x+4} - \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{2x+3} = 0$

446. $5\sqrt{x} - 7 = 3\sqrt{x} - 1$

447. $7\sqrt{3x} - 1 = 5\sqrt{3x} + 5$

448. $a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} - d$

449. $\tfrac{1}{2}\sqrt{3x} - 2 = \tfrac{2}{3}\sqrt{3x} - 3$

450. $\tfrac{3}{2}\sqrt{x} - 16 = \tfrac{2}{5}\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}\sqrt{x}$

451. $\tfrac{1}{2}\sqrt{x} + \tfrac{1}{3}\sqrt{x} + \tfrac{1}{4}\sqrt{x} = 6\tfrac{1}{2}$

452. $\tfrac{2}{3}(7\sqrt{x}+5) - 5 = \tfrac{3}{2}(3\sqrt{x}-1)$

453. $\frac{16-\sqrt{x}}{2} - \frac{10-\sqrt{x}}{3} = \sqrt{x}$

454. $\frac{\sqrt{x}-3}{7} - \frac{\sqrt{x}-25}{5} = 7 - \frac{2+\sqrt{x}}{4}$

455. $\frac{7}{\sqrt{x}} + \frac{5}{3} = \frac{6}{\sqrt{x}} + 2$

456. $\frac{5+\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}} = 4$

457. $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{a}{b}$

458. $\frac{9}{5+\sqrt{x}} = \frac{4}{8-\sqrt{x}}$

459. $\frac{17}{6+\sqrt{x}} = \frac{29}{7+2\sqrt{x}}$

460. $\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3} = 7$

461. $\frac{5\sqrt{x}+6}{2\sqrt{x}+1} = 3$

462. $\frac{7\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} = 12$

463. $\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{3}}{3\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

464. $17 - 4\sqrt{\frac{3x+5}{x-7}} = 1$

465. $24 - 7\sqrt[3]{\frac{4x-1}{x-6}} = 3$

466. $\frac{a}{a+\sqrt{x}} = \frac{b}{\sqrt{x}}$

467. $\frac{a-b\sqrt{x}}{c-d\sqrt{x}} = \frac{m}{n}$

468. $\frac{a+b\sqrt{x}}{a+b} = \frac{c+d\sqrt{x}}{c+d}$

469. $\frac{a+b\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+b} = \frac{c+d\sqrt{x}}{c\sqrt{x}+d}$

470. $\frac{a-\sqrt{bx}}{a+\sqrt{bx}} = \frac{2b-3\sqrt{ax}}{2b+3\sqrt{ax}}$

471. $\frac{2a+3\sqrt{bx}}{3a+2\sqrt{bx}} = \frac{3b+2\sqrt{ax}}{2b+3\sqrt{ax}}$

472. $7 + \sqrt{x^2 - 11x + 4} = x$

473. $8 + \sqrt{(x-10)(x-5)} = x$

474. $\sqrt{(x+1)(x+6)} - x = 3$

475. $x - \sqrt{ax(1+x) + 1 - x} = 1$

476. $\sqrt{13 + 4\sqrt{x-1}} = 5$

477. $\sqrt{37 - 7\sqrt{5x+4}} = 4$

478. $\sqrt[4]{x^2-7x+19} = \sqrt{x-3}$

479. $\sqrt[4]{3x^2+5x+4} = \sqrt{2x-2}$

480. $\sqrt{6x + 4 + \sqrt{x^4 + 10x^2 + 3x + 10}} = x + 3$

481. $\sqrt{10x + 32 + \sqrt{x^4 - 14x^2 + 5x - 1}} = x + 5$

482. $\sqrt{n^2 + 2mnx - am^2 + m^2\sqrt{x^4 + 2ax^2 + bx + c}} = mx + n$

483. $\sqrt{2x} + \sqrt{3x} = 1$

484. $\sqrt{ax} + \sqrt{bx} = c$

485. $\sqrt{x} + \sqrt{3x} = 2$

486. $\sqrt{x} + \sqrt{2x} = 1$

487. $5\sqrt{x} + \sqrt{3x} = 22$ 488. $2\sqrt{x} - \sqrt{2x} = 2 + \sqrt{2}$

489. $\sqrt{3x} - \sqrt{2x} + \sqrt{x} = 2\sqrt{2}$

490. $\sqrt{ax} + \sqrt{bx} + \sqrt{cx} + \sqrt{x} = m$

491. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2x} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3x}$

492. $(1 - \sqrt{x}) : (1 - 3\sqrt{x}) = 1 : 4$

493. $(2 - 3\sqrt{x}) : (3 - 2\sqrt{x}) = 2 : 1$

494. $(a + \sqrt{x})\sqrt{x} : (b - \sqrt{x})\sqrt{x} = (a + 1) : (b - 1)$

495. $(x - ax) : \sqrt{x} = \sqrt{x} : x$

496. $(3\sqrt{x} + 2)(3\sqrt{x} - 2) = 5$

497. $(2\sqrt{x} + 3)(2\sqrt{x} - 3) = 7$

498. $(\sqrt{x} - 7)(\sqrt{x} - 3) = (\sqrt{x} - 6)(\sqrt{x} - 5)$

499. $(9 - 2\sqrt{x})(21 + \sqrt{x}) = (11 - \sqrt{x})(3 + 2\sqrt{x})$

500. $(4\sqrt{x} - 7) : (5\sqrt{x} - 6) = (\sqrt{x} - 7) : (\sqrt{x} - 6)$

501. $(11 - \sqrt{25x}) : (27 - 5\sqrt{x}) = (\sqrt{x} + 2) : (\sqrt{x} - 4)$

502. $(a - \sqrt{x})(b - \sqrt{x}) = (c + \sqrt{x})(d + \sqrt{x})$

503. $\sqrt{7x + 2} = \frac{5x + 6}{\sqrt{7x + 2}}$ 504. $2\sqrt{3x - 1} = \frac{5x + 8}{\sqrt{3x - 1}}$

505. $3\sqrt{4x - 3} - \frac{10x}{\sqrt{4x - 3}} = \frac{1}{\sqrt{4x - 3}}$

506. $\frac{9x}{\sqrt{10x - 9}} - \sqrt{10x - 9} = \frac{2}{\sqrt{10x - 9}}$

507. $\sqrt{x + 2} = \frac{x - 1}{\sqrt{x - 3}}$ 508. $\sqrt{x + 4} = \frac{x + 1}{\sqrt{x - 1}}$

509. $\sqrt{9x + 10} = \frac{6x + 10}{\sqrt{4x + 9}}$ 510. $\sqrt{2x - 1} = \frac{2(x - 3)}{\sqrt{2x - 10}}$

511. $\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \frac{b}{\sqrt{b - x}}$

512. $\sqrt{14 - x} + \sqrt{11 - x} = \frac{3}{\sqrt{11 - x}}$

513. $\sqrt{12x - 11} + \sqrt{3x + 16} = \frac{9x + 27}{\sqrt{3x + 16}}$

514. $2\sqrt{2x + 2} + \sqrt{x + 2} = \frac{12x + 4}{\sqrt{8x + 8}}$

515. $\frac{1+2\sqrt{4x-7}}{6+5\sqrt{4x-7}} = \frac{3-4\sqrt{4x-7}}{3-10\sqrt{4x-7}}$

516. $\frac{1+2\sqrt{3x-5}}{1+3\sqrt{3x-5}} = \frac{11+2\sqrt{3x-5}}{11+5\sqrt{3x-5}}$

517. $\sqrt{x+9}-\sqrt{x}=1$ 518. $\sqrt{4x-3}+2\sqrt{x}=3$

519. $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-3}=9$ 520. $\sqrt{x+a^2}-\sqrt{x}=b$

521. $\sqrt{2(x+1)}+\sqrt{2x+15}=13$

522. $\sqrt{3x-5}+\sqrt{3x+12}=17$

523. $\sqrt{9x+10}-3\sqrt{x-1}=1$

524. $\sqrt{x+60}=2\sqrt{x+5}+\sqrt{x}$

525. $\sqrt{9x+7}+\sqrt{4x+1}=\sqrt{25x+14}$

526. $\sqrt{4x+9}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x+6}$

527. $2\sqrt{x+5}+3\sqrt{x-7}=\sqrt{25x-79}$

528. $3\sqrt{x+3}-2\sqrt{x-12}=5\sqrt{x-9}$

529. $\sqrt{x-9}+\sqrt{x+12}=\sqrt{x-4}+\sqrt{x+3}$

530. $\sqrt{x-7}+\sqrt{x-2}-\sqrt{x-10}=\sqrt{x+5}$

531. $\sqrt{x+15}+\sqrt{x-24}-\sqrt{x-13}=\sqrt{x}$

532. $(a-x):(\sqrt{a}+\sqrt{x})=(b-x):(\sqrt{b}-\sqrt{x})$

533. $\left(\sqrt{a\sqrt{b}}-\sqrt{b\sqrt{a}}\right)\sqrt{x}=a\sqrt{b\sqrt{x}}-b\sqrt{a\sqrt{x}}$

534. $\sqrt{(a^2b^2-x)(a^2c^2-x)}+\sqrt{(a^2b^2-x)(b^2c^2-x)}$
$+\sqrt{(a^2c^2-x)(b^2c^2-x)}=x$

XXI.

Exponentialgleichungen, welche auf Gleichungen des ersten Grades führen.

Die Gleichungen 1.—40. sind ohne Anwendung von Logarithmen zu lösen.

1. $a^{x+7}=a^{10}$ 2. $b^{5-x}=b^3$

3. $y^{2x+3}=y^{8-3x}$ 4. $m^{3(x-5)}=m^{2(x-4)}$

5. $a^0.a^{2(3x-7)}=a.a^{2x-3}$ 6. $m.m^{3(x-7)}=m^{5(x-9)}.m^{x-5}$

7. $(a^{x-5})^{x-6} = (a^{x-8})^{x-1}$

8. $a^7 . (a^{x-1})^{5x-1} = a^{x-8} . (a^{x-2})^{5x-7}$

9. $\sqrt[3]{a^{17-x}} = a^{x-5}$ 10. $\sqrt[4]{a^{13x-2}} = \sqrt[3]{a^{7x+4}}$

11. $\sqrt[x-3]{a^7} = \sqrt[x-7]{a^3}$ 12. $\sqrt[x-2]{a^{x-3}} = \sqrt[x+3]{a^{x+1}}$

13. $\sqrt{a^{x-3}} = \sqrt[x-2]{a^3}$ 14. $\sqrt[3]{a^{2x-3}} = \sqrt[2x-5]{a^5}$

15. $\sqrt[m]{a^{x-m}} = \sqrt[x-n]{a^n}$ 16. $\sqrt[n]{a^{x-m}} = \sqrt[x-n]{a^m}$

17. $\sqrt[3]{a^{5x+7}} . \sqrt[4]{a^{3x+10}} = a^2 . \sqrt{a^{5x}}$

18. $\sqrt{a^{7-3x}} . \sqrt[3]{a^{x+1}} . \sqrt[4]{a^{5x-7}} . \sqrt[5]{a^{7-2x}} = 1$

19. $5^x = 25$, $3^x = 27$, $2^x = 1024$

20. $2^x = 16$, $2^x = -16$, $2^{-x} = 16$

21. $(-2)^x = 16$, $(-2)^x = -16$, $(-2)^{-x} = -16$

22. $(-2)^x = 32$, $(-2)^x = -32$, $(-2)^{-x} = -32$

23. $27^x = 81$, $27^x = -81$ $27^{-x} = 81$

24. $(-27)^x = 81$, $(-27)^x = -81$, $(-27)^{-x} = 81$

25. $16^x = 8$, $16^x = -8$, $(-16)^x = -8$

26. $32^x = 8$, $32^x = -8$, $(-32)^x = -8$

27. $10^x = 1$, $100^x = 1000$, $1000^x = 100000$

28. $10^x = 0{,}01$, $100^x = 0{,}001$, $1000^x = 0{,}01$

29. $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^7$ 30. $\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^x} = \sqrt[5]{\left(\frac{b}{a}\right)^{11}}$

31. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$ 32. $\left(\frac{13}{17}\right)^{2x-5} = \left(\frac{17}{13}\right)^{5x-9}$

33. $(0{,}25)^x = 2^{10}$ 34. $4^x = 0{,}125$

35. $(0{,}05)^{2x-1} = 20^{3x-8}$ 36. $8^{2x+1} = (0{,}125)^{4-3x}$

37. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-7} = (0{,}75)^{3x-11}$ 38. $\left(\frac{7}{8}\right)^{5x-7} = (0{,}765625)^{2(x-1)}$

39. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

40. $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25 . 128^{\frac{x+17}{x-3}}$

---

41. $a^x = b$, $\sqrt[x]{a} = mn$, $a^x . b^{mx} = c$

42. $a^{n-x} = nb^x$, $a^{mx-p} = b^{nx-q}$, $a^{3x-2} . b^{2x-3} = c^{4x-5}$

43. $10^x = 3$, $100^x = 0{,}005736$ $1000^x = 0{,}093768$

44. $2^x = 10$, $7^x = 100$, $0{,}025229^x = 1000$

45. $3{,}111^x = 1{,}7497$

46. $2{,}506184^x = 10$

47. $10^x = 1{,}3713^{10}$

48. $(1{,}04952^x)^{1,05} = (100^{1,05})^{1,04952}$

49. $10^{4x} = 5{,}7544$

50. $5{,}188^x = 88238$

51. $7{,}8886^x = 9{,}92126$

52. $1428{,}57^x = 0{,}0007$

53. $\sqrt[x]{9977} = 2{,}511308$

54. $\sqrt[x]{8{,}3946} = 1000$

55. $\sqrt[x]{7692{,}3} = 0{,}00013$

56. $\sqrt[10]{10} = \sqrt[x]{1{,}37129}$

57. $(0{,}088308)^{2x+3} = (88{,}308)^{2x-3}$

58. $3{,}9345^{3x-5} = 5 \,.\, (1{,}2708)^{4x-9}$

59. $25^{-x} = 11$

60. $37^{-x} \,.\, (1105{,}8)^x = 57^{x-1}$

61. $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{7}\right)^{3x-2}$

62. $179\left(\frac{11}{13}\right)^{13x-11} = 356\left(\frac{3}{5}\right)^{5x-3}$

63. $21^{\frac{1}{x}} = 1{,}78$

64. $10^{\frac{1}{x}} = (32{,}43)^{\frac{1}{49}}$

65. $\sqrt[7x]{7^{5x+7}} = \sqrt[5x]{5^{7x+5}}$

66. $\sqrt[3x]{100^{2x+5}} = \sqrt[x]{4{,}64159^{5x+2}}$

67. $\left(\frac{725}{936}\right)^{2x-9} . \left(\frac{351}{575}\right)^{x-3} = \left(\frac{87}{184}\right)^{x-2} . \left(\frac{575}{351}\right)^{x-6}$

68. $\sqrt[3]{\left(\frac{228}{697}\right)^{2x-7}} . \sqrt[7]{\left(\frac{943}{532}\right)^{3x-8}} = \left(\frac{897}{1547}\right)^{x-4}$

69. $3^x - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

70. $5^{2x+1} - 7^{x+1} = 5^{2x} + 7^x$

71. $7^{2x-1} - 3^{3x-2} = 7^{2x+1} - 3^{3x+2}$

72. $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$

73. $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$
$+ 3^{x+3} + 3^{x+4}$

74. $a\,p^{hx+m} + a_1\,p^{hx+m_1} + a_2\,p^{hx+m_2} = b\,q^{kx+n} + b_1\,q^{kx+n_1}$
$+ b_2\,q^{kx+n_2}$

75. $5^{(7^x)} = 7^{(5^x)}$

76. $8^{(3^x)} = 6^{(4^x)}$

77. $5^{(3^x)} = 3{,}694575^{(3,694575^x)}$

78. $3^{(3^x)} = 40{,}76472^{(2^x)}$

XXII.*)
Anwendung der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

Aus einer eingekleideten Aufgabe die betreffende Gleichung zu bilden ist nichts als die Worte der Aufgabe in mathematische Zeichen zu übertragen. Man denkt sich die Unbekannte als schon gefunden, bezeichnet dieselbe mit x, nimmt mit derselben, d. h. mit x alle in der Aufgabe vorgeschriebenen Operationen vor und thut, als ob man zusehen wolle, ob die Größe x auch richtig gefunden sei, oder als ob man die Probe machen wolle. Da muß sich die Gleichung von selbst ergeben. Die beiden Seiten der Gleichung sind nur zwei verschiedene Ausdrücke für dieselbe Größe. Es ist zum Verständnis durchaus nötig, bei jedem Ansatz angeben zu lassen, welche Größe durch die Gleichung auf doppelte Weise ausgedrückt ist.

Bei verwickelteren Aufgaben und bei solchen, wo mehrere Größen gesucht werden sollen, muß man erst überlegen, welche Größe man am besten zur Unbekannten wählt, da es nicht immer zweckmäßig ist, die in der Aufgabe geforderten Größen direkt zu suchen.

Alle in diesem Abschnitt vorkommenden Aufgaben sollen durch Einführung von nur einer Unbekannten gelöst werden, selbst wenn die Aufgabe mehrere zu bestimmende Größen enthält. Manche Aufgaben dieser Art lassen sich durch Einführung von nur einer Unbekannten leichter rechnen; bei manchen scheint die Einführung mehrerer Unbekannten notwendig, ist es aber nicht, und der Schüler soll eben mit einer Unbekannten auszureichen versuchen.

Alle diese Aufgaben lassen sich auch leicht ohne Algebra durch bloße Schlüsse lösen**), die vom Gegebenen ausgehen und stufenweise zu dem Gesuchten hinführen. Die Algebra hat freilich den Vorteil, daß man die gesuchte Größe schon als bekannt ansehen und mit ihr wie mit einer bekannten operieren kann; sie kann also, um den Ansatz zu entwickeln, ganz nach Belieben vorn oder hinten oder in der Mitte, beim Gegebenen oder beim Gesuchten anfangen, sie muß immer zum Ziele kommen. Ohne Algebra sind diejenigen Aufgaben dieses Abschnitts, bei welchen man nicht umhin kann, die gesuchte Größe gleich in die Rechnung mit hineinzuziehen, schon schwieriger, doch immer lösbar.

Erste Stufe.

1. Ich habe eine Zahl im Sinne. Addiere ich zu derselben 371, so erhalte ich 731. Wie heißt dieselbe?

*) Bei den Aufgaben dieses Abschnittes, wie bei denen der Abschnitte XXIV, XXVI, XXIX u. s. w. ist G. = Gulden, Kr. = Kreuzer, 1 G. = 100 Kr., Fr. = Frank, 1 Fr. = 100 Centimes.

**) Es ist eine sehr gute Übung, auch diesen Weg bei den Aufgaben aufzusuchen.

2. Welche Zahl giebt $8\frac{1}{8}$, wenn sie um $7\frac{1}{7}$ vermehrt wird?

3. Ich denke mir eine Zahl; wenn ich sie um 1234 vermindere, so erhalte ich 4321. Wie heißt dieselbe?

4. Von welcher Zahl muß man $5\frac{3}{5}$ abziehen, um $4\frac{3}{4}$ zu erhalten?

5. Um welche Zahl muß man 0,737 vermindern, daß man 0,373 erhält?

6. Mit welcher Zahl muß man $4\frac{1}{2}$ multiplizieren, um 3 zu erhalten?

7. Das Wievielfache von $2\frac{1}{2}$ ist $3\frac{1}{3}$?

8. Ich teile eine gedachte Zahl durch 0,7 und erhalte 8,3. Wie heißt dieselbe?

9. Durch welche Zahl muß man 0,767 teilen, um 5,9 zu erhalten?

10. Von welcher Zahl ist $9\frac{1}{2}$ der 7. Teil?

11. Zu welcher Zahl muß man a addieren, um b zu erhalten?

12. Welche Zahl giebt 0, wenn sie um a vermehrt wird?

13. Welche Zahl muß man um a vermindern, um b zu erhalten?

14. Um welche Zahl muß man a vermindern, daß b herauskommt?

15. Von welcher Zahl ist a das mfache?

16. Von welcher Zahl ist a der m. Teil?

---

17. Das Doppelte und das Dreifache einer Zahl betragen zusammen 100. Wie heißt dieselbe?

18. Das Siebenfache einer Zahl übertrifft diese selbst um 192. Wie heißt die Zahl?

19. Wenn man eine gewisse Zahl von ihrem 13fachen abzieht, so erhält man 204. Wie heißt die Zahl?

20. Der 3. Teil von dem Zwanzigfachen einer Zahl ist 500. Wie heißt die Zahl?

21. Addiert man zum 21fachen einer Zahl noch 100, so erhält man 7,6. Wie heißt die Zahl?

22. Zieht man von 62,26 das 3,8fache einer Zahl ab, so kommt 33. Welche Zahl ist dies?

23. Das $3\frac{2}{3}$fache und das 0,08fache einer Zahl geben in Summe 281. Wie heißt die Zahl?

24. Welche Zahl giebt von 7 subtrahiert ebenso viel als durch 6 dividiert?

25. Zu welcher Zahl braucht man nur $1\frac{1}{2}$ zu addieren, um ihr $1\frac{1}{2}$faches zu erhalten?

26. Welche Zahl muß man mit $\frac{5}{4}$ multiplizieren, damit sie um $\frac{5}{4}$ größer wird?

27. Von welcher Zahl muß man 3 subtrahieren, um ihren 3. Teil zu erhalten?

28. Welche Zahl muß man durch 7 teilen, um eine um 7 kleinere Zahl zu erhalten?

29. Die Hälfte und der dritte Teil einer Zahl sind zusammen 100. Welche Zahl ist dies?

30. Von welcher Zahl ist die Hälfte um 166,5 kleiner als das Ganze.

31. Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß das Siebentel derselben das Achtel um 10 übertrifft?

32. Welche Zahl ist um ihren 10. Teil kleiner als 44?

33. Welche Zahl ist um ihren 13. Teil größer als 60?

34. Wenn ich vom 7fachen einer Zahl 12 abziehe, so erhalte ich ebenso viel, als wenn ich zum 4fachen 12 addiere. Wie heißt die Zahl?

35. Welche Zahl giebt um ihren 3. und 5. Teil vermehrt 92?

36. Wie heißt die Zahl, deren dritter, vierter, fünfter und sechster Teil zusammen 3 weniger sind als die Zahl selbst?

37. Welche Zahl ist mit ihrem mfachen zusammen = a?

38. Welche Zahl ist mit ihrem m. Teil zusammen = a?

39. Der m. und n. Teil einer Zahl sind zusammen = a. Wie heißt die Zahl?

---

40. Ein Kaufmann legte mittags 52 Mk. in seine Kasse, nahm nachmittags 221 Mk. 20 Pf. heraus und legte abends wieder 349 Mk. 90 Pf. hinein. Als er spät sein Geld zählte, fand er 846 Mk. 70 Pf. in der Kasse. Wie viel hatte er am Morgen darin gehabt?

41. Von 51 G., welche ich bei mir hatte, gab ich eine Summe aus und behielt noch doppelt so viel, als ich ausgegeben. Wie viel betrug die Ausgabe?

42. Nimmt man mir $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ meines Geldes, so behalte ich noch 45 Mk. Wie viel habe ich demnach?

43. Du hast wohl 4000 Fr. Gehalt? fragte A seinen Freund B. Noch lange nicht, entgegnete B; wenn ich um den 4. Teil mehr hätte, so würden immer noch 200 Fr. an 4000 fehlen. Wie hoch war sein Gehalt?

44. Ein Vater von 44 Jahren war um 4 Jahre mehr als $13\frac{1}{3}$-mal so alt als sein jüngstes Kind. Wie alt war dies?

45. Hätte ich 19 Mk. mehr, als ich habe, und noch 20 Pf., so hätte ich gerade 4mal so viel, als ich habe. Wie viel habe ich?

46. Hast du die Äpfel in jenem Korbe gezählt? fragte ein Knabe einen andern. — Ja, antwortete dieser. — Sind es wohl 1000? — Noch lange keine 200; wenn es noch 3mal und noch 5mal so viel wären, so fehlte doch noch einer an 1000. Wie viel Äpfel waren in dem Korbe?

47. Ein Knabe hatte eine Anzahl Nüsse. Ein anderer bat ihn, ihm einige abzugeben. Jener antwortete: Du sollst den 4. Teil und noch 10 haben, oder, was dasselbe ist, den 5. Teil und 15, wenn du ausrechnen kannst, wie viel ich habe. Wie viel Nüsse hatte er?

48. Ein Bäcker hatte 420 Mk. in Kasse, bezahlte davon 48 Schffl. Weizen und behielt noch 60 Mk. übrig. Was kostete der Scheffel Weizen?

49. Jemand, der nach dem Preise seines Pferdes gefragt wurde,

antwortete: Hätte es 210 Mk. mehr gekostet, so betrüge der 3. Teil gerade 300 Mk. Wie hoch der Preis des Pferdes?

50. Wenn ich von meinem Gelde den 3. Teil fortnehme, und noch 100 G., so behalte ich immer noch $6\frac{1}{2}$ G. mehr als die Hälfte übrig. Wie groß die Summe?

51. Ein junger Mensch, der von seinem Freunde nach seinem Alter gefragt wurde, antwortete: Nach 24 Jahren werde ich noch um $\frac{1}{3}$ mehr als 2mal so alt sein, als ich jetzt bin. Wie alt?

52. Meine Bibliothek besteht zur Hälfte aus Büchern philologischen Inhalts, $\frac{1}{3}$ sind mathematische, die übrigen 30 geschichtliche. Anzahl der Bücher?

53. Eine Privatschule besteht aus 4 Klassen. In der ersten Klasse sind $\frac{1}{5}$, in der zweiten $\frac{1}{4}$, in der dritten $\frac{1}{3}$ der ganzen Anzahl. Wie groß ist diese, wenn in der 4. Klasse noch 20 Schüler sind?

54. Den 3. Teil meiner jährlichen Einkünfte verwende ich auf Kost und Miete, den 8. auf meine Kleidung und Wäsche, den 10. auf Nebenausgaben und erspare dabei jährlich 636 Mk. Jährliche Einnahme?

55. Ein Gymnasiast, der nach der Anzahl der Schüler seines Gymnasiums gefragt wurde, antwortete: Wenn die Zahl der Schüler noch 1mal, noch $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$mal so groß wäre, als wie sie ist, und ich zähle dann noch 100 hinzu, so macht das gerade 888. Zahl der Schüler?

56. Eine Frau verkaufte von den Eiern, welche sie nach der Stadt brachte, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{6}$ derselben. Da behielt sie noch 2 Eier mehr als die Hälfte. Wie viel Eier hatte sie ursprünglich?

57. Ein Schäfer hütete eine kleine Anzahl Schafe. Ein junger Geck, welcher vorüberging, wollte ihn foppen und sprach: Das Hüten deiner 100 Schafe muß dir nicht leicht werden! — 100 sind es lange nicht, antwortete der Schäfer; wenn ich noch 1mal, noch $\frac{1}{2}$, noch $\frac{1}{4}$mal so viel hätte, als ich habe, und dich dazu, dann hätte ich erst 100 Schafe. — Wie groß war die Anzahl der Schafe?

58. Um eine Schuld zu decken, zahlt A $\frac{1}{2}$, B $\frac{1}{3}$ und C $\frac{1}{4}$. Dadurch ergiebt sich ein Überschuß von 10 G. Wie groß war die Schuld?

59. Wenn ich von meinem Gelde an A $\frac{1}{2}$, an B $\frac{1}{3}$ und an C $\frac{1}{5}$ verschenken wollte, so würde ich um 1 Mk. zu kurz kommen. Wie groß ist die Summe, welche ich besitze?

60. Ein Müßiggänger hatte von seinem 18. Jahre an $\frac{5}{12}$ seiner Zeit verschlafen, halb so viel mit Spielen vergeudet, $\frac{1}{6}$ mit Essen und Trinken hingebracht, halb so viel mit Spazierengehen und Bummeln, $\frac{1}{16}$ im Lehnstuhl verträumt, $\frac{1}{24}$ aus dem Fenster vergafft und im ganzen nur 1 Jahr ernstlich gearbeitet. Wie alt war er geworden?

61. Ein Spieler verlor im ersten Spiele $\frac{2}{3}$ seiner mitgebrachten Barschaft, gewann im zweiten die Hälfte und verlor im dritten abermals $\frac{1}{4}$ seiner ursprünglichen Barschaft. Er zählte dann sein Geld und hatte noch 14 Fr. Wie viel hatte er anfangs?

62. Ein anderer Spieler gewann im ersten Spiel $\frac{1}{2}$, im zweiten Spiele $\frac{1}{3}$ seiner anfänglichen Barschaft, verspielte aber im dritten Spiele

$\frac{3}{4}$ derselben und hatte somit nur noch 1 G. gewonnen. Wie viel hatte er ursprünglich?

63. Ich habe eine Zahl im Sinne, sagte A zu B; versuche, sie zu erraten. Addiere ich 6, multipliziere die Summe mit 7, ziehe 1 ab, dividiere durch 10 und addiere jetzt noch 1, so erhalte ich die ursprüngliche Zahl. Wie groß war dieselbe?

64. Ein Rechenmeister verlangte von seinen Schülern, sie sollten die Anzahl der Thaler erraten, welche er in der Tasche habe. Ziehe ich 7 ab, sagte er, multipliziere den Rest mit 5, lege jetzt 2 Thlr. hinzu und nehme davon die Hälfte, so habe ich nur noch 1 Thaler. Wie viel hatte er?

65. Kannst du erraten, wie viel Schafe mein Vater hat, fragte eine Knabe den andern. Zieht man 2 ab, teilt sie dann in 4 gleiche Teile, nimmt von jedem Teil ein Schaf ab und teilt dann jeden Teil noch wieder in 2 gleiche Teile, so kommen auf jeden der letzten noch 10 weniger als 100. Wie viel Schafe?

66. Von diesem Weizen hoffe ich das 10. Korn zu ernten, sagte ein Landmann. Er erntete jedoch nur 28 T. 15 Ctr. Das waren $6\frac{1}{4}$ Tonnen weniger als er gehofft hatte. Wie viel hatte er ausgesäet?

67. Ein Landmann brachte Butter nach der Stadt und wollte mit dem dafür zu lösenden Gelde einige Rechnungen bezahlen. Da das Pfund Butter aber um 4 Kr. im Preise gefallen war, so mußte er noch 3 G. zulegen, um die beabsichtigten Zahlungen machen zu können. Wie viel Pfund Butter hatte er?

68. Einem Landmann verhagelte ein Teil seines Rübsens. Nach der Taxation konnte er nur $\frac{1}{4}$ der Ernte erwarten, welche er ohne Hagel gehabt haben würde. Er rechnete den Schaden auf $24\frac{3}{4}$ Tonnen. Wie viel hätte er geerntet, wenn er keinen Hagel gehabt hätte?

---

69. Von zwei Spielern verlor der eine $\frac{1}{8}$, der andere $\frac{1}{9}$ seiner mitgebrachten Barschaft, beide gleich viel. Wie viel hatte jeder mitgebracht, wenn der zweite noch 5 Mk. mehr mitbrachte als der erste?

70. Zwei Knaben, von denen der eine um 1 Jahr mehr als doppelt so alt ist als der andere, sind zusammen 22 Jahr alt. Wie alt jeder?

71. Ein Vater ist jetzt gerade 5mal so alt als sein Sohn, dieser aber um 42 Jahre jünger als sein Vater. Wie alt jeder?

72. Die Summe zweier Zahlen beträgt 77,77, ihre Differenz 9,09. Wie groß sind dieselben?

73. Greifswald und Göttingen haben zusammen 33000 Einwohner, jenes aber 1000 mehr als dieses. Wie viel Einwohner hat jede Stadt?*)

74. Europa, das fast achtmal so viel Einwohner hat als die Vereinigten Staaten von Nordamerika, ist nur 10000 Quadratmeilen größer als jene Staaten. Das ganze russische Reich, dies zu 370000

*) Den vorkommenden statistischen Angaben liegt meistens zum Grunde: Statistische Tafel von O. Hübner. 1879.

QM. gerechnet, hat jedoch noch 20000 QM. mehr als Europa und die Vereinigten Staaten zusammen. Wie groß ist jedes?

75. Die beiden größten Städte in Europa, London und Paris, haben zusammen fast 6 Millionen Einwohner, es fehlen nur 12000. Wie viel E. hat jede Stadt, wenn London noch 2012000 E. mehr hat als Paris?

---

76. Es soll 100 in zwei Teile zerlegt werden, daß der eine in dem andern $6\frac{1}{4}$mal enthalten ist. Welches sind die Teile?

77. Die Zahl 759 in zwei Teile zu zerlegen, die sich verhalten wie 5 : 6.

78. A und B fangen ein Geschäft mit 5000 Mk. an, von denen A 3000 und B 2000 hergegeben hatte. Wie viel erhielt jeder vom Gewinn, wenn derselbe 1750 Mk. betrug?

79. A giebt zu einem Geschäft 10000 G., B 8000 G. her. Als sie den Gewinn teilen, erhält A 121 G. mehr als B. Wie viel jeder?

80. Die Zahl 72 in 2 Teile zu zerlegen, die sich verhalten wie $2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2}$.

81. Zwei Zahlen sind in Summe = a und verhalten sich wie m : n. Wie heißen dieselben?

82. Zwei Zahlen verhalten sich wie m : n, und ihr Unterschied ist a. Wie heißen sie?

83. Eine Summe von 600 Mk. soll unter 2 Personen so verteilt werden, daß die eine so oft $4\frac{1}{3}$ als die andere $2\frac{1}{3}$ erhält. Wie viel erhält jede?

84. Die Werte zweier Uhren verhalten sich wie 3 : 5, da die erste 12 Mk. weniger kostet als die zweite. Wie viel kostet jede?

85. Wenn man von 2 Zahlen, deren Summe 100 ist, die erste durch 3, die zweite durch 7 dividiert, so wird ihre Summe 32. Wie heißen dieselben?

86. Zwei Zahlen sind in Summe = a; das mfache der ersten und das nfache der zweiten sind in Summe = b. Wie heißen dieselben?

87. Zwei Zahlen sind in Summe = a; der m. Teil der ersten und der n. Teil der zweiten sind in Summe = b. Wie heißen dieselben?

88. Eine chinesische Arithmetik enthält folgende Aufgabe: In einem Stalle sind Fasanen und Kaninchen; sie haben zusammen 100 Füße und 36 Köpfe. Wie viel Fasanen und wie viel Kaninchen?

89. Halle hat noch 8000 E. mehr als doppelt so viel als Bonn. Beide Städte haben zusammen 5000 E. mehr als Stettin, dies zu 81000 E. gerechnet. Wie viel Einw. hat jede der beiden Städte?

90. Dresden und Leipzig haben zusammen 344000 E. und verhalten sich ihrer Einwohnerzahl nach wie 5 : 3. Wie viel Einwohner hat jede Stadt?

91. Wenn aus London $\frac{1}{4}$ der Einwohner fortgingen und noch 110000, so würden doch noch so viel Einwohner zurückbleiben, als Petersburg hat, dies zu 690000 gerechnet. Wie viel Einw. hat London?

92. Jemand wünscht für 2 Mk. kleine Münze, Fünfpfennigstücke und Zweipfennigstücke. Wie viel erhält er von jeder Art, wenn er im ganzen 79 Stück erhält?

93. Jemand wechselt sich für 10 Sovereigns kleine Münze ein, Mark und Franken. Er erhält im ganzen 222 Stück. Wie viel macht das von jeder Art, wenn der Sover. zu 20 Mk. und der Frank zu 80 Pf. gerechnet wird?

---

94. Welches Kapital wächst nach 1 Jahr zu 17912¼ Mk. an, wenn es zu 4¾ Prozent steht?

95. Ein Kaufmann verkaufte eine Ware für 429 G. mit 2½ Prozent Verlust. Wie viel hatte er im Einkauf gegeben?

96. Eine Verlagsbuchhandlung hatte eine Bruttoeinnahme von 30000 Mark. Sie gewährte der Sortimentsbuchhandlung 33⅓ Prozent Rabatt (von 100). Für wie viel Mark Bücher hatte sie verschickt?

97. A kaufte von B ein Haus. B forderte 26000 G., die ihm A aber erst nach 8 Monaten zu zahlen brauche. A zahlte gleich mit ½ Prozent monatlichem Rabatt (auf 100). Wie viel zahlte er?

98. A wollte von B ein Grundstück kaufen. A forderte eine gewisse Summe, beanspruchte dieselbe aber erst nach 9 Monaten. Schließlich zahlte A 72000 Fr. bar. Wie viel hatte B gefordert, wenn man 5 Prozent jährlichen Rabatt (auf 100) rechnet?

99. A hat an B 2505 Mk. zu schicken, will aber die Sendung frankieren und das Porto gleich abziehen. Wie viel gab er auf die Post, wenn das Porto für 100 Mk. immer 20 Pf. beträgt?

100. Zwei Kapitalien stehen auf Zinsen, 5100 Mk. zu 5½ Prozent und 4200 Mk. zu 4¾ Prozent. In welcher Zeit werden sie zusammen 2640 Mk. Zinsen gebracht haben?

---

101. Zwei Arbeiter sollen einen Graben von 665 Meter Länge reinigen. Der eine macht täglich 45 Meter, der andere 50 Meter fertig. Wann wird die ganze Arbeit fertig sein?

102. Zwei Freunde A und B, die 156 Meilen von einander entfernt sind, wollen zusammentreffen. Nach wie viel Tagen wird das geschehen, wenn A täglich 7, B täglich 6 Meilen macht?

103. Zwei Reisende reisen von demselben Orte aus hinter einander her. A macht täglich 18, B täglich 24 Meilen. Wann wird B den A einholen, wenn A schon 2 Tage früher abreiste als B?

104. Ein Dieb entflieht und macht täglich 10½ Meilen. Ihm wird ein Häscher nachgeschickt, der täglich 15 Meilen macht. Wann wird dieser den Dieb einholen, wenn dieser schon 3 Tage unterwegs ist?

105. Aus einem Orte reitet 5 Minuten vor 6 Uhr ein Kurier ab, der jede Stunde 1½ Meilen macht. Ihm wird um 7¼ Uhr ein

anderer nachgeschickt, der jede Stunde 2 Meilen macht. Wann wird dieser den ersten einholen?

106. Aus dem Orte A geht ein Bote nach M und macht täglich 6 Meilen. Zu derselben Zeit geht von B, welches noch 10 Meilen hinter A liegt, ein anderer Bote ab und macht täglich 8 Meilen. Wann und wo wird der zweite Bote den ersten einholen?

107. Aus einem Orte reitet um 12 Uhr ein Kurier ab und macht in 40 Minuten immer eine Meile. Ihm wird um 2 Uhr ein anderer nachgeschickt, der den ersten um 8 Uhr eingeholt haben soll. Wie viel Meilen muß dieser in einer Stunde machen?

108. Zwei Körper, die 7558 Meter von einander entfernt sind, bewegen sich einander entgegen. Der erste macht in der Sekunde 7,3 Meter mehr als der zweite. Nach 80 Sekunden treffen sie zusammen. Wie viel Meter hatte jeder zurückgelegt?

109. Zwei Freunde A und B, die 49 Meilen von einander entfernt wohnten, reisten einander entgegen und reisten zugleich ab. A machte täglich $1\frac{1}{4}$ Meilen mehr als B, und bis zu ihrem Zusammentreffen im ganzen 7 Meilen mehr als B. Wie viel Meilen legte jeder täglich zurück, und wie lange waren sie unterwegs?

110. Ein Mann schrieb täglich 4 Bogen. Als er sechs Tage gearbeitet hatte, fing ein anderer an, der täglich 7 Bogen schrieb. Wie viel Bogen hatte jeder geschrieben, als der zweite ebenso viel fertig hatte als der erste?

111. Jemand giebt eine Summe von 5100 Mk. zu $4\frac{1}{2}$ Prozent auf Zinsen, 2 Jahre später eine zweite Summe von 4950 Mk. zu 5 Prozent. Nach welcher Zeit wird die zweite Summe ebenso viel Zinsen gebracht haben als die erste?

---

112. Hätte ein Buch 378 Seiten mehr, als es hat, so hätte es gerade so viel über 1000 Seiten, als es jetzt darunter hat. Wie viel Seiten hat es?

113. Wenn Glasgow $13\frac{6}{11}$mal so viel Einwohner hätte, als es hat, so hätte es gerade so viel mehr Einwohner als London, als es jetzt weniger hat. Wie viel Einwohner hat Glasgow, wenn man London zu 4 Millionen rechnet?

114. Jemand kaufte Apfelsinen. Davon kosteten 3 ebenso viel unter einer Mark als 5 darüber. Wie hoch kam das Stück?

115. Wenn ich eine gewisse Zahl mit 3 multipliziere, zum Produkt 4 addiere, die Summe mit 2 multipliziere, so erhalte ich ebenso viel, als wenn ich jene Zahl mit 13 multipliziere, zum Produkt 9 addiere und diese Summe durch 2 teile. Wie heißt die Zahl?

116. Ein Vater ist jetzt 33 Jahre alt, sein Sohn $\frac{1}{2}$ Jahr, mithin der Vater 66mal so alt als der Sohn. Nach wie viel Jahren wird der Vater nur noch 6mal so alt sein als sein Sohn?

117. Ein Vater ist jetzt 61 Jahre alt, sein Sohn 29. Vor wie viel Jahren war der Vater 9mal so alt als der Sohn?

118. Jemand ist jetzt 40 Jahre alt, sein Bruder 30, das Verhältnis ihrer Jahre mithin 4 : 3. Nach wie viel Jahren wird dasselbe 11 : 9 sein?

119. Vor wie viel Jahren war das Verhältnis der Jahre der Brüder in der vorigen Aufgabe 11 : 1?

120. Ein Rechteck ist doppelt so lang als breit. Verlängert man jede Seite um 1 Meter, so wächst der Inhalt um 16 Quadratmeter. Wie lang die Seiten?

121. Zwei Schäfer haben zusammen 444 Schafe. Giebt A dem B noch 37 ab, so hat B dreimal so viel, als dem A dann noch bleiben. Wie viel hatte jeder?

122. In einer zahlreichen Gesellschaft waren 3mal so viel Herren als Damen. Als fünf Männer mit ihren Frauen fortgingen, waren gerade noch fünfmal so viel Herren als Damen da. Wie viel Herren und wie viel Damen waren anfangs in der Gesellschaft?

123. Welche Zahl muß man zu a und zu b hinzusetzen, damit diese Zahlen sich verhalten wie m : n?

124. Welche Zahl muß man von a und von b abziehen, damit die Reste sich wie m : n verhalten?

125. Welche Zahl muß man von a abziehen und zu b addieren, daß das Produkt der neuen Zahlen von dem der gegebenen nicht verschieden ist?

126. Ein Bruch ist seinem Werte nach gleich $\frac{1}{8}$. Vermehrt man Zähler und Nenner um 1, so wird er gleich $\frac{1}{7}$. Wie heißt derselbe?

127. Ein Bruch ist seinem Werte nach gleich $\frac{3}{5}$. Vermindert man den Zähler um 2 und vermehrt den Nenner um eben so viel, so wird er gleich $\frac{1}{2}$. Wie heißt derselbe?

128. Es ist der Bruch $\frac{7}{31}$ gegeben. Um welche Zahl muß man Zähler und Nenner vergrößern, damit er sich in $\frac{1}{2}$ verwandelt?

129. Der Nenner eines Bruches ist um 3 größer als der Zähler. Vermehrt man Zähler und Nenner um 1, so verwandelt sich derselbe in $\frac{3}{4}$. Wie heißt der Bruch?

130. Der Nenner eines Bruches ist um 4 größer als der Zähler. Addiert man 11 zum Zähler und subtrahiert 1 vom Nenner, so verwandelt er sich in sein Gegenteil. Wie heißt der Bruch?

131. Welche Zahl kann man jedem Gliede der Proportion 2 : 3 = 4 : 6 hinzufügen, daß dieselbe richtig bleibt?

---

132. Die Zahl 81 in 3 Teile zu zerlegen, die sich verhalten wie 2 : 3 : 4.

133. Eine Zahl a in 3 Teile zu zerlegen, daß der erste mmal, der zweite nmal so groß wird als der dritte.

134. Eine Zahl a in 4 Teile zu zerlegen, die sich verhalten wie m : n : p : q.

135. Unter drei Familien sollen 300 Mk. verteilt werden, und

zwar nach der Anzahl der Glieder. Die erste besteht aus 5, die zweite aus 7, die dritte aus 8 Personen. Wie viel erhält jede Familie?

136. Die Summe dreier Zahlen ist 1000. Die zweite ist um 53, die dritte um 77 größer als die erste. Wie heißen dieselben?

137. Die Summe dreier Zahlen beträgt 100. Die zweite ist um 7 größer als die erste, die dritte um 5 größer als die zweite. Wie heißen die 3 Zahlen?

138. Drei Brüder A, B und C sind zusammen 30 Jahre alt. A ist um $2\frac{1}{2}$ Jahre älter, C um ebenso viel jünger als B. Wie alt jeder?

139. In einer Gesellschaft von 42 Personen waren 3mal so viel Herren und doppelt so viel Damen als Kinder. Wie viel Personen von jeder Art?

140. Bei einer Armee von 26000 Mann befinden sich 3mal so viel Infanteristen und $\frac{1}{3}$ so viel Artilleristen als Kavalleristen. Wie viel von jeder Art?

141. Auf einem Kornboden lagern 2173 Scheffel, darunter $2\frac{1}{2}$ mal so viel Weizen und $3\frac{1}{4}$mal so viel Roggen als Hafer. Wie viel von jeder Getreideart?

142. Alexander sprach zu seinen Generalen: Ich bin 2 Jahre jünger als Hephästion. Parmenio sagte: Ich bin 4 Jahre älter als ihr beide zusammen. Kallisthenes setzte hinzu: Mein Vater war 96 Jahre alt und so alt, als ihr alle drei zusammen. Wie alt jeder der drei?

143. In einer Gesellschaft von 43 Personen waren 27 Erwachsene mehr als Kinder, und 3 Herren mehr als Damen. Wie viel Personen von jeder Art?

144. Vier Personen sollen sich 555 Mk. teilen, so daß jede folgende immer doppelt so viel erhält als die vorhergehende. Wie viel erhält jede?

145. Ein Mann hatte 8 Kinder, jedes folgende um 2 Jahre jünger als das vorhergehende. Wenn nun das älteste 8mal so alt war als das jüngste, wie alt war das älteste, und wie alt das jüngste?

146. Eine Summe soll unter 3 Personen geteilt werden, daß A $\frac{1}{4}$ derselben weniger 100 Mk. erhält, B $\frac{1}{3}$ derselben weniger 200 Mk., C die Hälfte derselben weniger 300 Mk. Wie groß war die Summe, und wie viel erhielt jeder?

---

147. Ein Weinhändler mischte Wein, die Flasche zu 1 Mk. 40 Pf. und zu 3 Mk. 40. Pf., im ganzen 100 Flaschen. Wie viel Flaschen nahm er von jeder Art, wenn die Flasche gemischten Weins 2 Mk. kosten sollte?

148. Ein Weinhändler hat 100 Flaschen Wein, die Flasche zu 1 G. Wie viel Wein, die Flasche zu 30 Kr. muß er dazu setzen, damit er die Flasche gemischten Weins für 80 Kr. verkaufen kann?

149. Wie viel Wasser hätte aber in der vorigen Aufgabe der Weinhändler statt des Weins zu den 100 Flaschen gießen müssen, um auf diese Weise seinen Zweck zu erreichen, d. h. die Flasche zu 80 Kr. herzustellen?

150. Ein Goldschmied gebraucht 30 Mark 13löt. Silber. Er hat aber nur $9\frac{1}{2}$= und $14\frac{1}{2}$lötiges. Wie viel hat er von jeder Art zu nehmen, wenn beim Einschmelzen nichts verloren geht?

151. Ein Goldschmied gebraucht 50 Mark 14lötiges Silber und hat 30 Mark 15lötiges. Von welchem Gehalte müssen die 20 Mark sein, welche er noch hinzuzusetzen hat, um den verlangten Gehalt der Mischung hervorzubringen?

152. Jemand will durch Zusammenschmelzen von 9lötigem und 15lötigem Silber 24 Mark 13lötiges herstellen. Wie viel muß er von jeder Art nehmen, wenn beim Schmelzen 4 Prozent verloren gehen?

153. Wie viel Kupfer muß man zu 26 Mark 15lötigen Silbers setzen, daß die Mischung 13lötig wird?

154. Wie viel Kupfer muß man von 45 Mark 9lötigen Silbers ausscheiden, daß noch 12lötiges Silber bleibt?

---

155. Welchem gewöhnlichen Bruche ist der periodische Decimalbruch 0,777 . . . gleich?

156. Ebenso 0,888 . ., 0,4545 . . ., 0,3939 . ., 0,729729 . . .?

157. Desgleichen 0,3666 . . ., 0,5444 . . ., 0,21666 . . ., 0,7727272 . . .?

158. Desgleichen 0,714285714285 . ., 0,846153846153 . . ., 0,5540540 . . .?

Zweite Stufe.

1. A hat 447 Mk. und B 521 Mk. Wie viel Mark muß A dem B abgeben, damit B noch 10mal so viel hat, als dem A noch bleiben?

2. Wie viel müßte nach der vorigen Aufgabe B dem A abgeben, damit A noch 7mal so viel hätte, als dem B noch blieben?

3. A und B spielen Billard. A hatte vor dem Spiele 37, B 28 Fr. bei sich. Nach einigen teils gewonnenen, teils verlorenen Spielen sieht sich A im Besitze von 4mal so viel Geld, als dem B noch übrig bleibt. Wie viel hatte A gewonnen?

4. A und B spielten um Geld, und jeder hatte anfangs 20 Mk. Nach Beendigung des Spiels hatte B nur noch 2 Mk. mehr als den 37. Teil von dem, was A jetzt hatte. Wie viel hatte A gewonnen?

5. Als von 2 Spielern der eine $\frac{1}{4}$, der andere $\frac{1}{6}$ seiner Barschaft verloren hatte, behielten sie noch gleich viel übrig. Wie viel hatte jeder vor dem Spiel gehabt, da sie zusammen 55 G. hatten?

6. A und B hatten zusammen 5100 Mk. A gab $\frac{1}{5}$, B $\frac{1}{7}$ von seinem Gelde zu einem Geschäfte her. Wie viel hatte jeder ursprünglich, wenn A im ganzen 100 Mk. mehr hergab als B?

7. A und B hatten zusammen 53000 G. A gab $\frac{1}{4}$, B $\frac{1}{5}$ seines Geldes zu einem Geschäfte her. Wie viel Geld hatte jeder urspüngich, wenn dem A noch 1000 G. mehr übrig blieben als dem B?

8. A sagte zu B: Gieb mir 3 Mk. ab, so habe ich ebenso viel als du. Nein, sagte B, gieb du mir lieber 3 Mk., so habe ich doppelt so viel als du. Wie viel hatte jeder?

9. Ein Knabe machte mit seiner Schwester einen Besuch. Sie wurden gefragt, wie viel Geschwister sie wären. Der Knabe antwortete: Ich habe gerade so viel Schwestern als Brüder. Seine Schwester antwortete: Ich habe nur halb so viel Schwestern als Brüder. Wie viel Brüder und wie viel Schwestern?

10. Wie alt bin ich denn eigentlich? fragte ein Knabe seinen Vater. Das mußt du ausrechnen, antwortete der Vater. Vor einem Monat war der Geburtstag deines Großvaters. Da war er 74 Jahre alt. Du müßtest noch einen Monat älter sein, so würde dein Großvater jetzt gerade 7 mal so alt sein als du. Wie alt war der Knabe?

11. Ich addiere zu einer gedachten Zahl 5, multipliziere die Summe mit 2, ziehe vom Produkt 3 ab, teile den Rest durch 7, zähle jetzt 12 hinzu, multipliziere die Summe mit 18 und schneide am Ende eine Null ab, so erhalte ich 27. Welches war die Zahl?

12. Ich multipliziere eine gedachte Zahl mit 2, setze rechts eine 5 an, dividiere jetzt durch 11, addiere zum Quotienten 1, so habe ich das Doppelte der gedachten Zahl. Wie heißt dieselbe?

13. Zu welcher zweiziffrigen Zahl, deren Quersumme 11 ist, muß man 63 addieren, um wieder eine zweiziffrige Zahl mit denselben Ziffern zu erhalten, aber in umgekehrter Ordnung?

14. Ich denke mir eine zweiziffrige Zahl, deren Quersumme 10 ist. Verdoppele ich sie und ziehe 1 ab, so erhalte ich eine Zahl mit denselben, aber umgesetzten Ziffern. Wie heißt die Zahl?

15. Um welche Zahl muß man jede der 4 Zahlen 2, 10, 44 und 100 vergrößern, daß sie in der gegebenen Reihenfolge eine Proportion bilden?

16. Um welche Zahl muß man jede der 4 Zahlen 23, 20, 63 und 50 verkleinern, daß sie in der gegebenen Reihenfolge eine Proportion bilden?

17. Um welche Zahl muß man in den Produkten 20.31 und 16.40 jeden Faktor verkleinern, damit die Produkte einander gleich werden?

18. Um welche Zahl muß man in den Produkten 20 . 77 und 40 . 19 die Faktoren des 1. Produkts vermindern, die des 2. vermehren, daß die Produkte einander gleich werden?

19. Eine 6ziffrige Zahl hat links eine 1; schneidet man diese ab und setzt sie rechts an, so erhält man das 3fache der ursprünglichen Zahl. Wie heißt dieselbe?

20. Eine 6ziffrige Zahl hat rechts eine 2; schneidet man diese ab und setzt sie links vorn wieder an, so erhält man den 3. Teil der ursprünglichen Zahl. Wie heißt dieselbe?

21. Welche 6ziffrige Zahl hat vorn eine 5 und wird dadurch auf den 4. Teil reduziert, daß man die 5 links abschneidet und rechts hinten wieder ansetzt?

22. Welche 6ziffrige Zahl hat rechts eine 4 und wird dadurch vervierfacht, daß man die 4 rechts abschneidet und links wieder ansetzt?

23. Die Summe zweier Zahlen ist 100, die Differenz ihrer Quadrate 1400. Wie heißen dieselben?

24. Die Differenz zweier Zahlen ist 10, die Differenz ihrer Quadrate ist 600. Wie heißen die Zahlen?

25. Wie groß sind ein Quadrat und ein Rechteck, wenn eine Seite des Rechtecks um 2 Meter kleiner, die andere um 3 Meter größer ist als die Seite des Quadrats, der Inhalt des Rechtecks um 10 QM. größer ist als der des Quadrats?

26. Ein rechteckiges Ackerstück ist 10 Meter länger als breit. Wie viel QM. hätte das Ackerstück mehr, wenn die lange Seite um 5 Meter kürzer, die kurze um 5 Meter länger wäre, und wie lang und wie breit muß dasselbe sein?

27. Ein General wollte sein Regiment in Form eines Quadrats aufstellen. Beim ersten Versuch blieben ihm 88 Mann übrig. Als er jedoch einen Mann mehr in die Seite stellte, fehlten ihm 57 Mann. Wie stark war das Regiment?

28. Ein Förster wollte eine Menge junger Bäume in Form eines Quadrats pflanzen. Beim ersten Überschlag behielt er noch 31 übrig; beim zweiten Überschlag, wo er einen Baum mehr in die Seite nahm, fehlten ihm 44. Wie viel Bäume hatte er?

---

29. Ein Kaufmann rechnete darauf, daß er noch 10 Wochen mit seinem Kaffeevorrat ausreichen werde, wenn er durchschnittlich in jeder Woche so viel absetze als in der letztvergangnen Woche. Da er aber wöchentlich 61 Pfund weniger absetzte, so war sein Vorrat erst nach 11 Wochen verbraucht. Wie groß war sein ursprünglicher Vorrat?

30. Mehrere Personen sollten eine Summe Geldes zusammenbringen. Gab jeder 10 Mk., so erhielt man 3 Mk. zu wenig. Gab jeder $10\frac{1}{2}$ Mk., so erhielt man 2 Mk. zu viel. Wie viel Personen waren vorhanden, wie viel Geld hatten sie zusammenzubringen, und wie viel müßte jede geben, damit man gerade ausreichte?

31. Eine Reisegesellschaft wollte einem Wirt ihre Schuld bezahlen. Jede Person gab ein Gewisses, alle gleich viel, und es fehlten noch 3 Mk. Da legte jede Person noch 30 Pf. zu, um auch gleich die $1\frac{1}{2}$ Mk. Trinkgeld für die Bedienung mitzubezahlen. Aus wie viel Personen bestand die Gesellschaft?

32. Ein Mädchen wurde zum Kaufmann geschickt, um einen Hut Zucker zu kaufen. Nahm sie einen Hut zu $20\frac{1}{2}$ Pfund, so hatte sie 15 Kr. zu wenig erhalten. Da keine andere Hüte da waren, so nahm sie einen zu 17 Pfund und brachte noch 90 Kr. wieder mit nach Hause. Was kostete das Pfund Zucker, und wie viel hatte sie von ihrer Herrschaft erhalten?

33. Ein Schreiber wurde gefragt, wie viel Bogen er wöchentlich

schriebe. Ich kann nicht 70 liefern, da ich täglich nur 4 Stunden arbeite. Würde ich täglich 10 Stunden arbeiten, so würde ich gerade so viel über 70 liefern, als ich jetzt unter 70 liefere. Wie viel Bogen schrieb er wöchentlich?

34. Eine Frau brachte Garn zum Weber, der daraus Leinewand weben sollte. Der Weber sagte: Wollen Sie 100 Ellen, so muß ich noch 20 Stück Garn haben; wollen Sie aber nur 80 Ellen, so können Sie 12 Stück wieder mitnehmen. Wie viel Stück brachte die Frau, und wie viel Ellen konnten daraus werden?

35. Wenn man in einer Klasse 5 Schüler auf jede Bank setzt, so haben 4 Schüler keinen Platz, wollte man aber 6 Schüler auf die Bank setzen, so kommen auf die letzte Bank nur 4. Wie stark war die Klasse, und wie viel Bänke waren vorhanden?

36. Als man ein Buch druckte, setzte man 36 Zeilen auf die Seite und 40 Buchstaben in die Zeile. Wenn man auf die Seite 4 Zeilen mehr und in die Zeile 5 Buchstaben mehr gesetzt hätte, so hätte man 4 Bogen gespart. Wie stark war das Buch?

37. Ein Weg soll mit Weiden bepflanzt werden. Setzt man alle 7 Meter 2, so bleiben noch 118 übrig. Setzt man alle 7 Meter 3, so fehlen noch 120. Wie viel Weiden waren vorhanden, und wie lang war der Weg?

38. Fließen in einen leeren Behälter alle 2 Minuten 19 Liter, so werden nach einer gewissen Zeit noch 50 Liter an der vollständigen Füllung fehlen. Fließen in denselben alle 5 Minuten 51 Liter, so werden nach derselben Zeit schon 20 Liter übergelaufen sein. Wie viel Liter faßt der Behälter, und wie viel Liter müssen in jeder Minute einfließen, wenn er in jener Zeit gerade voll werden soll?

39. Ein Müller geht nach der Stadt, um Weizen zu kaufen. Ein Bauer, den er trifft, bietet ihm 40 Scheffel an, ein anderer 54, beide zu demselben Preise. Kauft er den ersten, so behält er noch 60 Mk. übrig; kauft er den letzten, so reicht er mit seinem Gelde nicht aus, kommt um 45 Mk. zu kurz. Was kostet der Scheffel?

40. Ein Kaufmann kauft Kattun nnd zahlt für 80 Ellen immer 21 G. Er verkauft ihn wieder je 5 Ellen für 1 G. 64 Kr. Wie viel Ellen waren es, wenn er im ganzen 6 G. 55 Kr. verdiente?

41. Jemand kaufte eine Quantität Weizen und bezahlte je 12 Schffl. mit 87 Mk. Er verkaufte denselben wieder, den Scheffel zu 8 Mk. und hatte, 30 Mk. Unkosten abgerechnet, doch noch einen Gewinn von 195 Mk. Wie viel Scheffel?

42. Ein Kaufmann kauft die Elle Tuch zu 4 G., verkauft das Stück wieder und gewinnt daran im ganzen $25\frac{1}{2}$ G. Hätte er die Elle 50 Kr. wohlfeiler verkauft, so hätte er im ganzen $4\frac{1}{2}$ G. verloren. Wie viel Ellen hielt das Stück?

43. Ein Buchbinder hatte 2 Sorten Diarien feil. Von der einen kostete das Stück 50 Pf. und hielt 18 Bogen; von der anderen 60 Pf. und hielt 24 Bogen. Wie hoch rechnete er den Einband, wenn derselbe bei beiden gleich und das Papier von derselben Güte war?

44. Ein Bedienter sollte von seinem Herrn für das Jahr 180 Mk. und einen Rock haben. Als er 5 Monate im Dienst gestanden hatte, erhielt er 54 Mk. und den Rock. Wie hoch wurde der Rock gerechnet?

45. Es zahlte jemand einmal für einen Hut Zucker und 22 Pfund Kaffee 17 G. 60 Kr. Ein andermal zahlte er für einen Hut Zucker und 16 Pfund Kaffee 14 G. 30 Kr. Was kostete der Hut Zucker, wenn derselbe wie das Pfund Kaffee in beiden Fällen von gleichem Preise waren?

46. Ein Tagelöhner erhielt von seinem Herrn einmal für 43 Tage 4 Scheffel Roggen und 23 Mk., ein andermal bei gleichem Tagelohn und bei gleichem Roggenpreise für 23 Tage 2 Scheffel Roggen und 13 Mk. Wie hoch wurde der Scheffel Roggen gerechnet?

47. Es erhielt jemand für 11 Frdor einmal 8 Dukaten und 111 Mk. Wie hoch wurde darnach der Dukaten gerechnet, wenn er zu demselben Kurse 10 Dukaten und 24 Mk. für 7 Frdor erhalten hätte?

48. 7 Zimmerleute und 5 Maurer erhalten täglich $19\frac{1}{2}$ Mk. Arbeitslohn. Wie viel kommt davon auf einen Zimmermann und wie viel auf einen Maurer, wenn ein Zimmermann noch 30 Pf. mehr erhält als ein Maurer?

49. Jemand kaufte 21 Pfund Kaffee und 15 Pfund Zucker, im ganzen für 36 Fr. Wie viel kam ein Pfund Kaffee und wie viel ein Pfund Zucker, wenn jenes noch 48 Cent. teurer war als dieses?

50. Ein anderer kauft 95 Pfund Zucker und 45 Pfund Kaffee und zahlt dafür zusammen 102 Mk. Wie viel kostet das Pfund von jeder Ware, wenn sich die Preise des Zuckers und Kaffees für ein Pfund wie 3 : 5 verhalten?

51. Ein Bäcker kaufte 100 Scheffel Korn, Weizen und Roggen. Er gab für den Scheffel Weizen $7\frac{1}{2}$ Mk., für den Scheffel Roggen 5 Mk. Wie viel Scheffel Weizen und wie viel Scheffel Roggen kaufte er, wenn er für den Weizen noch 225 Mk. mehr zahlte als für den Roggen?

52. Jemand kaufte 2 Arten Zeug, grünes und weißes, vom grünen 11 Ellen, vom weißen 18 Ellen. Für beides zahlte er gleich viel, da die Elle vom weißen $26\frac{1}{4}$ Kr. billiger war als vom grünen. Was kostete die Elle von jeder Art?

53. In einem Beutel befinden sich 300 Goldstücke, Frdor und Dukaten. Die ganze Summe beträgt 4200 Mk. Wie viel Frdor und wie viel Dukaten enthält der Beutel, wenn der Frdor zu 17 Mk., der Dukaten zu $9\frac{1}{2}$ Mk. gerechnet wird?

54. Ein Knabe hatte zu Weihnachten Walnüsse und Pfeffernüsse erhalten, im ganzen 100 Stück. Da er lieber Walnüsse als Pfeffernüsse aß, tauschte er von seinem Bruder immer 3 Walnüsse für 2 Pfeffernüsse ein, so daß er schließlich gerade 2 Schock Walnüsse hatte. Wie viel Walnüsse und wie viel Pfeffernüsse hatte er anfangs gehabt?

55. Bei einem Kegelspiel wurde bei jedem Doppelwurf $\frac{1}{2}$ Mk. Einsatz gezahlt. Die Zahl der Spieler war 6, so daß mit dem besten Wurf jedesmal 3 Mk. zu gewinnen waren. Es wurden 24 derartige

Spiele durchgeführt. Einer der Spieler gewann, seinen Einsatz abgerechnet, im ganzen 6 Mk. Wie vielmal hatte er den besten Wurf gethan?

56. Jemand nahm einen Gesellen für den Mai in Arbeit und versprach ihm täglich Kost und 1 G. Lohn. Sei er aber behindert an der Arbeit, so solle er ihm für die Kost täglich $\frac{1}{2}$ G. zahlen. Nach Ablauf des Monats erhielt der Gesell 22 G. Wie viel Tage hatte er versäumt, da 4 Sonntage in den Monat fielen?

57. Ein Landmann hatte auf seinem Boden 512 Scheffel Hafer und 30 Scheffel Weizen, also über 17mal so viel Hafer als Weizen. Er brauchte für seine Pferde durchschnittlich jeden Tag $4\frac{1}{4}$ Scheffel Hafer und für seinen Hausstand jede Woche $\frac{3}{4}$ Scheffel Weizen. Wie lange dauerte es, daß auf dem Boden noch doppelt so viel Hafer als Weizen lag?

58. Vor 8 Jahren, sagte ein Vater zu seinem Sohne, war ich 6mal so alt als du. Nach 20 Jahren werde ich nur noch doppelt so alt sein. Wie alt war jeder?

59. Ein Vater ist jetzt 50 Jahre alt, der eine Sohn 14, der andere 11 Jahre, beide Söhne zusammen also halb so alt als der Vater. a) Nach wie viel Jahren sind die beiden Söhne zusammen ebenso alt als der Vater? b) Vor wie viel Jahren war der Vater 3mal so alt als die beiden Söhne zusammen?

60. An der Landstraße liegen 4 Örter A, B, C und D. Die drei Entfernungen derselben von einander sind der Reihe nach 10, 3 und 2 Meilen. Als die Post vorüberfährt, steigt in jedem dieser 3 Örter ein Reisender auf, alle vier reisen nach E, einem Orte an derselben Landstraße. Der in A aufgestiegene Reisende muß schließlich so viel Postgeld bezahlen als die andern 3 zusammen. Wie weit hat man von D nach E?

---

61. Zu wie viel Prozent muß man ein Kapital ausleihen, daß es sich mit den einfachen Zinsen in 20 Jahren verdoppelt?

62. Wie viel Jahre muß ein Kapital zu $5\frac{1}{2}$ Prozent stehen, um sich mit den einfachen Zinsen zu verdoppeln?

63. Ein Kaufmann verkaufte von einem Stück Tuch, das 45 Ellen hielt, die Elle für $5\frac{1}{2}$ Mk. Wie viel hatte er für die 45 Ellen im Einkauf gegeben, wenn er 25 Prozent verdiente?

64. Ein Kornhändler verkaufte 1000 Scheffel Weizen für 7800 Mk. und gewann dabei 20 Prozent. Wie teuer hatte er den Scheffel eingekauft?

65. Welches Kapital wächst in 5 Jahren zu 5 Prozent mit den einfachen Zinsen zu 5555 Mk. an?

66. Jemand giebt ein Kapital zu 5 Prozent auf Zinsen. Drei Jahre später giebt er noch 2 Kapitalien von derselben Größe auf Zinsen zu 4 und zu $5\frac{1}{2}$ Prozent. Nach wie langer Zeit werden die beiden letzten Kapitalien zusammen ebenso viel Zinsen gebracht haben als das erste?

67. Könnte ich mein Vermögen zu $5\frac{1}{2}$ Prozent anstatt zu $4\frac{1}{2}$ Prozent unterbringen, sagte ein Rentier, so würde ich jährlich 819 Mk. mehr haben. Wie viel hatte er auf Zinsen?

68. Ein Kapitalist hatte $\frac{1}{3}$ seines Geldes in Eisenbahnaktien angelegt, die ihm 6 Prozent brachten, $\frac{1}{4}$ in Grundstücke verliehen, wofür er 5 Prozent erhielt, $\frac{1}{5}$ in Häuser, was ihm nur 4 Prozent eintrug, den Rest zu anderweitigen Unternehmungen verwendet, bei denen er jedoch 3 Prozent verlor. Wie groß war sein Kapital, wenn sich seine jährliche Einnahme trotz des Verlustes auf 3366 Mk. belief?

---

69. Eine Frau verkaufte von ihren nach der Stadt gebrachten Eiern zuerst die Hälfte, dann von dem Reste wieder die Hälfte und schließlich die noch übrigen 20. Wie viel Eier hatte sie gehabt?

70. Ein Landmann verkaufte von seinem Korn zuerst $\frac{1}{3}$, von dem übrigen noch $\frac{1}{4}$, und von dem Reste abermals $\frac{1}{6}$. Die dann noch bleibenden 500 Scheffel gebrauchte er für die Wirtschaft. Wie viel hatte er anfangs?

71. Ein Vater gab von den für seine Kinder mitgebrachten Äpfeln dem ältesten $\frac{1}{4}$ derselben, dem zweiten $\frac{1}{3}$ des Restes, dem dritten die Hälfte der übrigen, die letzten 6 erhielt das jüngste Kind. Wie viel hatte er gehabt, und wie viel erhielt jedes Kind?

72. Von meinem Gelde gab ich zuerst $\frac{2}{5}$ aus, vom Reste noch $\frac{2}{3}$, und von dem jetzt noch übrigen Gelde die Hälfte. Da hatte ich alles Geld bis auf 10 G. ausgegeben. Wie viel hatte ich anfangs?

73. Man erzählt, daß ein armer Mann, der eine unüberwindliche Scheu vor der Arbeit hatte, darüber nachsann, wie er am leichtesten zu Geld kommen könne. Da erschien ihm der Teufel und sprach: Wir wollen einen Pakt mit einander schließen; wenn du über diese Brücke gehst, soll sich dein Kapital verdoppeln, du mußt aber dann jedesmal 4 Mk. für mich ins Wasser werfen. Der Mann ging darauf ein. Als er die Brücke dreimal passiert hatte, mußte er sein letztes Geld daran wenden. Da sah er ein, daß der Teufel ihn angeführt hatte. Wie groß war anfänglich seine Barschaft?

74. Ein anderer glaubte klüger zu sein. Sein Kapital sollte sich jedesmal um die Hälfte vermehren. Dafür sollte er aber auch jedesmal nur eine halbe Mark für den Teufel ins Wasser werfen. Als er die Brücke 4mal passiert und die halbe Mark für den Teufel ins Wasser geworfen hatte, hatte er noch eine halbe Mark mehr als die Hälfte seines ursprünglichen Geldes. Hatte er gewonnen oder verloren, und wie groß war seine ursprüngliche Barschaft?

---

75. Ein Gutsherr giebt seinem Inspektor im ersten Jahre 1200 Mk. und in jedem folgenden Jahre 60 Mk. Zulage, d. h. 60 Mk. mehr als im vorhergehenden. Der Inspektor wirtschaftet 10 Jahre und erspart in dieser Zeit ohne die Zinsen 9000 Mk. Wie viel Geld gab er jährlich aus?

76. Ein anderer Inspektor erhält jedes Jahr 75 Mk. Zulage. Er giebt jährlich 405 Mk. aus und erspart in 7 Jahren 8190 Mk. die Zinsen nicht gerechnet. Wie viel Gehalt erhielt er im ersten Jahr?

77. Ein Kaufmann verdient mit seinem Kapital 10 Prozent, nimmt aber am Ende eines jeden Jahres 2025 Mk. aus der Kasse zur Erhaltung seines Hausstandes. Am Anfang des vierten Jahres sieht er, daß sich sein Vermögen um 11916 Mk. vermehrt hat. Wie viel hat er gehabt?

78. Jemand vermehrte sein Vermögen jährlich um den 4. Teil, nahm aber am Ende jeden Jahres 700 G. aus der Kasse für den Unterhalt seiner Familie. Nach vier Jahren hatte er sein Vermögen auf 7800 G. gebracht. Wie viel hatte er gehabt?

79. Es stehen zwei Kapitalien, die zusammen 13950 Mk. betragen, auf Zinsen, das erste zu 5, das zweite zu $4\frac{1}{2}$ Prozent. Wie groß war jedes, wenn das zweite 300 Mk. Zinsen mehr trug als das erste?

80. Von zwei Kapitalien, deren Unterschied 3000 G. beträgt, steht das größere zu $4\frac{3}{4}$, das kleinere zu $5\frac{1}{2}$ Prozent. Wie groß ist jedes, wenn beide gleich viel Zinsen tragen?

81. Ein Kapitalist hatte für 120000 Mk. Eisenbahnaktien gekauft, Rumänen und Anhalter. Er erhielt auf die ersten $10\frac{1}{2}$ Prozent, auf die letzteren 6 Prozent. Wie viel Aktien von jeder Art hatte er, das Stück zu 300 Mk., wenn sein ganzer Gewinn das Jahr 10575 Mk. betrug?

82. Ein Rentier bezieht von seinem Gelde jährlich 8910 Mk. Zinsen. Die einen bezieht er von dem 4. Teil seines Kapitals, das zu 4 Prozent steht; die andern von dem 3. Teil seines Kapitals, das zu $4\frac{1}{2}$ Prozent steht; die übrigen von dem Reste, der zu 5 Prozent steht. Wie groß war sein Kapital?

---

83. Ein Kaufmann soll Zahlungen leisten: 4196 Mk. nach 3 Monaten, 3148 Mk. nach 7 Monaten und 1180 Mk. nach 14 Monaten. Der Gläubiger wünscht die ganze Summe auf einmal ausgezahlt. Wann muß dies geschehen, wenn auf keiner Seite ein Zinsenverlust stattfinden soll?

84. Ein anderer Kaufmann sollte 4 Zahlungen leisten: 922 G. gleich, 730 G. nach 2 Monaten, 538 G. nach 7 Monaten, 954 G. nach 11 Monaten. Wann konnten die Kapitalien auf einmal ausgezahlt werden, wenn auf keiner Seite ein Zinsverlust eintreten sollte?

85. Jemand hat in 4 Terminen folgende Zahlungen zu leisten: a Mk. nach t Monaten, a_1 Mk. nach t_1 Monaten, a_2 Mk. nach t_2 Monaten und a_3 Mk. nach t_3 Monaten. Wann muß die ganze Zahlung geschehen, wenn kein Vorteil oder Verlust an Zinsen stattfinden soll?

86. Jemand hat 3000 Mk. nach einem Jahr zu zahlen. Er wird mit dem Gläubiger einig, ihm gleich 600 zu zahlen, die übrigen 2400 in 4 gleichen Terminen, jedesmal 600 Mk. Welche Termine müssen

angesetzt werden, wenn die Beteiligten keinen Zinsenverlust haben sollen?

87. Ein Kaufmann soll eine gewisse Summe nach 10 Monaten bezahlen. Statt dessen wird er mit dem Gläubiger einig, 500 G. gleich, 6 Monate später 700 G., noch 6 Monate später 900 G. und den Rest noch 6 Monate später zu zahlen. Wie groß war die Summe?

---

88. In einem Zimmer hängen zwei Pendeluhren. Das Pendel der ersten macht in jeder Sekunde eine Schwingung, das der zweiten macht in 3 Minuten immer 200 Schwingungen. Nach welcher Zeit wird das Pendel der zweiten Uhr 1000 Schwingungen mehr gemacht haben als das Pendel der ersten.

89. Einem Boten, der täglich eine gleiche Anzahl von Meilen zurücklegt, wird drei Tage nach seiner Abreise ein anderer nachgeschickt, der täglich $2\frac{1}{2}$ Meilen mehr machen muß, um den ersten in 6 Tagen einzuholen. Wie viel Meilen machte jeder Bote täglich?

90. Von einem Orte wird ein Kurier abgeschickt, der alle 5 Stunden 9 Meilen macht. Ihm wird 4 Stunden später ein anderer nachgeschickt, der alle 3 Stunden 7 Meilen macht. Wie lange gebraucht der zweite Kurier, um den ersten einzuholen?

91. Nach wie langer Zeit wird aber der zweite Kurier den ersten einholen, wenn, wie in der vorigen Aufgabe, der erste Kurier schon 4 Stunden unterwegs ist, ehe der zweite abreist, und außerdem nur gesagt ist, daß die Geschwindigkeiten der Kuriere sich verhalten wie 5 : 7?

92. Zwei Körper, die anfänglich eine Entfernung von 1000 Meter haben, bewegen sich gegen einander. Der eine würde die ganze Strecke in 10 Stunden, der andere in 8 Stunden zurücklegen. Wie lange werden die Körper in Bewegung sein müssen, daß ihre Entfernung nur noch 100 Meter beträgt?

93. Zwei Punkte bewegen sich auf der Peripherie eines Kreises. Der erste legt a, der zweite b Meter in der Sekunde zurück. Sie treffen zum ersten Mal nach t Sekunden, zum zweiten Mal nach t_1 Sekunden zusammen. Wie groß ist ihre anfängliche Entfernung, und wie groß ist die Peripherie des Kreises?

94. Zwei Freunde, welche 100 Meilen von einander entfernt waren, reisen einander entgegen und zu derselben Zeit ab. Der eine macht in 3 Stunden immer 4 Meilen, der andere in 9 Stunden 13 Meilen. Nach wie viel Stunden werden sie zusammentreffen, und wie viel Meilen hat dann jeder gemacht?

95. Zwei Körper gehen von den Punkten A und B aus in derselben Richtung. Der eine macht in der Minute a Meter, der zweite b Meter. Wann werden sie zusammentreffen, wenn die Entfernung von A nach B d Meter beträgt?

96. Wann werden aber die beiden Körper der vorigen Aufgabe zusammentreffen, wenn sie einander entgegenlaufen, anstatt in derselben Richtung hinter einander her?

97. Zwei Körper bewegen sich in derselben Richtung. Der eine macht in der Minute a, der andere b Fuß, und der erste fängt schon n Minuten früher an sich zu bewegen. Wann wird der zweite den ersten einholen, falls dies möglich ist?

98. Zwei Freunde, die weit von einander entfernt wohnten, wollten zusammenkommen; sie wollten zugleich ausgehen, und jeder sollte täglich 4 Meilen machen. Der eine wurde jedoch behindert und konnte erst 3 Tage später abgehen, als verabredet war. Um aber die verlorene Zeit wieder einzuholen, macht er jetzt jeden Tag 7 Meilen. Wie weit waren die Freunde von einander entfernt?

99. Zwei Örter A und B sind 4 Meilen von einander entfernt. Aus dem Orte B marschiert ein Regiment in der Richtung AB und macht täglich 3 Meilen. Aus dem Orte A marschiert 2 Tage später ein anderes Regiment, dem ersten Regiment nach, und macht täglich $5\frac{1}{2}$ Meilen. Wann und wo wird das zweite Regiment das erste einholen?

100. Um 10 Uhr morgens geht der Güterzug von Berlin nach Hamburg. Um $2\frac{1}{4}$ Uhr nachmittags fährt der Personenzug eben dahin ab. Die Geschwindigkeiten der Züge verhalten sich wie $3:5$. Der Güterzug gelangt abends $9\frac{1}{4}$ Uhr in Hamburg an. Die Entfernung von Berlin nach Hamburg beträgt 38 Meilen. Hat der Personenzug den Güterzug wieder eingeholt? und wann? und wo? Wann gelangt ferner der Personenzug in Hamburg an?

101. Ein Fußgänger geht um 9 Uhr von Berlin ab und kommt um 10 Uhr in Charlottenburg an. Wann müßte ein Windhund von Berlin fortrennen, um mit dem Fußgänger zugleich in Charlottenburg einzutreffen, wenn der Windhund noch 20 mal so schnell läuft, als der Fußgänger geht?

102. Wo und wann würde aber unter denselben Voraussetzungen ein Windhund, den man von Charlottenburg hätte ablaufen lassen, jenem Fußgänger begegnen, wenn die Entfernung von Berlin nach Charlottenburg zu 5600 Meter gerechnet wird und der Windhund sich erst um $9\frac{1}{4}$ Uhr in Bewegung setzt?

103. Um 12 Uhr stehen die beiden Zeiger einer Uhr über einander. Wann und wie oft stehen dieselben in 12 Stunden überhaupt über einander?

104. Wann und wie oft bilden die Zeiger einer Uhr einen rechten Winkel mit einander?

105. Wann und wie oft bilden die Zeiger einer Uhr eine gerade Linie oder stehen in entgegengesetzter Richtung?

106. Um 6 Uhr bilden die Zeiger eine gerade Linie. Wann wird der große Zeiger den kleinen zum ersten Mal nach 6 Uhr einholen?

107. Wann und wo würden die Zeiger einer Uhr sich treffen, wenn um 6 Uhr plötzlich der kleine Zeiger mit derselben Schnelligkeit rückwärts ginge, mit der er bis dahin vorwärts ging?

108. Zwei Körper bewegen sich auf einem Kreise hinter einander her. Der eine braucht zu einem Meter immer 2 Sekunden, der andere 5 Sekunden. Sie treffen zum ersten Mal nach 20, zum zweiten Mal nach 70 Se-

kunden zusammen, vom Anfang der Bewegung an gerechnet. Wie groß ist die anfängliche Entfernung, und wie groß ist die Peripherie des Kreises?

---

109. Salpeter und Schwefel, zusammen 80 Pfund, sind so gemischt, daß auf 7 Teile Salpeter immer 3 Teile Schwefel kommen. Es soll das Verhältnis von Salpeter und Schwefel wie 11 : 4 werden. Wie viel Salpeter müßte man zu dem Zwecke zusetzen, oder wie viel Schwefel müßte man der Mischung entziehen?

110. Wenn die Bedingungen sonst wie in der vorigen Aufgabe sind, man aber sowohl vom Salpeter als auch vom Schwefel dieselbe Menge zusetzen oder fortnehmen wollte, wie viel müßte das sein, damit das verlangte Verhältnis erzielt würde?

111. Wie viel Salpeter müßte man aber zusetzen, und zugleich wie viel Schwefel fortnehmen (nach der 109. Aufgabe), um das verlangte Verhältnis zu erzielen, wenn ebenso viel Schwefel fortgenommen als Salpeter zugesetzt werden soll, damit sich das Gewicht der Mischung nicht ändere?

112. Man hat 50 Liter Spiritus zu 87 Prozent, d. h. unter 100 Teilen Spiritus sind 87 Teile reiner Alkohol und 13 Teile Wasser. Wie viel Wasser muß man zusetzen, damit der Spiritus 80 Prozent hält?

113. Man hat 70 Quart Spiritus zu 80 Prozent. Wie viel Wasser muß man ihm entziehen, damit sein Gehalt auf 90 Prozent steigt?

114. Jemand mischt 50 Maß Spiritus zu 80 und 70 Maß zu 85 Prozent. Wie viel Prozent hat die Mischung?

115. Wie viel haltig wird nach dem Münzgesetz vom 4. Mai 1857*) 10-, 12-, 13-, 14-, und 15lötiges Silber sein?

116. Wie viel haltig wird hiernach 15-, 18-, 20- und 22karätiges Gold sein?

117. Was bedeutet Silber vom Gehalte 500, 600, 700, 800, 900 in der alten Ausdrucksweise nach Loten?

118. Was bedeutet Gold vom Gehalte 500, 600, 700, 800, 900 nach der alten Bestimmung in Karaten?

119. Man will aus 700- und aus 950haltigem Silber 100 Pfund 815haltiges herstellen. Wie viel muß man von jeder Art nehmen?

120. Wie viel reines Silber hat man zu 100 Pfund alter preußischer Thaler, die aus 12lötigem Silber bestehen, hinzuzusetzen, um 900haltiges Silber herzustellen, aus dem die neuen preußischen Thaler geprägt werden sollen?

121. Wie viel Kupfer hätte man von den 100 Pfund der vorigen Aufgabe ausscheiden müssen, um denselben Zweck zu erreichen?

---

*) Nach diesem Gesetz soll der Feingehalt des Goldes und Silbers nicht mehr nach Karat und Lot angegeben werden, sondern nach 1000 Teilen. So besteht Gold vom Gehalte 800 oder 800haltiges Gold aus 800 Teilen reinen Goldes und 200 Teilen Kupfer.

122. Wie viel Kupfer muß man zu 100 Pfund alter preußischer Thaler, die 12lötig sind, hinzusetzen, um 520haltiges Silber zu gewinnen, aus dem die neuen preußischen Fünfgroschenstücke geprägt werden sollen?

123. Wie viel Kupfer muß man mit 1000 Pfund Frdor, die aus $21\frac{2}{3}$karätigem Golde bestehen, zusammenschmelzen, um 900haltiges Gold zu gewinnen, aus dem die neuen Goldmünzen bestehen sollen?

---

124. Ein Mann starb und hinterließ ein Vermögen von 30000 Mk., welches die Frau, 3 Söhne und 4 Töchter unter sich teilen sollten. Da die Söhne schon vorweg mehr zu ihrer Ausbildung erhalten hatten, so sollte jede Tochter doppelt so viel haben als jeder Sohn, die Mutter aber so viel als ein Sohn und eine Tochter zusammen und noch 2000 Mk. Wie viel erhielt jeder?

125. In einem Geschäft gewannen A und B zusammen 5950 Mk. Wie war diese Summe zu verteilen, wenn ihre Einlagen sich wie 2 : 3 verhielten, A aber als Leiter des Geschäfts für seine Mühe noch $\frac{1}{3}$ mehr erhalten sollte, als ihm sonst nach seiner Einlage zufiel?

126. Zu einer Hinterlassenschaft von 3300 G. finden sich 3 Gläubiger A mit 3000, B mit 2400 und C mit 1800 G. Aus gewissen Gründen soll A 16 Prozent und B 10 Prozent mehr erhalten, als ihnen nach ihrer Forderung sonst zukam. Wie viel erhielt jeder?

127. A unternimmt ein Geschäft von 2100 Mk. Nach 6 Monaten tritt B hinzu mit 1600 Mk. und noch 6 Monate später C mit 1800 Mk. Sie treiben das Geschäft noch 1 Jahr gemeinschaftlich und haben schließlich einen Gewinn von 3500 Mk. Wie viel erhielt jeder davon?

128. 4 Personen A, B, C und D sollen sich in 1710 G. so teilen, daß man das Geld von A verdreifachen, das von B vervierfachen, das von C verfünffachen und das von D versechsfachen müßte, um gleiche Produkte zu erhalten. Wie viel erhielt jeder?

129. Es bestimmte jemand in seinem Testament, daß seine 4 Söhne sich in sein Vermögen, das in 4000 Mk. bestand, so teilen sollten: der zweite sollte doppelt so viel haben als der älteste, weniger 1000 Mk.; der dritte sollte 3mal so viel haben als der zweite, weniger 2000 Mk.; der vierte sollte 4mal so viel haben als der dritte, weniger 3000 Mk. Wie viel erhielt jeder?

130. Vier Knaben haben 2 Schock Nüsse. B, C und D haben zusammen noch 9 Nüsse mehr als doppelt so viel als A. Hätte B eine Nuß mehr, so hätte er nur um $\frac{1}{4}$ weniger als C und D zusammen. Hätte C eine Nuß mehr, so hätte er um $\frac{1}{3}$ mehr als D. Wie viel hatte jeder?

131. Die drei größten Städte in Baiern: München, Nürnberg und Augsburg, haben zusammen eine gewisse Anzahl Einwohner. München hat 2500 E. mehr als $\frac{7}{12}$ der ganzen Anzahl, Nürnberg 4000 weniger als $\frac{4}{15}$ derselben, Augsburg 5000 weniger als $\frac{1}{6}$ derselben. Wie viel Einwohner hat jede Stadt?

132. Im östreichischen Kaiserstaat haben Wien, Pest und Prag über 100000 Einwohner. Hätte Wien 30000 E. weniger und Prag 10000 mehr, so verhielten sich die drei Städte der Reihe nach wie 16 : 8 : 5. Zu wie viel Einwohner ist jede Stadt gerechnet, wenn Wien 350000 E. weniger als doppelt so viel hat als die beiden andern Städte zusammen?

133. Die drei freien Städte Hamburg, Bremen und Lübeck verhalten sich der Einwohnerzahl nach: Hamburg zu Bremen wie 5 : 2, Bremen zu Lübeck wie 13 : 6. Hätte jede der 3 Städte 2000 E. mehr, so hätte Berlin, dies zu 1045000 E. gerechnet, immer noch 2,5mal so viel als die 3 Städte zusammen. Wie viel Einwohner hat jede Stadt?

134. Die drei größten Städte im Königreiche Sachsen sind Dresden, Leipzig und Chemnitz. Hätte Leipzig 10000 E. weniger, so würden sich der Einwohnerzahl nach verhalten Ch. : L. = 2 : 3, Ch. : Dr. = 3 : 8. Überdies haben Leipzig und Chemnitz zusammen 3000 E. weniger als Dresden. Wie viel Einwohner hat jede Stadt?

---

135. Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden, durch die erste allein in 20, durch die zweite allein in 30 Minuten. In wie viel Minuten wird er voll werden, wenn das Wasser durch beide Röhren zugleich fließt, vorausgesetzt, daß dies immer mit derselben Geschwindigkeit geschieht?

136. Von A geht ein Bote nach B und macht die Strecke in 10 Tagen. Ein anderer Bote geht von B nach A und macht die Strecke in 15 Tagen. Nach wie viel Tagen werden sie sich begegnen, wenn sie zugleich ausgehen?

137. Ein Teich kann durch drei Röhren geleert werden, durch die erste in 1 Stunde, durch die zweite in 3, durch die dritte in 6 Stunden. In welcher Zeit wird er leer, wenn das Wasser aus allen Röhren zugleich fließt?

139. Drei Maurer sollen eine Mauer aufführen. A wird allein in 12, B in 15, C in 20 Tagen fertig. Wie lange müssen sie arbeiten, wenn sie gemeinschaftlich ans Werk gehen?

139. Ein Wasserbehälter kann durch eine Röhre in 2 Stunden gefüllt, durch eine zweite in 3 Stunden geleert und durch eine dritte in 4 Stunden geleert werden. Wenn wird der volle Behälter leer sein, wenn alle drei Röhren zugleich in Thätigkeit sind?

140. Vier Bauern, A, B, C und D haben mit ihrer Anspannung für den Prediger und Lehrer 100000 Stück Torf anzufahren. A kann mit seiner Anspannung allein in 8 Tagen, B in 10, C in 12, D in 15 Tagen fertig werden. Wie lange müssen sie fahren, wenn sie alle vier zugleich fahren?

141. Wenn alles sonst ist, wie in der vorigen Aufgabe, A aber während der Zeit gerade 1 Tag, B $2\frac{1}{2}$ Tage und C $1\frac{1}{2}$ Tage behindert ist, wie lange müssen sie in diesem Falle fahren?

142. Wenn alles sonst wie in Aufgabe 140. ist, C aber schon 1 Tag, D schon $2\frac{1}{2}$ Tage an dem Torf gefahren haben, bevor A und B anfangen, wie lange müssen sie da noch gemeinschaftlich fahren, bis der Torf herangeholt ist?

143. Ein Wasserbehälter von $676\frac{1}{2}$ Kubikfuß kann durch drei Röhren gefüllt werden. Die erste liefert 27 Kubikfuß in 2 Stunden, die zweite 37 in 3 Stunden, die dritte 47 in 4 Stunden. In welcher Zeit wird der ganze Behälter voll werden, wenn das Wasser durch alle drei Röhren zugleich einströmt?

Dritte Stufe.

1. Jemand, der nach seinen Zinsen gefragt wurde, antwortete: Ich habe ein kleines Kapital verliehen zu 4 Prozent, und die Zinsen betragen gerade so viel unter 702 Mk., als das Kapital darüber. Wie viel Zinsen hatte er einzunehmen, und wie groß war das Kapital?

2. Ein Kaufmann hatte ein Stück Zeug gekauft, die Elle zu 4 Mk. Bei genauer Besichtigung finden sich 10 Ellen als unbrauchbar. Um diesen Verlust zu decken und doch einen Gewinn von 15 Mk. zu erzielen, beschließt er, die Elle für 5 Mk. zu verkaufen. Wie viel Ellen hatte das Stück?

3. Ein Kaufmann kaufte ein Stück Zeug von 80 Ellen, die Elle zu 6 Mk. Er verkaufte die Elle zu 7 Mk. Beim Verkauf fand sich jedoch eine schlechte Stelle, welche er die Elle zu 3 Mk. fortgeben mußte. Wie viel Ellen waren dies, wenn er am ganzen Stück noch 15 Procent verdiente?

4. Ein Kaufmann forderte für ein Stück Zeug von 30 Ellen 66 Mk. Er läßt aber so viel ab, als nachher 3 Ellen kosten. Wie viel hat er abgelassen, und was kostete schließlich die Elle?

5. Ein Koch will ein Dutzend Citronen kaufen. Man fordert für das Dutzend 49 Kr. Er handelte jedoch noch so viel Kreuzer ab, als ihm nachher 2 Citronen kosten. Was zahlte er für das Dutzend?

6. Ein anderer kaufte ebenfalls Citronen und gab für das Dutzend 1 Mk 80 Pf. Hätte er die fünf noch erhalten, welche er als Zugabe verlangte, so wäre ihm das Dutzend 25 Pf. billiger geworden. Wie viel Stück kaufte er?

7. Ein Bauer kann seinen Vorrat von Weizen den Scheffel zu 8 Mk. absetzen. Der Preis scheint ihm noch nicht hoch genug. Er verkauft ihn nach einiger Zeit für 8 Mk 20 Pf. Er hatte auf diese Weise noch die fünf Scheffel übrig, welche er für seine Wirtschaft in der Zeit gebraucht. Wie groß war sein Vorrat?

8. Ich denke mir eine Zahl, setze rechts eine 8 an, zähle 6 hinzu, setze jetzt rechts eine 9 an und zähle 7 hinzu, setze jetzt rechts eine 4 an, dividiere durch 27, schneide die letzte Ziffer rechts ab, welche gleich der gedachten Zahl ist, und erhalte 13. Welche Zahl habe ich mir gedacht?

9. Es sollen drei Zahlen von solcher Beschaffenheit gesucht werden, daß die zweite durch die erste dividiert 2 zum Quotienten und 1 zum Rest,

die dritte durch die zweite dividiert 3 zum Quotienten und 3 zum Rest giebt. Wie groß ist jede der drei Zahlen, wenn ihre Summe = 70 ist?

---

10. Zu welcher Summe wachsen a Mk. in n Jahren bei p Prozent mit den einfachen Zinsen an?

11. Welches Kapital wächst in n Jahren bei p Prozent mit den einfachen Zinsen zu a Mk an?

12. Ein Kaufmann verkaufte eine Ware zu a Mk., die nach n Monaten oder gleich mit p Prozent monatlichem Rabatt (von 100) gezahlt werden sollten. Wie viel betrug die Barzahlung?

13. Wie viel würde in der vorigen Aufgabe die Barzahlung betragen, wenn der Rabatt auf 100 gerechnet würde?

14. A soll an B 2100 Mk. nach 10 Monaten oder gleich mit $\frac{1}{2}$ Prozent monatlichem Rabatt zahlen. A will den Rabatt von 100, B auf 100 rechnen. Wie groß war der Unterschied in dem Angebot und der Forderung?

15. A soll an B a Mk. nach n Monaten oder gleich mit p Prozent monatlichem Rabatt zahlen. A will von 100, B auf 100 rechnen. Wie groß ist der Unterschied in der Barzahlung?

16. Wie viel Prozent Rabatt auf 100 sind n Prozent Rabatt von 100?

17. Wie viel Prozent Rabatt von 100 sind n Prozent Rabatt auf 100?

18. Ein Kaufmann gewinnt bei einer Ware 17 Prozent, wenn er das Pfund für 1 Mk. 30 Pf. verkauft. Wie viel Prozent gewinnt oder verliert er, wenn er das Pfund für 1 Mk. 20 Pf. verkauft?

19. Ein Kaufmann verliert bei einer Ware 4 Pzt., wenn er das Pfund zu 8 Kr. verkauft. Wie viel Prozent gewinnt oder verliert er, wenn er das Pfund für 11 Kr. verkauft?

20. Ein Kaufmann gewinnt an einer Ware n Prozent, wenn er sie für p Mk. verkauft. Wie viel Prozent gewinnt er, wenn er sie für p_1 Mk. verkauft?

21. Ein Kaufmann wollte seine Waren, die einen Wert von 7350 Mk. hatten, versichern. Die Kasse ließ sich zwei Prozent Prämie zahlen. Der Kaufmann gab jedoch, was er nicht für Unrecht hielt, den Wert der Waren höher an, um im Falle des Verlustes die Waren und die bezahlte Prämie zugleich ersetzt zu erhalten. Wie hoch mußte er sie angeben?

22. In einer Stadt mußte jeder Hausbesitzer den siebenten Teil seiner erhaltenen Miete als Mietssteuer abgeben. Später wurde die Abgabe erhöht, und er mußte den sechsten Teil der Miete als Steuer zahlen. Um wie viel mußte er seine Miete steigern, wenn er jetzt eben so viel übrig behalten wollte als früher?

---

23. Wenn man a Pfund m haltiges und b Pfund n haltiges Silber mischt, wie viel haltig ist die Mischung?

24. Wie viel haltig wird die Mischung sein, wenn man a Pfund n haltiges, a_1 Pfund n_1 haltiges, a_2 Pfund n_2 haltiges und a_3 Pfund n_3 haltiges Silber mischt?

25. Wie viel m_1 haltiges Silber muß man zu a Pfund m haltigen Silbers setzen, daß die Mischung n haltig wird?

26. Wie viel m haltiges und wie viel m_1 haltiges Silber muß man zusammenschmelzen, um a Pfund n haltiges zu gewinnen?

27. Von wechem Gehalte müssen a_1 Pfund sein, die man zu a Pfund m haltigen Silbers setzen muß, um eine n haltige Mischung zu gewinnen?

28. Wie viel Kupfer muß man zusetzen, um aus a Pfund m haltigen Silbers n haltiges zu machen? $(m > n)$

29. Wie viel Kupfer muß man ausscheiden, um aus a Pfund m haltigen Silbers n haltiges zu machen? $(m < n)$

30. Wie viel Kupfer muß man zu a Pfund m haltigen Silbers setzen, damit der Gehalt um 1 niedriger wird?

31. Wie viel Kupfer muß man aus a Pfund m haltigen Silbers ausscheiden, damit der Gehalt um 1 höher wird?

32. Wie viel reines Silber muß man zu a Pfund m haltigen Silbers setzen, damit der Gehalt um 1 höher werde?

33. Wie viel Wasser muß man zu a Liter Spiritus von m Prozent setzen, damit der Gehalt um 1 Prozent fällt?

34. Wie viel Wasser muß man a Liter Spiritus von m Prozent entziehen, daß der Gehalt um 1 Prozent steigt?

35. Ein Goldschmied gebraucht 48 Mark 13lötiges Silber. Er hat aber nur 10lötiges und 15lötiges. Wie viel mußte er von jeder Art nehmen, wenn das Silber beim Einschmelzen 1 Prozent, das Kupfer (der im unreinen Silber enthaltene Zusatz) 4 Prozent verliert?

---

36. Ein Kaufmann ließ ein Stück Tuch kommen und bezahlte für die Elle $7\frac{1}{2}$ Mk. Beim Nachmessen fand er zwar, daß das Stück 5 Ellen mehr enthielt, als ihm angerechnet waren, aber von so schlechter Beschaffenheit, daß er die Elle für 6 Mk. verkaufen mußte. Er verlor $13\frac{1}{3}$ Procent. Wie viel Ellen hielt das Stück?

37. Ein Landmann bringt eine Anzahl Eier zu Markte und gedenkt immer 8 Stück für 30 Pf. zu geben. Aber ein Vorübergehender stößt an den Korb, und es zerbrechen 5 Eier. Als er Ersatz erhalten, beschließt er, die übrigen Eier 5 Stück für 20 Pf. zu verkaufen, um die ursprünglich erwartete Summe für die Eier einzunehmen und das als Ersatz erhaltene Geld noch obendrein zu haben. Wie viel Eier hatte er gehabt?

38. Zwei Landleute wollten einen Teil ihres Ackers gemeinschaftlich umpflügen. A hatte 4, B 3 Morgen. Da die Arbeit schnell fertig sein sollte, so holten sie den C auch noch heran. Alle arbeiteten gleich fleißig und gleich viel. C forderte für seine Bemühung 7 Thlr. A

war der Ansicht, er habe 4 Morgen, B 3 Morgen, mithin habe er 4 Thlr., B 3 Thlr. zu zahlen. Dem B wollte die Richtigkeit dieser Rechnung nicht einleuchten. Wie war die Teilung einzurichten?

39. Zwei Freunde A und B saßen beim Essen. A hatte 8 Milchbrötchen, B 5 bei sich. Da kam C hinzu und sprach: Überlaßt mir doch einen Teil eurer Brötchen, ich habe wohl Zukost bei mir, aber kein Brot. Alle aßen dann gleich stark und verzehrten alle Milchbrötchen. C legte 13 Kreuzer auf den Tisch mit dem Bemerken: Ihr habt 13 Brötchen gehabt, A 8 und B 5, teilt euch die 13 Kreuzer, wie es recht ist. B wollte 5 Kreuzer von den 13 einstecken. Das wollte A sich aber nicht gefallen lassen. Wie mußte die Teilung geschehen?

40. Eine Frau wollte einige Stücke Flachs zu Garn gesponnen haben. Ein Mädchen erklärte, sie würde allein in 8 Tagen damit fertig. Das andere wollte 10 Tage haben. Da die Arbeit schnell fertig sein sollte, so arbeitete die Frau selbst mit und spann noch täglich $\frac{1}{12}$ Pfund mehr als das zweite Mädchen. In drei Tagen war die Arbeit fertig. Wie viel Pfund waren vorhanden, und wie viel Pfund hatte jede aufgesponnen?

41. Ein Schlächter kaufte 22 Schafe, 4 Schweine und eine Kuh und zahlte dafür 990 Mk. Wie viel kostete die Kuh, ein Schwein und ein Schaf, wenn die Kuh und ein Schwein zusammen 14mal so viel kosteten als ein Schaf, und 3 Schweine ebenso viel als 19 Schafe?

42. Ein Landmann verkauft 5 Tonnen Weizen, 3 Tonnen Roggen und 2 Tonnen Hafer und erhält dafür in Summa 2222 Mk. Was erhält er für die Tonne von jeder Getreideart, wenn eine Tonne Roggen doppelt so viel gilt als eine Tonne Hafer, weniger 42 Mk., und eine Tonne Weizen um $\frac{1}{5}$ mehr als eine Tonne Roggen und eine Tonne Hafer zusammen?

43. Ein Kaufmann kaufte 4 Arten Tuch, 89 Ellen schwarzes, 80 Ellen braunes, 72 Ellen grünes und 64 Ellen rotes. Er gab für eine Elle von dem braunen $\frac{1}{2}$ G. mehr als für eine Elle von dem schwarzen, von dem grünen für eine Elle $\frac{1}{4}$ G. mehr als für eine Elle vom braunen, von dem roten für eine Elle $\frac{3}{4}$ G. mehr als für eine Elle vom grünen. Im ganzen zahlte er 800 G. Was kostete die Elle von jeder Zeugart?

44. A, B und C sollen sich 1000 Thlr. teilen. A soll um $\frac{1}{3}$ mehr als B erhalten, weniger 70 Thlr.; C soll $\frac{4}{7}$ weniger erhalten als A und B zusammen, und noch 20 Thlr. Wie viel erhielt jeder?

45. Das Vermögen von 4 Personen ist durch folgende Angaben bestimmt: A und B haben zusammen 120 G., D hat 24 G. mehr als C, A hat doppelt so viel als C, D dreimal so viel als B. Wie viel hatte jeder?

45. Nach Paris sind die vier größten Städte in Frankreich Lyon, Marseille, Bordeaux und Lille. Der Einwohnerzahl nach verhalten sich Lyon und Marseille wie 13 : 12. Hätte Bordeaux noch 5000 E. mehr, so verhielte sich seine Einwohnerzahl zu der von Marseille wie 2 : 3. Hätte Lille noch 1000 E. mehr, so würde sich seine Einwohnerzahl zu der von Lyon verhalten wie 12 : 25. Wie viel Einwohner hat jede dieser vier Städte, wenn sie zusammen fast eine Million haben; es fehlen nur noch 25000 daran.

47. Nach London sind die vier größten Städte in Großbritannien: Glasgow, Liverpool, Manchester und Birmingham. Wenn Birmingham 5000 E. mehr hätte, so ständen die Städte der Einwohnerzahl nach in folgenden Verhältnissen: G : M = 11 : 8, L : M = 13 : 10, B : L = 3 : 4. Überdies haben Glasgow und Birmingham zusammen noch 15000 E. mehr als Liverpool und Manchester zusammen. Wie viel Einwohner hat jede Stadt?

48. Die vier größten Städte in Preußen sind Berlin, Breslau, Köln und Frankfurt a. M. Hätte Berlin 70000 E. und Frankfurt 4000 E. weniger, so hätten die drei kleineren Städte zusammen halb so viel E. als Berlin und verhielten sich der Einwohnerzahl nach wie 13 : 7 : 6. Hätten aber Breslau und Frankfurt jede 17500 E. weniger, so hätte Berlin gerade dreimal so viel als diese beiden Städte zusammen, wie viel Einwohner hat jede der vier Städte?

49. Jemand setzte in seinem Testamente fest, daß seine Frau $\frac{1}{2}$, sein Bruder von dem Reste $\frac{1}{3}$, sein Vetter von dem jetzigen Reste $\frac{1}{4}$ erhalten sollte. Das noch übrige Geld sollte die Schule haben: der Rektor $\frac{1}{10}$ desselben, der Konrektor $\frac{1}{9}$ des jetzigen Restes. Der nunmehrige Rest soll unter die 10 anderen Lehrer so verteilt werden, daß jeder folgende Lehrer 40 Thlr. weniger erhält als der vorhergehende. Wie groß war das Vermögen, und wie viel erhielt jeder, wenn der letzte Lehrer 820 Thlr. erhielt?

---

50. Um 6 Uhr morgens fährt ein Omnibus von A nach B und macht in 50 Minuten immer eine Meile. Um 2 Uhr 20 Minuten fährt ein Dampfwagen von B ab und gelangt auf einer neben der Chaussee liegenden Eisenbahn zu derselben Zeit in A an, wo der Wagen in B anlangt. Wie groß ist die Entfernung zwischen A und B, wenn der Dampfwagen in jeder Stunde 6 Meilen macht?

51. Um 8 Uhr morgens fahre ich mit der Post von A nach B. Zu derselben Zeit geht auf der neben der Chaussee liegenden Eisenbahn der Dampfwagen von B nach A ab. Um halb 10 treffe ich mit dem Dampfwagen zusammen, halte mich um Mittag eine halbe Stunde auf und komme abends 7 Uhr in B an. Um wie viel Uhr gelangt der Dampfwagen in A an?

52. Um 8 Uhr morgens geht ein Güterzug aus Hamburg und gelangt abends 5 Uhr in Berlin an. Um 8 Uhr morgens geht auch ein Schnellzug aus Berlin und ist um 2 Uhr in Hamburg. Wann und wo werden sich die Züge begegnen, wenn man die Aufenthalte auf den Stationen nicht in Anschlag bringt und die Strecke von Berlin nach Hamburg 38 Meilen beträgt?

53. Wann und wo werden sich aber die Züge der vorigen Aufgabe begegnen, wenn der Schnellzug erst um 12 Uhr mittags aus Berlin fährt und also um 6 Uhr nachmittags in Hamburg ankommt?

54. Wenn jedoch die beiden Züge der 52. Aufgabe zugleich aus Berlin abfahren, wie weit wird der Güterzug noch von Hamburg entfernt sein, wenn der Schnellzug dort anlangt?

---

55. Ein Schnellläufer behauptet, ein Windhund werde ihn auf eine Meile (24000 Fuß) nicht einholen, wenn er 10 Minuten Vorsprung habe. Der Läufer machte in der Sekunde 7 Schritt, wenn der Hund in derselben 12 Sätze macht. Der Hund kommt mit 4 Sätzen so weit als der Läufer mit 9 Schritten, jeden zu 3 Fuß gerechnet. War die Behauptung richtig, und wann und wo holte der Windhund ihn ein?

56. Ein Windhund soll ein Rennpferd einholen. Der Windhund macht 6 Sprünge, während das Pferd 5 macht, und kommt mit 4 Sprüngen so weit als das Pferd mit 7. Das Pferd ist schon $5\frac{1}{2}$ Kilometer voraus. Wie weit wird es noch laufen, bis es vom Hunde eingeholt wird?

57. Wie geht es zu, fragte ein Spaziergänger den andern, daß du mich wieder eingeholt hast, da ich dir doch 3000 Fuß voraus war und doppelt so große Schritte mache als du? — Du machst zwar größere Schritte, erwiderte jener, ich mache aber 5 mal mehr als du. Wie viel Fuß hatte jeder zurückgelegt?

58. Ein Windhund erblickt einen Hasen in einer Entfernung von 150 Meter. Der Hase macht 5 Sprünge, während der Windhund 3 macht; dieser kommt aber mit 3 Sprüngen so weit als der Hase mit 8. Wie viel Sprünge wird der Hase noch machen, bis der Windhund ihn einholt, den Hasensprung zu 2 Meter gerechnet?

59. Aus zwei Öffnungen fließt Wasser. Die Öffnungen verhalten sich der Größe nach wie 5 : 11, die Geschwindigkeiten, mit denen das Wasser ausströmt, wie 7 : 3. Wie viel Wasser war aus jeder Öffnung geflossen, als aus der ersten 200 Kubikmeter mehr geflossen waren als aus der zweiten?

60. Wie viel Wasser war unter den Bedingungen der vor. Aufgabe in einem Zeitraum aus jeder der beiden Öffnungen geflossen, wenn aus beiden zusammen 1700 Kubikmeter geflossen waren?

61. Zwei Bombardiere warfen Bomben aus einer Batterie. A hat schon 36 Würfe gethan, als B anfängt, und macht in eben der Zeit 8 Würfe, in welcher B 7 macht, braucht aber zu 4 Würfen nur so viel Pulver als B zu 3. Wie viel Würfe muß B machen, bis er ebenso viel Pulver verbraucht hat als A, und wie viel hat A dann gemacht?

62. Zwei Schreiber arbeiten um die Wette. Der eine hatte schon 4 Tage geschrieben, ehe der andere anfing, schrieb in 8 Stunden 5 Bogen und arbeitete täglich 10 Stunden. Der andere schrieb in 4 Stunden 3 Bogen und arbeitete täglich 11 Stunden. Wann wird der zweite den ersten einholen, d. h. ebenso viel Bogen abgeschrieben haben als der erste?

63. Zwei Maurer arbeiten an einer Mauer, der erste arbeitet täglich 10, der zweite 11 Stunden. Dieser macht aber in derselben Zeit

nur 3 Fuß, während jener $3\frac{1}{2}$ machte. Wie viel macht da jeder an einem Tage, wenn der erste noch 4 Fuß mehr macht als der zweite?

64. 8 Maurer, die täglich 11 Stunden arbeiten, führen in einer gewissen Zeit eine Mauer auf, die 100 Meter lang, 3 Meter hoch und $\frac{1}{2}$ Meter dick ist. Unter denselben Verhältnissen führen 11 Maurer, die täglich nur 10 Stunden arbeiten, eine Mauer auf, die 200 Meter lang, $2\frac{1}{2}$ Meter hoch und $\frac{1}{2}$ Meter dick ist. In welcher Zeit wird jede Mauer fertig, wenn die letzten noch 5 Tage länger arbeiten als die ersten?

65. Es sollen zwei gleiche Schiffe A und B beladen werden. Die Sackträger holen das Korn dazu aus den Speichern. Bei A sind 20 Mann, bei B 16 angestellt. Die Träger bei A haben einen weiteren und schlechteren Weg als die bei B; ein Mann schafft daher in der Zeit, wo er bei B 3 Sack hinschafft, nur 2 Sack hin. Sie haben dafür aber größere Säcke. In 3 Säcke für A geht so viel als in 4 Säcke für B. In wie viel Tagen wurde jedes Schiff beladen, wenn die Träger bei A noch $\frac{1}{2}$ Tag eher fertig wurden als die bei B?

---

66. Es hatte jemand drei Fässer. Füllt er das zweite leere aus dem ersten vollen, so bleiben im ersten noch $\frac{2}{7}$ zurück. Gießt er die beiden letzten vollen in das erste leere, so wird dies noch nicht voll, es fehlen noch 10 Liter. Wie viel Liter hielt jedes Faß, wenn alle drei zusammen 270 Liter hielten?

67. Jemand hatte drei Fässer. Füllt er das zweite leere aus dem ersten vollen, so bleiben im ersten noch $\frac{2}{5}$ zurück. Füllt er das dritte leere aus dem zweiten vollen, so bleibt im zweiten noch $\frac{1}{7}$ zurück. Hielte das erste Faß noch 10 Liter mehr, so wäre es gerade doppelt so groß als das dritte. Wie groß war jedes Faß?

68. Ein Spieler verlor von seiner mitgebrachten Barschaft den 3. Teil und 1 Mk., gewann darauf den 3. Teil des Restes und noch 2 Mk., gewann im dritten Spiel abermals den 7. Teil seiner jetzigen Barschaft, weniger 1 Mk. Als er sein Geld zählte, hatte er weder gewonnen noch verloren. Wie viel hatte er anfangs?

69. Eine Frau verkaufte von ihren Eiern, welche sie mit in die Stadt nahm, zuerst die Hälfte weniger 6, dann den 3. Teil des Restes weniger 6 und abermals den 4. Teil des Restes weniger 6. Als sie jetzt ihre Eier zählte, hatte sie gerade die Hälfte verkauft. Wie viel hatte sie anfangs?

70. Von einer Zahl nehme ich 1 weniger als die Hälfte, von dem Rest wieder 1 weniger als die Hälfte, von dem Rest wieder 1 weniger als die Hälfte und zum vierten Mal von dem Reste 1 weniger als die Hälfte. Da habe ich noch $\frac{1}{6}$ der ursprünglichen Zahl. Wie heißt dieselbe?

71. Von 1000 Äpfeln verschenke ich an A den 5. Teil und noch eine gewisse Anzahl, an B den 5. Teil des Restes und noch dieselbe Anzahl wie bei A, an C wiederum den 5. Teil des Restes

und ebenfalls noch dieselbe Anzahl wie bei A. Da blieben noch 268 Äpfel übrig. Wie groß war die jedesmal zum 5. Teil des Restes hinzugefügte Anzahl?

72. Ein Landmann wollte für den Winter eine Herde Schafe verkaufen. Er verkaufte an den ersten Schlächter den 3. Teil weniger 5, an den zweiten den 3. Teil des Restes weniger 5, ebenso an den dritten, vierten und fünften Schlächter immer den 3. Teil des Restes weniger 5. Wie viel Schafe hatte er gehabt, wenn er an den sechsten Käufer die noch übrigen 47 verkauft?

73. Eine Frau verkaufte Apfelsinen, an die erste Person die Hälfte derselben und noch eine halbe, ohne jedoch eine zu zerschneiden, an die zweite Person die Hälfte des Restes und noch eine halbe u. s. w., immer die Hälfte des Restes und eine halbe. Als die siebente Person kam, um Apfelsinen zu kaufen, waren keine mehr vorhanden; die sechste hatte die letzten erhalten. Wie viel Apfelsinen hatte die Frau gehabt?

74. Ein Schlächter schlachtete von einer Menge Schafe zuerst die Hälfte und $1\frac{1}{2}$, acht Tage später von dem Reste wieder die Hälfte und $1\frac{1}{2}$, noch acht Tage später wieder von dem Reste die Hälfte und $1\frac{1}{2}$. Als er dies noch zum vierten und zum fünften Male gethan, d. h. von dem Rest jedesmal die Hälfte und $1\frac{1}{2}$ geschlachtet hatte, so hatte er von allen Schafen nur noch eins übrig. Wie viel Schafe hatte er anfangs?

75. Jemand verschenkte Citronen. Die Großmutter erhielt die Hälfte und eine halbe, der Vater $\frac{1}{3}$ des Restes und $\frac{1}{3}$ Citrone, die Mutter $\frac{1}{4}$ des Restes und $\frac{1}{4}$ Citrone, der Bruder $\frac{1}{5}$ des Restes und $\frac{1}{5}$ Citrone, die Schwester $\frac{1}{6}$ des Restes und $\frac{1}{6}$ Citrone, ein Freund $\frac{1}{7}$ des Restes und $\frac{2}{7}$ Citronen. Die noch übrigen 16 verteilte er an die Armen. Wie viel Citronen hatte er gehabt?

76 Eine Erbschaft sollte unter eine Anzahl von Kindern so geteilt werden: Das älteste sollte 100 Mk. haben und den 10. Teil des Restes, das folgende 200 Mk. und den 10. Teil des Restes u. s. w., jedes folgende 100 Mk. mehr als das vorhergehende und den 10. Teil des Restes. Bei der Teilung ergab sich, daß alle gleich viel erhielten. Wie groß war das Vermögen, und wie groß die Anzahl der Kinder?

77. Wie groß wäre nach der vorigen Aufgabe das Vermögen und die Anzahl der Kinder, wenn das älteste Kind 70 Mk. und den 8. Teil des Restes, jedes folgende immer 70 Mk. mehr als das vorhergehende und den 8. Teil des Restes, alle aber gleich viel erhalten sollten?

---

78. Ich habe drei Körbe mit Äpfeln. Im ersten und zweiten sind zusammen 350, im ersten und dritten sind zusammen 300, im zweiten und dritten sind zusammen 280. Wie viel Äpfel waren in jedem Korbe?

79. Jemand will grünes und blaues Tuch kaufen. Nun kosten 4 Ellen vom grünen und 5 Ellen vom blauen zusammen 34 G. und 6 Ellen vom grünen und 7 Ellen vom blauen zusammen 49 G. Was kostet die Elle von jeder Tuchart?

80. Ein Kaufmann verkaufte rotes nnd grünes Zeug. Es kosteten 7 Ellen rotes und 9 Ellen grünes zusammen $28\frac{1}{3}$ Mk.; 3 Ellen rotes und 5 Ellen grünes zusammen $13\frac{2}{3}$ Mk. Wie hoch kam die Elle von jeder Art?

81. Ein Meister zahlte seinen Arbeitern den Lohn. Es erhielten 5 Gesellen und 4 Handlanger 83 Mk. Ein andermal zahlte er für dieselbe Zeit an 4 Gesellen und 5 Handlanger 79 Mk. Wie viel erhielt ein Gesell und ein Handlanger für die Zeit?

82. Drei Personen hatten zusammen 444 Mk. A und B hatten zusammen doppelt so viel als C, aber A und C zusammen dreimal so viel als B. Wie viel hatte jede?

83. Es hatte jemand zwei Börsen. Legte er 10 Fr. in die erste, so enthielt sie erst halb so viel als die zweite. Legte er diese 10 Fr. jedoch in die zweite, so enthielt sie 3mal so viel als die erste. Wie viel enthielt jede?

84. A und B hatten eine Schuld von 29 G. zu bezahlen. A sagte zu B: Gieb mir $\frac{2}{3}$ von deinem Gelde, so kann ich sie allein bezahlen. B erwiderte: Gieb du mir lieber $\frac{3}{4}$ von deinem Gelde, so kann ich sie auch bezahlen. Wie viel Geld hatte jeder?

85. Ein Wasserbehälter kann durch zwei Öffnungen gefüllt und geleert werden. Läuft das Wasser durch die erste Röhre zu und durch die zweite ab, so wird das Wasser im Behälter in 3 Stunden um eben so viel Kubikmeter steigen, als es in $1\frac{1}{2}$ Stunden steigt, wenn es durch beide Röhren zugleich einströmt, nämlich um 1000 Kubikmeter. In wie viel Zeit werden 1000 Kubikmeter durch jede Röhre in den Behälter fließen?

86. Jemand hat zwei Fässer mit Wasser, von denen das erste noch 10 Liter mehr hält als das zweite. Gießt er aus dem ersten die Hälfte in das zweite, dann aus diesem die Hälfte in das erste, drittens aus dem ersten die Hälfte in das zweite und viertens die Hälfte aus dem zweiten in das erste, so hält schließlich das erste Faß noch 20 Liter mehr als das zweite. Wie viel Liter hielt jedes Faß anfangs?

87. Jemand hat zwei Fässer, in denen zusammen 96 Liter sind. Er gießt aus dem ersten so viel in das zweite, als schon darin ist; dann wieder aus dem zweiten so viel in das erste, als jetzt darin ist; drittens wieder aus dem ersten in das zweite so viel, als jetzt darin ist; viertens wieder aus dem zweiten in das erste so viel, als jetzt darin ist. Schließlich ist in beiden Fässern gleich viel. Wie viel war anfangs in jedem?

88. Wie viel war nach der vorigen Aufgabe anfangs in jedem Faß, wenn sie zusammen a Liter hielten und das Umgießen nicht 4, sondern 6mal geschah?

89. Jemand hat zwei Kästchen mit Nüssen. Er nimmt immer abwechselnd aus dem einen Kästchen den 3. Teil und legt ihn in das andere. Nachdem er dies Umlegen 4mal gemacht hat, sind in jedem Kästchen 32 Nüsse. Wie viel waren anfangs in jedem?

90. Es hat jemand zwei Körbe, in denen zusammen 60 Äpfel liegen. Er legt (ähnlich wie in Aufg. 86.) immer abwechselnd aus dem einen die Hälfte in den andern. Nachdem er dies 9mal wiederholt hat,

sind im ersten Korbe so viel Äpfel als anfangs im zweiten waren, und im zweiten Korbe so viel, als anfangs im ersten waren. Wie viel Äpfel waren anfangs in jedem Korbe?

91. Wie würde aber das Resultat der vorigen Aufgabe sein, wenn die Anzahl der Äpfel 120 betrug, die Äpfel nur 5mal umgelegt wurden und schließlich im ersten Korbe 41, im zweiten 79 Äpfel waren?

---

92. Ein Stück Platin, welches das schwerste Metall ist und ein specifisches Gewicht von 20,88 hat, soll mit einem Stück Korkholz, dessen specifisches Gewicht 0,24 ist, verbunden werden, daß die Verbindung das specifische Gewicht des Lindenholzes 0,48 hat. Wie viel Korkholz muß man nehmen, wenn das Stück Platin 87 Neulot wiegt?

93. Ein Körper von der Dichtigkeit d soll mit einem andern von der Dichtigkeit d_1 verbunden werden, daß die durchschnittliche Dichtigkeit der Verbindung d_2 ist. In welchem Verhältnis müssen die Gewichte der beiden Kröper zu einander stehen?

94. Wie schwer muß ein tannenes Brett sein, das im Wasser eine Tragkraft von 25 Pfund haben soll, d. h. wenn das vom Brette verdrängte Wasser noch 25 Pfund mehr wiegen soll als das Brett selbst, das specifische Gewicht des Tannenholzes zu 0,5 gerechnet?

95. Ein Stück Blei von 17 Pfund soll mit einem Stück Korkholz verbunden werden, daß die Verbindung im Wasser noch eine Tragkraft von 5 Pfund hat. Wie viel Korkholz ist dazu nötig, wenn das specifische Gewicht des Bleis $11\frac{1}{3}$ und das des Korkholzes 0,24 ist?

96. Ein junger Mensch, der 108 Pfund wiegt, will sich einen Korkgürtel machen, um leichter schwimmen zu können. Wie viel Pfund muß dieser schwer sein, wenn er in Verbindung mit demselben gerade vom Wasser getragen wird, d. h. weder untersinkt, noch höher gehoben wird, als nötig ist, um den Kopf gerade über Wasser zu haben? Sein Kopf möge $10\frac{1}{2}$ Pfund wiegen und das specifische Gewicht des eingetauchten Teiles seines Körpers 1,04, das des Korkholzes 0,24 sein.

97. Ein anderer junger Mensch von 115 Pfund will sich das Schwimmen in ähnlicher Weise erleichtern, begnügt sich aber mit einem Brett von Tannenholz, auf welches er die Brust legt. Wie schwer muß dies sein, wenn sein specifisches Gewicht wegen seiner großen Magerkeit 1,05 ist, sein Kopf 10 Pfund wiegt und das specifische Gewicht des Tannenholzes 0,5, sonst aber die Bedingungen sind wie in der vorigen Aufgabe.

98. Ein Körper von g Pfund und der Dichtigkeit d soll mit einem andern von der Dichtigkeit d_1 verbunden werden, daß die Verbindung im Wasser noch ein Gewicht von p Pfund tragen kann. Wie viel Pfund muß man von dem zweiten Körper nehmen?

---

99. Es besitzt jemand einen Wagen, der die eigene mechanische Einrichtung hat, daß man auf einer Fahrt den Unterschied der Anzahl der Umläufe der Räder zu bestimmen im Stande ist. Auf einer Fahrt hatte das Vorderrad 2000 Umläufe mehr gemacht als das Hinterrad. Wie groß war der zurückgelegte Weg, wenn das Vorderrad $5\frac{1}{4}$, das Hinterrad $7\frac{1}{8}$ Fuß im Umfange hatte?

100. Auf einer Peripherie eines Kreises bewegen sich zwei Körper hinter einander her. Der eine durchläuft die Bahn in a, der andere in b Minuten. Wie viel Zeit wird immer von einem Zusammentreffen bis zum nächsten verfließen?

101. Zwei Punkte A und B bewegen sich auf der Peripherie eines Kreises hinter einander her. A durchläuft die Bahn in a, B in b Sekunden. Ihre anfängliche Entfernung ist m Meter, und sie treffen zum ersten Mal nach t Sekunden zusammen. Wie groß ist die Peripherie des Kreises, und wie viel Zeit liegt zwischen je zwei Bewegungen, wenn die Bewegung fortdauert?

102. Der scheinbare Umlauf des Mondes um die Erde beträgt 27 Tage 7 Stunden 43 Minuten 5 Sekunden, der scheinbare Umlauf der Sonne um die Erde 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 49 Sekunden. Wie lang ist ein synodischer Monat, d. h. die Zeit zwischen zwei Neumonden oder zwei entsprechenden Mondphasen?

103. Vor einer totalen und centralen Sonnenfinsternis, die an einem Orte vorfiel, standen der Berechnung zufolge um 9 Uhr 13 Minuten vormittags die Mittelpunkte der Sonnenscheibe und der Mondscheibe noch $5\frac{7}{8}$ Mondbreiten von einander. Beide Scheiben hatten dieselbe scheinbare Größe und bewegten sich in derselben Richtung von Westen nach Osten. Der Mond legte auf seiner Bahn in einer Stunde $1\frac{1}{16}$, die Sonne dagegen in derselben Zeit nur $\frac{1}{12}$ Mondbreite zurück. Um wie viel Uhr fielen die Mittelpunkte beider Scheiben zusammen (totale Finsternis)? Um wie viel Uhr berührten sich die Scheiben mit ihren Rändern zum ersten und um wie viel Uhr zum zweiten Mal (Eintritt und Austritt des Mondes, oder Anfang und Ende der Finsternis)? (Heis, Aufgabensammlung.)

104. Aus Omaha geht der Schnellzug Montag-Mittag um 12 Uhr nach der dortigen mittleren Zeit auf der Pacifikbahn ab nach S. Francisco und macht in jeder Stunde 6 Meilen. Er kommt in S. Francisco am Donnerstag-Morgen 7 Uhr 26 Minuten an nach der mittleren Zeit von S. Franzisco. Wie weit ist S. Franzisco von Omaha entfernt, wenn der Zug auch die ganzen Nächte durchfährt und mit jeder zurückgelegten Meile wegen seines Vorrückens gegen Westen 22 Sekunden an Zeit gewinnt?

105. Ein Reiter und ein Fußgänger machen denselben Weg von A nach B. Der Fußgänger, der schon 7 Stunden früher aufbricht, braucht zu 3 Meilen immer 8 Stunden, der Reiter nur 2 Stunden. Nach welcher Zeit hat a) der Fußgänger doppelt so viel Meilen gemacht als der Reiter, b) der Reiter doppelt so viel als der Fußgänger?

106. Ein Fußgänger und ein Wagen machen beide die Tour von

Schwerin nach Wismar. Jener macht alle 5 Stunden 3 Meilen, dieser braucht nur 45 Minuten zu einer Meile. Der Fußgänger ist schon 1 Meile fort, als der Wagen abfährt, und dieser kommt doch noch 2 Stunden früher in Wismar an als jener. Wie lange ist jeder unterwegs, und wie weit sind die beiden Städte von einander entfernt?

107. Aus der Stadt Plau geht ein Fußgänger nach Güstrow, der alle 5 Stunden 3 Meilen macht. Als er schon 1 Stunde fort ist, fährt ihm die Post vorbei, die ebenfalls nach Güstrow will. Diese hält sich 2 Stunden 25 Minuten in Güstrow auf, fährt dann wieder zurück nach Plau und trifft den Fußgänger 1 Meile von Güstrow. Wie weit liegt Plau von Güstrow, wenn die Post immer 45 Minuten zu einer Meile gebraucht?

108. Aus Grabow reitet an einem Morgen ein Reiter auf der Chaussee nach Hamburg und macht in jeder Stunde $1\frac{1}{4}$ Meilen. Als er 6 Meilen zurückgelegt hat, sieht er auf der Bahn den Schnellzug vorbeifahren, der ebenfalls nach Hamburg will und hier 10 Minuten nach 12 Uhr anlangt. Um 2 Uhr geht ein Güterzug aus Hamburg und gelangt in derselben Zeit in Grabow an, wo der Reiter in Hamburg eintrifft. Wie weit ist Grabow von Hamburg entfernt, wenn der Schnellzug in jeder Stunde 6 Meilen, der Güterzug nur 4 Meilen zurücklegt?

---

109. Aus einem Spiel von 52 Karten wurden 7 Karten gezogen und auf jede noch so viel Karten gelegt, daß ihre Anzahl mit der Zahl der Augen der untersten Karte 16 ausmacht. Wie groß muß die Summe der Augen der untersten 7 Karten sein, wenn von den 52 Karten noch 5 übrig blieben?

110. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe sein, wenn die Anzahl der gezogenen Karten n, die Summe aus den Augen jeder untersten Karte und der Anzahl der auf dieselbe gelegten Karten a beträgt und noch r Karten übrig bleiben? Und wie wird darnach die Regel heißen, um die Summe der Augen der untersten Karten schnell anzugeben?

111. Wie wird sich das Resultat der vorigen Aufgabe gestalten, wenn die für jeden Haufen angesetzte Summe $a = 12$ ist?

112. Welche Zahl hat hinten eine 2 und wird dadurch verdoppelt, daß man die 2 rechts abschneidet und vorn links wieder ansetzt?

113. Welche Zahl hat vorn eine 4 und reduziert sich auf die Hälfte, wenn man die 4 vorn links abschneidet und rechts wieder ansetzt?

114. Welche Zahl hat vorn eine 7 und reduziert sich auf ihren 7. Teil, wenn man die 7 vorn abschneidet und hinten wieder ansetzt?

115. Welche Zahl hat hinten eine 9 und wird dadurch verneunfacht, daß man die 9 rechts abschneidet und vorn links wieder ansetzt?

XXIII.

Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

Sollen mehrere Unbekannte gesucht werden, so müssen so viel Gleichungen vorhanden sein als Unbekannte, wenn anders die Unbekannten sich vollständig sollen bestimmen lassen. Die Gleichungen müssen von einander unabhängig sein, d. h. es darf sich keine aus den andern ableiten lassen; sonst würde sie nichts Neues sagen, mithin überflüssig sein.

Gleichungen mit mehreren Unbekannten werden dadurch gelöst, daß man ihre Auflösung auf die Auflösung einer Gleichung mit einer Unbekannten reduziert. Hat man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, so muß man eine Unbekannte eliminieren (herausschaffen). Die sich ergebende Gleichung enthält nur eine Unbekannte; diese läßt sich daher nach dem Früheren bestimmen.

Die Elimination einer Unbekannten geschieht nach der Additionsmethode, nach der Substitutionsmethode und nach der Gleichsetzungsmethode. Die Additionsmethode ist die allgemeinste und fast durchweg auch die einfachste und kürzeste; sie verdient daher für die gewöhnliche Anwendung unbedingt den Vorzug.

Die Additionsmethode besteht darin, daß man die eine Unbekannte durch Addition (oder Subtraktion) der Gleichungen eliminiert. Zu diesem Zwecke muß die zu eliminierende Unbekannte in beiden Gleichungen dieselben Koefficienten mit entgegengesetzten Zeichen haben. Ist dies nicht der Fall, so muß man die Gleichungen vor der Addition erst mit geeigneten Faktoren multiplizieren. Um diese Methode anzuwenden, müssen die Gleichungen meistens erst auf die einfachste Form, die Normalform $ax + by = c$ gebracht werden. Die aus der Addition (oder Subtraktion) sich ergebende neue Gleichung enthält dann nur eine, die nicht eliminierte Unbekannte, und ist nach dieser aufzulösen.

Die Substitutionsmethode besteht darin, daß man aus einer Gleichung die eine Unbekannte sucht und den für dieselbe gefundenen Wert in der andern Gleichung substituiert und die so entstehende Gleichung, welche nur noch eine, die andere Unbekannte enthält, nach dieser auflöst.

Die Gleichsetzungsmethode besteht darin, daß man aus beiden Gleichungen dieselbe Unbekannte sucht und die beiden für sie gefundenen Werte einander gleichsetzt. Die neue Gleichung giebt die andere Unbekannte.

Oft ist es zweckmäßig, aus den gegebenen Gleichungen durch Addition oder Subtraktion erst eine oder zwei neue Gleichungen abzuleiten, welche kleinere Koefficienten haben und welche sich daher leichter mit einer der gegebenen oder mit einander kombinieren lassen (vgl. S. 175 Nr. 45 u. 46).

Ist eine Unbekannte gefunden, so findet man die andere durch Substitution des für die erste gefundenen Wertes, oder meistens einfacher nach der Additionsmethode aus der gefundenen Gleichung $x = a$ oder $y = b$ und einer der gegebenen Gleichungen.

Kommen mehr als zwei Unbekannte vor, z. B. drei, so müssen

auch drei Gleichungen gegeben sein. Aus den drei Gleichungen hat man nach einer der oben genannten Methoden zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten zu suchen, und aus diesen zwei wieder eine Gleichung mit einer Unbekannten.

Ebenso verfährt man, wenn die Anzahl der Gleichungen und der Unbekannten noch größer ist. Man hat immer so lange aus n Gleichungen mit n Unbekannten n — 1 Gleichungen mit n — 1 Unbekannten zu suchen, bis man auf eine Gleichung kommt, die nur eine Unbekannte enthält.

A. Gleichungen mit zwei Unbekannten.

1. $\left| \begin{array}{l} x + y = 347 \\ x - y = 153 \end{array} \right|$ 2. $\left| \begin{array}{l} x + 5y = 573 \\ x + y = 181 \end{array} \right|$

3. $\left| \begin{array}{l} 3x + y = 73 \\ 2x - y = 32 \end{array} \right|$ 4. $\left| \begin{array}{l} 4x + 3y = 97 \\ 7x + 3y = 127 \end{array} \right|$

5. $\left| \begin{array}{l} 5x + 7y = 176 \\ 5x - 3y = 46 \end{array} \right|$ 6. $\left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 100 \\ 2x + y = 156 \end{array} \right|$

7. $\left| \begin{array}{l} x + 4y = 37 \\ 2x + 5y = 53 \end{array} \right|$ 8. $\left| \begin{array}{l} 7x + 3y = 100 \\ 3x - y = 20 \end{array} \right|$

9. $\left| \begin{array}{l} 2x + 5y = 1 \\ 6x + 7y = 3 \end{array} \right|$ 10. $\left| \begin{array}{l} 8x - 15y = -30 \\ 2x + 3y = 15 \end{array} \right|$

11. $\left| \begin{array}{l} 5x + 6y = 529 \\ 3x + 2y = 431 \end{array} \right|$ 12. $\left| \begin{array}{l} 24x + 7y = 27 \\ 8x - 33y = 115 \end{array} \right|$

13. $\left| \begin{array}{l} 3x + 4y = 253 \\ y = 5x \end{array} \right|$ 14. $\left| \begin{array}{l} 2x - 11y = -95 \\ x - 3y = 0 \end{array} \right|$

15. $\left| \begin{array}{l} 5x - 4y = 6 \\ 8x = 7y \end{array} \right|$ 16. $\left| \begin{array}{l} 7x - 3y = 27 \\ 5x - 6y = 0 \end{array} \right|$

17. $\left| \begin{array}{l} 2x + 3y = 41 \\ 3x + 2y = 39 \end{array} \right|$ 18. $\left| \begin{array}{l} 5x + 7y = 17 \\ 7x - 5y = 9 \end{array} \right|$

19. $\left| \begin{array}{l} 11x + 12y = 100 \\ 9x + 8y = 80 \end{array} \right|$ 20. $\left| \begin{array}{l} 18x - 35y = -13 \\ 15x + 28y = 275 \end{array} \right|$

21. $\left| \begin{array}{l} 3x + 7y = 7 \\ 5x + 3y = -36 \end{array} \right|$ 22. $\left| \begin{array}{l} 3x + 16y = 5 \\ 28y - 5x = 19 \end{array} \right|$

23. $\left| \begin{array}{l} 5x + 3y + 2 = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{array} \right|$ 24. $\left| \begin{array}{l} 21x + 8y + 66 = 0 \\ 23y - 28x + 13 = 0 \end{array} \right|$

25. $\left| \begin{array}{l} 10x + 7y + 4 = 0 \\ 6x + 5y + 2 = 0 \end{array} \right|$ 26. $\left| \begin{array}{l} x = 3y - 19 \\ y = 3x - 23 \end{array} \right|$

27. $\left| \begin{array}{l} 23x + 15y = 4\frac{1}{4} \\ 48x + 45y = 18 \end{array} \right|$ 28. $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 6 \\ 3x - 4y = 4 \end{array} \right|$

29. $$\left|\begin{array}{l} \frac{3}{4}x - 2y = 1 \\ \frac{1}{3}x - y = 0 \end{array}\right|$$

30. $$\left|\begin{array}{l} 2x - \frac{5}{3}y = 4 \\ 3x - \frac{7}{2}y = 0 \end{array}\right|$$

31. $$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y + 1 \\ \frac{1}{4}x = \frac{4}{3}y - 10 \end{array}\right|$$

32. $$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{3}y = \frac{1}{2}x - 1 \\ \frac{1}{4}y = \frac{2}{5}x - 1 \end{array}\right|$$

33. $$\left|\begin{array}{l} \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y = 17 \\ \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 19 \end{array}\right|$$

34. $$\left|\begin{array}{l} 2\frac{1}{4}x = 3\frac{1}{3}y + 4 \\ 2\frac{1}{5}y = 3\frac{1}{3}x - 47 \end{array}\right|$$

35. $$\left|\begin{array}{l} 7x - 5y = 3{,}042 \\ 3x - 2y = 1{,}323 \end{array}\right|$$

36. $$\left|\begin{array}{l} 1{,}5x - 2y = 1 \\ 2{,}5x - 3y = 6 \end{array}\right|$$

37. $$\left|\begin{array}{l} 5x - 4{,}9y = 1 \\ 3x - 2{,}9y = 1 \end{array}\right|$$

38. $$\left|\begin{array}{l} 7x - 10y = 0{,}1 \\ 11x - 16y = 0{,}1 \end{array}\right|$$

39. $$\left|\begin{array}{l} 5x - 4y + 1 = 0 \\ 1{,}7x - 2{,}2y + 7{,}9 = 0 \end{array}\right|$$

40. $$\left|\begin{array}{l} 0{,}16x - 0{,}04y = 1 \\ 0{,}19x - 0{,}11y = 1 \end{array}\right|$$

41. $$\left|\begin{array}{l} 2{,}7x + 2{,}6y = 8{,}8 \\ 0{,}9x + 2{,}2y = 4{,}4 \end{array}\right|$$

42. $$\left|\begin{array}{l} 3{,}9x - 0{,}08y = 2{,}77 \\ 26x + 0{,}4y = 18 \end{array}\right|$$

43. $$\left|\begin{array}{l} 27{,}4x - 31{,}5y = 11 \\ 21{,}4x - 26{,}5y = 1 \end{array}\right|$$

44. $$\left|\begin{array}{l} 25{,}9x - 60{,}1y = 1 \\ 24{,}1x - 55{,}9y = 1 \end{array}\right|$$

45. $$\left|\begin{array}{l} 2{,}60x - 0{,}41y - 2{,}222 + 2\frac{1}{2}x = 0 \\ 0{,}51x - 3{,}60y + 3{,}333 - \frac{1}{2}y = 0{,}308 \end{array}\right|$$

46. $$\left|\begin{array}{l} 3{,}5x + 2\frac{1}{3}y = 13 + 4\frac{1}{7}x - 3{,}5y \\ 2\frac{1}{7}x + 0{,}8y = 22\frac{1}{2} + 0{,}7x - 3\frac{1}{3}y \end{array}\right|$$

47. $$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{array}\right|$$

48. $$\left|\begin{array}{l} \frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3 \\ \frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4 \end{array}\right|$$

49. $$\left|\begin{array}{l} \frac{1{,}6}{x} - \frac{2{,}7}{y} = -1 \\ \frac{0{,}8}{x} + \frac{3{,}6}{y} = 5 \end{array}\right|$$

50. $$\left|\begin{array}{l} 17x - \frac{0{,}3}{y} = 3 \\ 16x - \frac{0{,}4}{y} = 2 \end{array}\right|$$

51. $$\left|\begin{array}{l} \frac{x}{3} + \frac{5}{y} = 4\frac{1}{3} \\ \frac{x}{6} + \frac{10}{y} = 2\frac{2}{3} \end{array}\right|$$

52. $$\left|\begin{array}{l} \frac{5x}{0{,}7} + \frac{0{,}3}{y} = 6 \\ \frac{10x}{7} + \frac{9}{y} = 31 \end{array}\right|$$

53. $$\left|\begin{array}{l} 5(x + 2) - 3(y + 1) = 23 \\ 3(x - 2) + 5(y - 1) = 19 \end{array}\right|$$

54. $\left| \begin{array}{l} 3(2x - y) + 4(x - 2y) = 87 \\ 2(3x - y) - 3(x - y) = 82 \end{array} \right|$

55. $\left| \begin{array}{l} \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}(y + 1) = 1 \\ \frac{1}{3}(x + 1) + \frac{3}{4}(y - 1) = 9 \end{array} \right|$ 56. $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}(y + 1) = 1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}(x - 1) - \frac{1}{2}y = 4\frac{1}{2} \end{array} \right|$

57. $\left| \begin{array}{l} \frac{5}{x + 2y} = \frac{7}{2x + y} \\ \frac{7}{3x - 2} = \frac{5}{6 - y} \end{array} \right|$ 58. $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{3x + 1} = \frac{2}{5y + 4} \\ \frac{1}{4x - 3} = \frac{2}{7y - 6} \end{array} \right|$

59. $\left| \begin{array}{l} \frac{x + 3y}{x - y} = 8 \\ \frac{7x - 13}{3y - 5} = 4 \end{array} \right|$ 60. $\left| \begin{array}{l} \frac{15x + 1}{45 - y} = 8 \\ \frac{12y + 19}{x - 10} = 25 \end{array} \right|$

61. $\left| \begin{array}{l} \frac{3x + 1}{4 - 2y} = \frac{4}{3} \\ x + y = 1 \end{array} \right|$ 62. $\left| \begin{array}{l} \frac{7 - 2x}{5 - 3y} = \frac{3}{2} \\ y - x = 4 \end{array} \right|$

63. $\left| \begin{array}{l} \frac{x - 3}{y + 2} = \frac{2}{3} \\ \frac{x + 1}{y - 2} = \frac{3}{2} \end{array} \right|$ 64. $\left| \begin{array}{l} \frac{8x + 1}{1,5 - y} = 11 \\ \frac{7y + 0,3}{2x - 0,3} = 6 \end{array} \right|$

65. $\left| \begin{array}{l} \frac{x + 2y + 1}{2x - y + 1} = 2 \\ \frac{3x - y + 1}{x - y + 3} = 5 \end{array} \right|$ 66. $\left| \begin{array}{l} \frac{x + 3y + 13}{4x + 5y - 25} = 3 \\ \frac{8x + y + 6}{5x + 3y - 23} = 5 \end{array} \right|$

67. $\left| \begin{array}{l} \frac{3x + 2y + 12,3}{4x + 3y - 44} = 3 \\ \frac{4x + 10y - 6,7}{3x + y - 10} = 4 \end{array} \right|$ 68. $\left| \begin{array}{l} \frac{0,9x - 0,7y + 7,3}{13x - 15y + 17} = 0,2 \\ \frac{1,2x - 0,2y + 8,9}{13x - 15y + 17} = 0,3 \end{array} \right|$

69. $\left| \begin{array}{l} \frac{x + 1}{3} - \frac{y + 2}{4} = \frac{2(x - y)}{5} \\ \frac{x - 3}{4} - \frac{y - 3}{3} = 2y - x \end{array} \right|$

70. $\left| \begin{array}{l} \frac{3x - 2y}{5} + \frac{5x - 3y}{3} = x + 1 \\ \frac{2x - 3y}{3} + \frac{4x - 3y}{2} = y + 1 \end{array} \right|$

71. $\left| \begin{array}{l} \frac{2x - y + 3}{3} - \frac{x - 2y + 3}{4} = 4 \\ \frac{3x - 4y + 3}{4} + \frac{4x - 2y - 9}{3} = 4 \end{array} \right|$

72. $\left| \begin{array}{l} x : y = 3 : 4 \\ (x - 1) : (y + 2) = 1 : 2 \end{array} \right|$

73. $\left| \begin{array}{l} (x + 4) : (y + 1) = 2 : 1 \\ (x + 2) : (y - 1) = 3 : 1 \end{array} \right|$

74. $| (x + 1) : (y + 1) : (x + y) = 3 : 4 : 5 |$

75. $| (x - 2) : (y + 1) : (x + y - 3) = 3 : 4 : 5 |$

76. $| (x - 5) : (y + 9) : (x + y + 4) = 1 : 2 : 3 |$

77. $\left| \begin{array}{l} (2x + y - 1) : (3x + 2y + 11) = 1 : 2 \\ (5x - 3y + 4) : (6x - 3y + 3) = 3 : 4 \end{array} \right|$

78. $\left| \begin{array}{l} (x + y - 4) : (2x + y + 1) = 1 : 2 \\ (2x + y - 9) : (x + 2y + 7) = 3 : 4 \end{array} \right|$

79. $\left| \begin{array}{l} (x - 4)(y + 7) = (x - 3)(y + 4) \\ (x + 5)(y - 2) = (x + 2)(y - 1) \end{array} \right|$

80. $\left| \begin{array}{l} (x + 3)(y + 5) = (x + 1)(y + 8) \\ (2x - 3)(5y + 7) = 2(5x - 6)(y + 1) \end{array} \right|$

81. $\left| \begin{array}{l} (x - 1)(5y - 3) = 3(3x + 1) \\ (x - 1)(4y + 3) = 3(7y - 1) \end{array} \right|$

82. $\left| \begin{array}{l} (x + 1)(2y + 1) = 5x + 9y + 1 \\ (x + 2)(3y + 1) = 9x + 13y + 2 \end{array} \right|$

83. $\left| \begin{array}{l} (3x - 2)(5y + 1) = (5x - 1)(y + 2) \\ (3x - 1)(y + 5) = (x + 5)(7y - 1 \end{array} \right|$

---

ax + by = c
bx + ay = d

ax + by = c
ax − by = d

84. $\left| \begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = b \end{array} \right|$

85. $\left| \begin{array}{l} x + y = \frac{1}{2}(5a + b) \\ x - y = \frac{1}{2}(a + 5b) \end{array} \right|$

86. $\left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 5b - a \\ 3x - 2y = a + 5b \end{array} \right|$

87. $\left| \begin{array}{l} 2x - 3y = -5a \\ 3x - 2y = -5b \end{array} \right|$

88. $\left| \begin{array}{l} 5x + 3y = 4a + b \\ 3x + 5y = 4a - b \end{array} \right|$

89. $\left| \begin{array}{l} 7x - 5y = 24a \\ 5x - 7y = 24b \end{array} \right|$

90. $\left| \begin{array}{l} 3x + 2y = 5a^2 + ab + 5b^2 \\ 3y + 2x = 5a^2 - ab + 5b^2 \end{array} \right|$

91. $\left| \begin{array}{l} 3x - 2y = a^2 + 5ab + b^2 \\ 3y - 2x = a^2 - 5ab + b^2 \end{array} \right|$

92. $\left| \begin{array}{l} 3x - y = 2(a+b)^2 \\ 3y - x = 2(a-b)^2 \end{array} \right|$ 93. $\left| \begin{array}{l} 5x - 2y = 3(a+7c) \\ 5y - 2x = 3(a+7b) \end{array} \right|$

94. $\left| \begin{array}{l} ax + y = m \\ x - y = n \end{array} \right|$ 95. $\left| \begin{array}{l} x + my = a \\ x - ny = b \end{array} \right|$

96. $\left| \begin{array}{l} ax + by = c \\ a_1 x + b_1 y = c_1 \end{array} \right|$ 97. $\left| \begin{array}{l} ax + by = c \\ mx = ny \end{array} \right|$

98. $\left| \begin{array}{l} mx + ny = c \\ x : y = a : b \end{array} \right|$ 99. $\left| \begin{array}{l} a(x+y) = m \\ b(x-y) = n \end{array} \right|$

100. $\left| \begin{array}{l} (a+b)x - (a-b)y = 4ab \\ (a+b)x + (a-b)y = 2(a^2+b^2) \end{array} \right|$

101. $\left| \begin{array}{l} (a+b)x + (a-b)y = 2(a^2+b^2) \\ (a-b)x + (a+b)y = 2(a^2-b^2) \end{array} \right|$

102. $\left| \begin{array}{l} x + y = a \\ x^2 - y^2 = b^2 \end{array} \right|$ 103. $\left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ 2x^2 - xy - 3y^2 = 8 \end{array} \right|$

104. $\left| \begin{array}{l} ax + by = 2a \\ a^2x - b^2y = a^2 + b^2 \end{array} \right|$ 105. $\left| \begin{array}{l} ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3 \\ bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3 \end{array} \right|$

106. $\left| \begin{array}{l} x + y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \\ x - y = \frac{4ab}{a^2-b^2} \end{array} \right|$ 107. $\left| \begin{array}{l} ax + by = 2a \\ x + y = \frac{a^2+b^2}{ab} \end{array} \right|$

108. $\left| \begin{array}{l} x + y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \\ 2x + 3y = \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2} \end{array} \right|$

109. $\left| \begin{array}{l} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b} \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b} \end{array} \right|$

110. $\left| \begin{array}{l} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c \\ \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = c_1 \end{array} \right|$ 111. $\left| \begin{array}{l} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c \\ \frac{a_1}{x} + \frac{b_1}{y} = c_1 \end{array} \right|$

112. $\left| \begin{array}{l} (a-b)x + (a+b)y = a + b \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b} \end{array} \right|$

113. $\left| \begin{array}{l} (a-b)x+y=\frac{a+b+1}{a+b} \\ x+(a+b)y=\frac{a-b+1}{a-b} \end{array} \right|$

114. $\left| \begin{array}{c} (a+b-c)x-(a-b+c)y=4a(b-c) \\ x:y=(a+b-c):(a-b+c) \end{array} \right|$

115. $\left| \begin{array}{l} (x+y):(x-y)=a:(b-c) \\ (x+c):(y+b)=(a+b):(a+c) \end{array} \right|$

116. $\left| \begin{array}{c} (x-a):(y-a)=(a-b):(a+b) \\ x:y=(a^3-b^3):(a^3+b^3) \end{array} \right|$

117. $\left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{y}=a \\ \frac{y+1}{x}=b \end{array} \right|$

118. $\left| \begin{array}{l} \frac{x}{y}=\frac{a}{b} \\ \frac{x+1}{y+1}=\frac{c}{d} \end{array} \right|$

119. $\left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{y+1}=\frac{a+b+c}{a-b+c} \\ \frac{x-1}{y-1}=\frac{a+b-c}{a-b-c} \end{array} \right|$

120. $\left| \begin{array}{l} \frac{x-y+1}{x-y-1}=a \\ \frac{x+y+1}{x+y-1}=b \end{array} \right|$

121. $\left| \begin{array}{l} \frac{x+y+1}{x-y+1}=\frac{a+1}{a-1} \\ \frac{x+y+1}{x-y-1}=\frac{1+b}{1-b} \end{array} \right|$

122. $\left| \begin{array}{l} \frac{x-y+1}{x+y-1}=a \\ \frac{x+y+1}{x-y-1}=b \end{array} \right|$

123. $\left| \begin{array}{l} \frac{x-c}{y-c}=\frac{a}{b} \\ x-y=a-b \end{array} \right|$

124. $\left| \begin{array}{l} \frac{x-a+c}{y-a+b}=\frac{b}{c} \\ \frac{x+c}{y+b}=\frac{a+b}{a+c} \end{array} \right|$

125. $\left| \begin{array}{l} \frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=a+b \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2a \end{array} \right|$

126. $\left| \begin{array}{l} \frac{x}{m-a}+\frac{y}{m-b}=1 \\ \frac{x}{n-a}+\frac{y}{n-b}=1 \end{array} \right|$

127. $\left| \begin{array}{l} \frac{x+c}{a+b}+\frac{y+b}{a+c}=2 \\ \frac{x-b}{a-c}+\frac{y-c}{a-b}=2 \end{array} \right|$

128. $\left| \begin{array}{l} (a+c)x-(a-c)y=2ab \\ (a+b)y-(a-b)x=2ac \end{array} \right|$

129. $\left| \begin{array}{l} x\sqrt{2}+y\sqrt{3}=3\sqrt{3} \\ x\sqrt{3}-y\sqrt{2}=2\sqrt{2} \end{array} \right|$

130. $\left| \begin{array}{l} x\sqrt{a}-y\sqrt{b}=a+b \\ x+y=2\sqrt{a} \end{array} \right|$

131. $\left| \begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{y} \\ y = 4 - 3x + x^2 \end{array} \right|$

132. $\left| \begin{array}{l} 2x - \sqrt{y} = 5 \\ (4x - 7)(x - 3) = y \end{array} \right|$

133. $\left| \begin{array}{l} 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 6 \\ 3\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = 1 \end{array} \right|$

134. $\left| \begin{array}{l} 3\sqrt{x} + 13\sqrt{y} = 60 \\ 7\sqrt{x} + 17\sqrt{y} = 100 \end{array} \right|$

135. $\left| \begin{array}{l} 2\sqrt{x+5} - 3\sqrt{y-2} = 3 \\ 3\sqrt{x+5} - 4\sqrt{y-2} = 5 \end{array} \right|$

136. $\left| \begin{array}{l} 4\sqrt{x+7} - 5\sqrt{y-7} = 7 \\ 3\sqrt{x+7} - 7\sqrt{y-7} = 2 \end{array} \right|$

137. $\left| \begin{array}{l} \frac{7}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{y}} = 4 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}} = 1 \end{array} \right|$

138. $\left| \begin{array}{l} \frac{8}{\sqrt{x-3}} - \frac{3}{\sqrt{y+3}} = 1 \\ \frac{4}{\sqrt{x-3}} + \frac{9}{\sqrt{y+3}} = 4 \end{array} \right|$

B. Gleichungen mit drei und mehreren Unbekannten.

1. $\left| \begin{array}{l} x + y = 37 \\ x + z = 25 \\ y + z = 22 \end{array} \right|$

2. $\left| \begin{array}{l} y + z = a \\ z + x = b \\ x + y = c \end{array} \right|$

3. $\left| \begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 3x + 2z = 11 \\ 3y + 4z = 10 \end{array} \right|$

4. $\left| \begin{array}{r} 2x + 2y = 7 \\ 7x + 9z = 29 \\ y + 8z = 17 \end{array} \right|$

5. $\left| \begin{array}{l} 5x + 3y = 13 \\ 7x - 3z = 8 \\ 3y + 5z = 11 \end{array} \right|$

6. $\left| \begin{array}{l} 1{,}3x - 1{,}9y = 1 \\ 1{,}7y - 1{,}1z = 2 \\ 2{,}9z - 2{,}1x = 3 \end{array} \right|$

7. $\left| \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 3x - 2z = 4 \\ 5y = 4z \end{array} \right|$

8. $\left| \begin{array}{r} x + y + z = 36 \\ 4x = 3y \\ 2x = 3z \end{array} \right|$

9. $\left| \begin{array}{r} 5x + 3y + 2z = 217 \\ 5x - 3y = 39 \\ 3y - 2z = 20 \end{array} \right|$

10. $\left| \begin{array}{r} x + y + z = 100 \\ y = 0{,}7x - 4 \\ z = 0{,}3x + 4 \end{array} \right|$

11. $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}z = 1 \\ \frac{1}{2}z - \frac{1}{3}y = 2 \end{array} \right|$

12. $\left| \begin{array}{l} 1\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{2}y = 10 \\ 2\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{5}z = 20 \\ 3\frac{1}{4}y + 3\frac{2}{5}z = 30 \end{array} \right|$

13. $$\left.\begin{array}{r} 2\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{3}y + 4\frac{1}{4}z = 64 \\ 3\frac{3}{4}x = 2\frac{1}{2}y \\ 3\frac{1}{3}y = 2\frac{1}{2}z \end{array}\right|$$

14. $$\left|\begin{array}{l} x = 2\frac{1}{3}y - 6 \\ y = 3\frac{1}{2}z - 1 \\ z = 1\frac{1}{4}x - 8 \end{array}\right|$$

15. $$\left|\begin{array}{l} x + y - z = 17 \\ x + z - y = 13 \\ y + z - x = 7 \end{array}\right|$$

16. $$\left|\begin{array}{l} y + z - x = a \\ z + x - y = b \\ x + y - z = c \end{array}\right|$$

17. $$\left|\begin{array}{l} x + y + z = 99 \\ x : y : z = 5 : 3 : 1 \end{array}\right|$$

18. $$\left|\begin{array}{l} x + y + z = m \\ x : y : z = a : b : c \end{array}\right|$$

19. $$\left|\begin{array}{l} x + y + z = 26 \\ x : z = 11 : 7 \\ y : z = 14 : 9 \end{array}\right|$$

20. $$\left|\begin{array}{l} ax + by + cz = r \\ x : y = m : n \\ y : z = p : q \end{array}\right|$$

21. $$\left|\begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ x + 2y + 4z = 15 \\ x + 3y + 9z = 23 \end{array}\right|$$

22. $$\left|\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x + 4y + 8z = 13 \\ 3x + 9y + 27z = 34 \end{array}\right|$$

23. $$\left|\begin{array}{l} 7x + 6y + 7z = 100 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{array}\right|$$

24. $$\left|\begin{array}{l} 3x + 2y + 3z = 110 \\ 5x + y - 4z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{array}\right|$$

25. $$\left|\begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ x + 3y + 6z = 20 \end{array}\right|$$

26. $$\left|\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 32 \\ 2x + 3y + z = 42 \\ 3x + y + 2z = 40 \end{array}\right|$$

27. $$\left|\begin{array}{l} x + y + 2z = 34 \\ x + 2y + z = 33 \\ 2x + y + z = 32 \end{array}\right|$$

28. $$\left|\begin{array}{l} 3x + 3y + z = 17 \\ 3x + y + 3z = 15 \\ x + 3y + 3z = 13 \end{array}\right|$$

29. $$\left|\begin{array}{l} 5x - y + 3z = a \\ 5y - z + 3x = b \\ 5z - x + 3y = c \end{array}\right|$$

30. $$\left|\begin{array}{l} 7x + 11y + z = a \\ 7y + 11z + x = b \\ 7z + 11x + y = c \end{array}\right|$$

31. $$\left|\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 15,4 \\ 3x + 5y + 7z = 37,4 \\ 5x + 8y + 11z = 59,4 \end{array}\right|$$

32. $$\left|\begin{array}{l} x + 2y - z = 4,6 \\ y + 2z - x = 10,1 \\ z + 2x - y = 5,7 \end{array}\right|$$

33. $$\left|\begin{array}{l} 0,2x + 0,3y + 0,4z = 29 \\ 0,3x + 0,4y + 0,5z = 38 \\ 0,4x + 0,5y + 0,7z = 51 \end{array}\right|$$

34. $$\left|\begin{array}{l} x + 2y - 0{,}7z = 21 \\ 3x + 0{,}2y - z = 24 \\ 0{,}9x + 7y - 2z = 27 \end{array}\right|$$

35. $$\left|\begin{array}{l} 2\tfrac{1}{2}x = y + z + 8 \\ 3\tfrac{1}{3}y = x + z + 12 \\ 4\tfrac{1}{4}z = x + y + 15 \end{array}\right|$$

36. $$\left|\begin{array}{l} x + y = 1\tfrac{1}{2}z + 8 \\ x + z = 2\tfrac{2}{3}y - 14 \\ y + z = 3\tfrac{3}{4}x - 32 \end{array}\right|$$

37. $$\left|\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{4}z = 36\tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{5}z = 27 \\ \tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{6}y + \tfrac{1}{7}z = 18 \end{array}\right|$$

5x - 2y - 2z = 16
10y - 3x - 3z = 36
17z - 4x - 4y = 60

-2x + 4y + 129z = 112

38. $$\left|\begin{array}{l} 2\tfrac{1}{2}x + 3\tfrac{1}{3}y + 4\tfrac{1}{4}z = 140 \\ 3\tfrac{1}{3}x + 4\tfrac{1}{4}y + 5\tfrac{1}{5}z = 175 \\ 2\tfrac{2}{3}x + 3\tfrac{3}{4}y + 4\tfrac{4}{5}z = 157 \end{array}\right|$$

39. $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{y+1} = 2 \\ \dfrac{y+2}{z+1} = 4 \\ \dfrac{z+3}{x+1} = \tfrac{1}{2} \end{array}\right|$$

40. $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{3x+y}{z+1} = 2 \\ \dfrac{3y+z}{x+1} = 2 \\ \dfrac{3z+x}{y+1} = 2 \end{array}\right|$$

41. $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{y-z} = 10 \\ \dfrac{x+z}{x-y} = 9 \\ \dfrac{y+z}{x+5} = 1 \end{array}\right|$$

42. $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{y+z} = 2 \\ \dfrac{y+3}{x+z} = 1 \\ \dfrac{z+3}{x+y} = \tfrac{1}{2} \end{array}\right|$$

43. $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2a \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = 2b \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 2c \end{array}\right|$$

44. $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{a} \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{b} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{c} \end{array}\right|$$

45. $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{y} = 1 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{z} = 4 \\ \dfrac{3}{y} - \dfrac{1}{z} = 0 \end{array}\right|$$

46. $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{6}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{5}{z} = 4 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{8}{y} + \dfrac{5}{z} = 4 \\ \dfrac{9}{x} + \dfrac{12}{y} - \dfrac{10}{z} = 4 \end{array}\right|$$

47. $\left| \begin{aligned} \frac{xy}{x+y} &= \frac{1}{5} \\ \frac{xz}{x+z} &= \frac{1}{6} \\ \frac{yz}{y+z} &= \frac{1}{7} \end{aligned} \right|$

48. $\left| \begin{aligned} \frac{xy}{4y-3x} &= 20 \\ \frac{xz}{2x-3z} &= 15 \\ \frac{yz}{4y-5z} &= 12 \end{aligned} \right|$

49. $\left| \begin{aligned} (x+2)(2y+1) &= (2x+7)y \\ (x-2)(3z+1) &= (x+3)(3z-1) \\ (y+1)(z+2) &= (y+3)(z+1) \end{aligned} \right|$

50. $\left| \begin{aligned} (2x-1)(y+1) &= 2(x+1)(y-1) \\ (x+4)(z+1) &= (x+2)(z+2) \\ (y-2)(z+3) &= (y-1)(z+1) \end{aligned} \right|$

51. $\left| \begin{aligned} (x+1)(5y-3) &= (7x+1)(2y-3) \\ (4x-1)(z+1) &= (x+1)(2z-1) \\ (y+3)(z+2) &= (3y-6)(3z-1) \end{aligned} \right|$

52. $\left| \begin{aligned} (2x+y):(3x+z):(y+z) &= 1:2:3 \\ 21x+31y+42z &= 115 \end{aligned} \right|$

53. $\left| \begin{aligned} (x-2y):(2x-3z):(2y+3z) &= 1:3:5 \\ 21x+31y+41z &= 135 \end{aligned} \right|$

54. $\left| \begin{aligned} x(y+z):y(x+z):z(x+y) &= a:b:c \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= a+b+c \end{aligned} \right|$

55. $\left| \begin{aligned} ax+by-cz &= 2ab \\ by+cz-ax &= 2bc \\ cz+ax-by &= 2ac \end{aligned} \right|$

56. $\left| \begin{aligned} (a-b)(x+c)-ay+bz &= 0 \\ (c-a)(y+b)-cz+ax &= 0 \\ x+y+z &= 2(a+b+c) \end{aligned} \right|$

57. $\left| \begin{aligned} (a+b)x+(a-b)z &= 2bc \\ (b+c)y+(b-c)x &= 2ac \\ (c+a)z+(c-a)y &= 2ab \end{aligned} \right|$

58. $\left| \begin{aligned} x+y+z &= a+b+c \\ bx+cy+az &= a^2+b^2+c^2 \\ cx+ay+bz &= a^2+b^2+c^2 \end{aligned} \right|$

59. $$\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ ax + by + cz = ab + ac + bc \\ (b - c)x + (c - a)y + (a - b)z = 0 \end{cases}$$

60. $$\begin{cases} (a + b)x + (b + c)y + (a + c)z = ab + ac + bc \\ (a + c)x + (a + b)y + (b + c)z = ab + ac + bc \\ (b + c)x + (a + c)y + (a + b)z = a^2 + b^2 + c^2 \end{cases}$$

61. $$\begin{cases} x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = a \\ y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = b \\ z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c \end{cases}$$

62. $$\begin{cases} \frac{x}{b + c} + \frac{y}{c + a} = b - a \\ \frac{x}{b + c} + \frac{z}{a + b} = a - c \\ \frac{y}{c + a} + \frac{z}{a + b} = c - b \end{cases}$$

63. $$\begin{cases} \frac{x}{b + c} + \frac{y}{c - a} = a + b \\ \frac{y}{c + a} + \frac{z}{a - b} = b + c \\ \frac{z}{a + b} + \frac{x}{b - c} = c + a \end{cases}$$

64. $$\begin{cases} \frac{x}{b + c} + \frac{y}{c - a} - \frac{z}{a - b} = 0 \\ \frac{x}{b - c} - \frac{y}{c - a} + \frac{z}{a + b} = 0 \\ \frac{x}{b + c} + \frac{y}{c - a} + \frac{z}{a + b} = 2a \end{cases}$$

---

65. $$\begin{cases} x : y : z : u = a : b : c : d \\ mx + ny + pz + qu = r \end{cases}$$

66. $$\begin{cases} x : y : z : u = 1 : 2 : 3 : 4 \\ 9x + 7y + 3z + 2u = 200 \end{cases}$$

67. $$\begin{cases} x : y = 2 : 1 \\ x : z = 3 : 1 \\ y : u = 3 : 1 \\ \frac{y^2 - z^2}{x - u} = 1 \end{cases}$$

68. $$\begin{cases} y + z = au \\ x + z = bu \\ x + y = cu \\ \frac{1 - x}{1 - y} = \frac{a}{b} \end{cases}$$

69. $$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y + 2z = 8 \\ z + 2u = 11 \\ u + 2x = 6 \end{cases}$$

70. $$\begin{cases} x + y = m \\ y + z = a \\ z + u = n \\ u - x = b \end{cases}$$

71. $$\begin{cases} y + z + u = a \\ z + u + x = b \\ u + x + y = c \\ x + y + z = d \end{cases}$$

72. $$\begin{cases} x + y - z = a \\ y + z - u = b \\ z + u - x = c \\ u + x - y = d \end{cases}$$

73. $\left| \begin{array}{l} x + 3y - z = 1 \\ y + 3z - u = 4 \\ z + 3u - x = 11 \\ u + 3x - y = 2 \end{array} \right|$

74. $\left| \begin{array}{l} 3x + y + z = 20 \\ x + 4y + 3u = 30 \\ 6x + z + 3u = 40 \\ 8y + 3z + 5u = 50 \end{array} \right|$

75. $\left| \begin{array}{l} y + z + 5u = 11 \\ z + x + 4u = 11 \\ x + y + 3u = 11 \\ x + z + 8y = 33 \end{array} \right|$

76. $\left| \begin{array}{l} x + y + z + u = 144 \\ x + 2y + 2z + 2u = 267 \\ x + 2y + 3z + 3u = 359 \\ x + 2y + 3z + 4u = 410 \end{array} \right|$

77. $\left| \begin{array}{l} x - 2y + 3z - u = 5 \\ y - 2z + 3u - x = 0 \\ z - 2u + 3x - y = 0 \\ u - 2x + 3y - z = 5 \end{array} \right|$

78. $\left| \begin{array}{l} x + y + z + u = 24 \\ x + 2y + 3z - 9u = 0 \\ 3x - y - 5z + u = 0 \\ 2x + 3y - 4z - 5u = 0 \end{array} \right|$

79. $\left| \begin{array}{l} x + y + z + u = 60 \\ x + 2y + 3z + 4u = 100 \\ x + 3y + 6z + 10u = 150 \\ x + 4y + 10z + 20u = 210 \end{array} \right|$

80. $\left| \begin{array}{l} x + y + z + u = 1 \\ 2x + 4y + 8z + 16u = 5 \\ 3x + 9y + 27z + 81u = 15 \\ 4x + 16y + 64z + 256u = 35 \end{array} \right|$

81. $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{3}z = 1 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{9}u = 1 \\ \frac{1}{6}x + \frac{3}{5}z - \frac{1}{2}u = 1 \\ \frac{3}{4}y - \frac{1}{5}z - \frac{1}{3}u = 0 \end{array} \right|$

82. $\left| \begin{array}{l} 2\frac{1}{2}x - 1\frac{2}{3}y + 2z = 4 \\ 1\frac{3}{4}x - 1\frac{1}{2}y + 3u = 1 \\ 2x - 3\frac{1}{2}z + u = 2 \\ 1\frac{1}{3}y - 4\frac{1}{2}z + 4u = 3 \end{array} \right|$

83. $\left| \begin{array}{l} 7x + 5y + z - u = a \\ 7y + 5z + u - x = b \\ 7z + 5u + x - y = c \\ 7u + 5x + y - z = d \end{array} \right|$

84. $\left| \begin{array}{l} 11x + 9y + z - u = a \\ 11y + 9z + u - x = b \\ 11z + 9u + x - y = c \\ 11u + 9x + y - z = d \end{array} \right|$

85. $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{9}z + \frac{1}{2}u = 53 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}u = 54 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z + \frac{1}{7}u = 56 \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{6}u = 57 \end{array} \right|$

86.
$$\begin{array}{|l|} x + 3y = 19 \\ y + 3z = 8 \\ z + 3u = 7 \\ u + 3v = 11 \\ v + 3x = 15 \end{array}$$

87.
$$\begin{array}{|l|} x + y = a \\ y + z = b \\ z + u = c \\ u + v = d \\ v + x = e \end{array}$$

88.
$$\begin{array}{|l|} 2x + y + z = 5 \\ 2y + z + u = 5 \\ 2z + u + v = 7 \\ 2u + v + x = 12 \\ 2v + x + y = 11 \end{array}$$

89.
$$\begin{array}{|l|} x + 2y - z = 12 \\ y + 2z - u = 10 \\ z + 2u - v = 8 \\ u + 2v - x = 1 \\ v + 2x - y = 9 \end{array}$$

90.
$$\begin{array}{|l|} x + y + z = a \\ y + z + u = b \\ z + u + v = c \\ u + v + x = d \\ v + x + y = e \end{array}$$

91.
$$\begin{array}{|l|} x - y + z = a \\ y - z + u = b \\ z - u + v = c \\ u - v + x = d \\ v - x + y = e \end{array}$$

92.
$$\begin{array}{|l|} x + y - u = a \\ y + z - v = b \\ z + u - x = c \\ u + v - y = d \\ v + x - z = e \end{array}$$

93.
$$\begin{array}{|l|} x + y - z = a \\ y + z - u = b \\ z + u - v = c \\ u + v - x = d \\ v + x - y = e \end{array}$$

94.
$$\begin{array}{|l|} y + z + u + v = a \\ z + u + v + x = b \\ u + v + x + y = c \\ v + x + y + z = d \\ x + y + z + u = e \end{array}$$

95.
$$\begin{array}{|l|} x + y + z - u = a \\ y + z + u - v = b \\ z + u + v - x = c \\ u + v + x - y = d \\ v + x + y - z = e \end{array}$$

96.
$$\begin{array}{|l|} y + z + u + v - x = a \\ z + u + v + x - y = b \\ u + v + x + y - z = c \\ v + x + y + z - u = d \\ x + y + z + u - v = e \end{array}$$

97.
$$\begin{array}{|l|} x + y + z - u - v = a \\ y + z + u - v - x = b \\ z + u + v - x - y = c \\ u + v + x - y - z = d \\ v + x + y - z - u = e \end{array}$$

98. $$\left|\begin{aligned} 2x - y - z + 2u - v &= 3a \\ 2y - z - u + 2v - x &= 3b \\ 2z - u - v + 2x - y &= 3c \\ 2u - v - x + 2y - z &= 3d \\ 2v - x - y + 2z - u &= 3e \end{aligned}\right|$$

99. $$\left|\begin{aligned} v - 2x + 3u - 2y + z &= a \\ x - 2y + 3v - 2z + u &= b \\ y - 2z + 3x - 2u + v &= c \\ z - 2u + 3y - 2v + x &= d \\ u - 2v + 3z - 2x + y &= e \end{aligned}\right|$$

100. $$\left|\begin{aligned} x + y + z + u + v &= 15 \\ x + 2y + 4z + 8u + 16v &= 57 \\ x + 3y + 9z + 27u + 81v &= 179 \\ x + 4y + 16z + 64u + 256v &= 453 \\ x + 5y + 25z + 125u + 625v &= 975 \end{aligned}\right|$$

C. Exponentialgleichungen mit zwei Unbekannten, welche sich als einfache Gleichungen lösen lassen.

1. $$\left|\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{22} \\ x - y &= 4 \end{aligned}\right|$$

2. $$\left|\begin{aligned} a^{2x-3} \cdot a^{3y-2} &= a^8 \\ 3x + 2y &= 17 \end{aligned}\right|$$

3. $$\left|\begin{aligned} a^{2x} &= a^{y+3} \\ b^{2y} &= b^{3x+1} \end{aligned}\right|$$

4. $$\left|\begin{aligned} a^{7x-9} \cdot a^2 &= a^{8y-2} \cdot a^9 \\ b^{3x-5} \cdot b^7 &= b^{4y-1} \cdot b^5 \end{aligned}\right|$$

5. $$\left|\begin{aligned} a^{5x-4y} \cdot a^{4x-5y} &= a^{10-x} \\ b^{5x+4y} \cdot b^{4x+5y} &= b^{9+y} \end{aligned}\right|$$

6. $$\left|\begin{aligned} a^{2x-3} \cdot a^{3y-5} &= a^{x+1} \cdot a^{y+1} \\ b^{3x-2} \cdot b^{5y-2} &= b^{4x-1} \cdot b^{3y-1} \end{aligned}\right|$$

7. $$\left|\begin{aligned} \sqrt{a^x} \cdot \sqrt[3]{a^y} &= a^8 \\ \sqrt[3]{b^x} \cdot \sqrt{b^y} &= b^7 \end{aligned}\right|$$

8. $$\left|\begin{aligned} \sqrt[3]{a^{2x-1}} \cdot \sqrt[4]{a^{3y-1}} &= a^8 \\ \sqrt[4]{b^{3x+5}} \cdot \sqrt[3]{b^{2y+1}} &= b^{10} \end{aligned}\right|$$

9. $$\left|\begin{aligned} \sqrt[x]{p} \cdot \sqrt[y]{p} &= \sqrt[6]{p^5} \\ \sqrt[x]{q^2} \cdot \sqrt[y]{q^3} &= q^2 \end{aligned}\right|$$

10. $$\left|\begin{aligned} \sqrt[x]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^y} &= a^3 \\ \sqrt[x]{b^6} \cdot \sqrt{b^y} &= b^5 \end{aligned}\right|$$

11. $$\left|\begin{aligned} \sqrt[x]{a^{4y}} \cdot a^{3x-10} &= a^{10} \cdot \sqrt[3]{a^2} \\ \sqrt[x]{b^{5y}} \cdot b^{2x-5} &= b^{10} \cdot \sqrt[3]{b} \end{aligned}\right|$$

12. $$\left|\begin{aligned} \sqrt[x]{a^3} &= \sqrt[y]{a^2} \cdot \sqrt[10]{a} \\ \sqrt[y]{b^3} &= \sqrt[x]{b^3} \cdot \sqrt[10]{b} \end{aligned}\right|$$

13. $a^x \cdot a^y = b$, $x - y = c$

14. $a^x \cdot b^y = m$, $x + y = n$

15. $a^x \cdot b^y = m$, $b^x \cdot a^y = n$

16. $a^x \cdot b^y = m$, $c^x \cdot d^y = n$

17. $5^x \cdot 8^y = 512000$, $x + y = 7$

18. $\sqrt[x]{777} \cdot \sqrt[y]{555} = 9{,}33525$, $7x + 5y = 2xy$

19. $3^x \cdot 4^y = 15552$, $4^x \cdot 5^y = 128000$

20. $5^x = 18{,}0690 \cdot 3^y$, $55^y = 18{,}2347 \cdot 6^x$

21. $\sqrt[x]{17} \cdot \sqrt[y]{19} = 7{,}429765$, $\sqrt[x]{7} \cdot \sqrt[y]{9} = 4{,}105798$

22. $\sqrt[x]{11} = 1{,}825209 \cdot \sqrt[y]{6}$, $\sqrt[y]{11} = 0{,}907936 \cdot \sqrt[x]{6}$

XXIV.

Anwendung der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

Ist es zur Auflösung einer eingekleideten Aufgabe erforderlich oder zweckmäßig, mehrere Größen als Unbekannte einzuführen, so muß man sich zuerst klar machen, welche Größen man am passendsten als Unbekannte ansieht, da es nicht immer am einfachsten zum Ziele führt, die verlangten Größen direkt zu suchen. Hat man die Unbekannten gewählt, so bezeichnet man sie mit den letzten Buchstaben des Alphabets: x, y, z u. s. w., je nach der Anzahl der Unbekannten. Zweitens hat man für diese zu bestimmenden Größen aus der Aufgabe so viele Bedingungen aufzusuchen, als Unbekannte da sind. Giebt die Aufgabe nicht so viele Bedingungen, so ist sie unbestimmt. Jede Bedingung in Worten ist aber in mathematischen Zeichen nichts als eine Gleichung. Man verfährt bei der Aufstellung der Gleichungen ganz so wie bei der Aufstellung einer Gleichung mit einer Unbekannten, d. h. man sieht die Unbekannten als schon gefunden an und thut, als ob man die Probe machen wollte, ob die für sie schon gleichsam als gefunden angenommenen Werte x, y, z u. s. w. auch den Bedingungen der Aufgabe genügten. Sind die Gleichungen aufgestellt, so hat man sie nach den Unbekannten aufzulösen. — Fast alle hierher gehörigen Aufgaben lassen sich auch sehr gut mit Hilfe von nur einer Unbekannten lösen, die meisten auch durch einfache Schlüsse ohne Anwendung der Algebra.

Erste Stufe.

1. Welche Zahlen haben zur Summe 1735 und zur Differenz 555?

2. Die Differenz zweier Zahlen ist $3\frac{1}{4}$, ihre Summe $9\frac{1}{4}$. Wie heißen dieselben?

3. Zwei Zahlen, von denen die eine um 0,909 größer ist als die andere, haben zu ihrer Summe 3,191. Wie heißen dieselben?

4. Wie heißen die beiden Zahlen, deren Summe = a und deren Differenz = b ist?

5. In Mecklenburg ist der längste Tag um 10 Stunden 2 Minuten länger als die kürzeste Nacht. Wie lang sind da der längste Tag und die kürzeste Nacht.

6. In einem Kreise mit dem Durchmesser d liegt ein Punkt P, von dem Mittelpunkt um p Fuß entfernt. Wie groß ist seine größte und seine kleinste Entfernung von der Peripherie?

7. Die Peripherien zweier koncentrischen Kreise haben zu ihrer größten Entfernung a, zu ihrer kleinsten Entfernung b Fuß. Wie groß sind die Radien der Kreise?

8. Es verkauft jemand eine Kuh und ein Schwein und erhält dafür 264 Mk. Hätte er für das Schwein 27 Mk. mehr und für die Kuh 27 Mk. weniger erhalten, so wäre der Preis für beide Tiere gleich hoch gewesen. Wie hoch kam jedes?

9. Zwei Zahlen sind in Summe 1000. Multipliziert man die erste mit 2, die zweite mit 3, so wird die Summe 2222. Wie heißen dieselben?

10. In zwei Körben liegen eine Menge Äpfel, in dem ersten noch 51 mehr als in dem zweiten. Lägen im ersten 3mal so viel, im zweiten 7mal so viel, als darin liegen, so lägen im ersten nur 5 Äpfel mehr als im zweiten. Wie viel Äpfel in jedem Korbe?

11. A hat noch 270 G. mehr als B. Hätte A 5mal so viel und B 11mal so viel, so hätte B 720 G. mehr als A. Wie viel hatte jeder?

12. A und B schießen zu einem Geschäfte eine Summe Geldes zusammen. Hätte A 1500 Mk. mehr gegeben, so wären ihre Einlagen gleich hoch gewesen. Hätte B 1500 Mk. mehr gegeben, so wäre seine Einlage doppelt so groß gewesen als die des A. Wie viel legte jeder ein?

13. Jemand hat zwei Börsen. Legt er 10 G. in die erste, so enthält sie erst halb so viel als die zweite; nimmt er die 10 G. aus der ersten wieder heraus und legt sie in die zweite, so ist diese dreimal so viel wert als die erste. Wie viel jede?

14. Jemand hat zwei Börsen. Nimmt er 17 Fr. aus der ersten und legt sie in die zweite, so ist in beiden gleich viel. Nimmt er aber 17 Fr. aus der zweiten und legt sie in die erste, so ist in dieser doppelt so viel als in der zweiten. Wie viel in jeder?

15. A sagt zu B: Gieb mir noch 49 Mk. ab, so habe ich ebenso viel als du. Gieb du mir lieber 49 Mk. ab, antwortete B, so habe ich gar dreimal so viel als du. Wie viel hatte jeder?

16. Jemand hat zwei kleine leichte einspännige Wagen und einen

Schimmel, den er bald vor dem einen, bald vor dem andern Wagen benutzt. Der erste Wagen ist mit dem Schimmel noch 3mal so viel wert als der zweite Wagen ohne Schimmel. Der zweite Wagen aber ist mit dem Schimmel noch um $\frac{1}{5}$ mehr als doppelt so viel wert als der erste ohne Schimmel. Wie hoch ist jeder Wagen gerechnet, wenn der Schimmel einen Wert von 210 Thlr. hat?

17. Jemand hat eine silberne und eine goldene Uhr; dazu zwei Ketten im Werte von 36 Mk. und 105 Mk. Die goldene Uhr mit der besseren Kette ist um die Hälfte mehr als zweimal so viel wert als die silberne mit der schlechteren Kette. Die goldene Uhr mit der schlechteren Kette ist jedoch nur 6 Mk. mehr wert als die silberne mit der besseren Kette. Welchen Wert hatte jede Uhr?

18. Welche Zahlen genügen folgenden Bedingungen: Vermehrt man die erste um a, so ist sie mmal so groß als die zweite; vermehrt man die zweite um b, so ist sie nmal so groß als die erste.

19. Welche Zahlen genügen folgenden Bedingungen: Die erste vermehrt um das mfache der zweiten giebt a; die zweite vermehrt um das nfache der ersten giebt b.

20. Welche Zahlen haben nun folgende Eigentümlichkeiten: Multipliziert man die erste mit 5 und die zweite mit 7, so ist ihre Summe gleich 100; multipliziert man die erste mit 7 und die zweite mit 5, so ist ihre Summe gleich 116.

21. Multipliziert man die erste von zwei Zahlen mit 3, die zweite mit 8, so ist ihre Summe 310; dividiert man die erste durch 3, die zweite durch 8, so giebt die Summe der Quotienten 10. Wie heißen die Zahlen?

22. Zwei Zahlen sind in Summe 350. Dividiert man die erste durch die zweite, so erhält man 8 zum Quotienten und 8 zum Rest. Wie heißen die Zahlen?

23. Ein Bruch, der dem Werte nach gleich $\frac{3}{4}$ ist, verwandelt sich seinem Werte nach in $\frac{5}{7}$, wenn man Zähler und Nenner um 6 vermindert. Wie heißt derselbe?

24. Welcher Bruch geht seinem Werte nach in $\frac{1}{2}$ über, wenn man Zähler und Nenner um 1 vermehrt; in $\frac{1}{4}$, wenn man Zähler und Nenner um 1 vermindert?

25. Welcher Bruch geht in $\frac{1}{6}$ über, wenn man Zähler und Nenner um 11 vermindert; in $\frac{1}{7}$, wenn man Zähler und Nenner um 12 vermindert?

26. Welcher Bruch verwandelt sich in $\frac{1}{2}$, wenn man Zähler und Nenner um 7 vermindert; und in sein Gegenteil (seinen reziproken Wert), wenn man den Zähler um 12 vermehrt, den Nenner um 12 vermindert?

27. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe und Quotient beide gleich 3 [a] sind.

28. Zwei Zahlen zu finden, deren Differenz und Quotient beide gleich 4 [a] sind.

29. Zwei Zahlen zu finden, deren Differenz, Summe und Produkt sich wie 1 : 2 : 3 verhalten.

30. Die Summe zweier Zahlen ist 30, die Differenz ihrer Quadrate 120. Welches sind die Zahlen?

31. Ein Vater und sein Sohn sind jetzt zusammen 80 Jahre. Vor 4 Jahren war der Vater gerade 8mal so alt als sein Sohn. Wie alt jeder?

32. Ein Vater ist jetzt 36 Jahr älter als sein Sohn. Nach 5 Jahren wird der Vater um $\frac{1}{4}$ mehr als 3mal so alt als sein Sohn sein. Wie alt jeder?

33. Ein Vater sprach zu seinem Sohn: Vor 4 Jahren war ich um $\frac{1}{5}$ mehr als 5mal so alt als du; nach 4 Jahren werde ich um $\frac{1}{3}$ mehr als 3mal so alt sein als du. Wie alt jeder?

34. Jemand kaufte 2 Reitpferde und 5 Wagenpferde und zahlte dafür 2600 G. Hätte er für ein Wagenpferd 20 G. mehr gegeben, so würde ein Reitpferd nur um den 4. Teil teurer gewesen sein als ein Wagenpferd. Wie viel kostete ein Reitpferd und wie viel ein Wagenpferd?

35. Es erhielten einmal 14 Gesellen und 3 Handlanger für eine Arbeitswoche an Arbeitslohn 72 G. Ein andermal erhielten bei demselben Arbeitslohn täglich 17 Gesellen und 5 Handlanger für 9 Tage 137 G. 25 Kr. Wie viel erhielt ein Gesell, und wie viel ein Handlanger den Tag?

36. Ein Landmann erhielt für 200 Scheffel Weizen und 52 Scheffel Roggen 1986 Mk. Was kostete der Scheffel jeder Kornart, wenn zu demselben Preise 140 Scheffel Weizen und 100 Scheffel Roggen 1740 Mk. kosten würden?

37. Jemand hat von seinem Kapital jährlich 2160 Mk. Zinsen. Hätte er dasselbe $\frac{1}{2}$ Pzt. höher ausgeliehen, so hätte er jährlich 240 Mk. Zinsen mehr. Wie groß das Kapital, und zu wie viel Prozent stand es?

38. Ein Kapital trägt jährlich a Mk. Zinsen. Stände es p Prozent höher, so trüge es d Mk. Zinsen mehr. Kapital und Prozent?

39. Jemand nimmt von seinem Kapital jährlich $1172\frac{1}{2}$ G. Zinsen ein. Er würde 1200 G. Zinsen voll haben, wenn das Kapital um 550 G. größer wäre. Kapital und Prozent?

40. Ein Kapital bringt jährlich a Mk. Zinsen. Es würde nur b Mk. Zinsen bringen, wenn es um m Mk. kleiner wäre. Kapital und Prozent?

41. Ein Mann hat zwei Kapitalien ausgeliehen, das eine zu 4, das andere zu 5 Prozent. Sie brachten ihm zusammen jährlich 3000 Mk. Zinsen. Hätte er jedes Kapital zu 1 Prozent höher ausgeliehen, so würde er jährlich 660 Mk. Zinsen mehr haben. Wie groß waren die Kapitalien?

42. Jemand hat 10000 G. und 15000 G. auf Zinsen und nimmt davon jährlich 1200 G. Zinsen ein. Hätte er das erste Kapital zum Zinsfuß des zweiten und das zweite zum Zinsfuß des ersten verliehen, so hätte er jährlich 25 G. weniger. Zu wie viel Prozent standen die Kapitalien?

43. A hat 7000 Mk. zu gewissen Prozenten auf Zinsen, B 8500

Mk. zu anderen Prozenten. Dadurch hat B jährlich eine Mehreinnahme von 135 Mk. Beide würden gleich viel Zinsen einnehmen, wenn bei den vorhandenen Prozenten A 11000 Mk. und B 9500 Mk. ausstehen hätte. Zu wie viel Prozent hatte jeder sein Geld ausstehen?

44. Jemand hat zwei Arten Silber. Es geben 5 Mark der ersten und 8 Mark der zweiten Art zusammengeschmolzen $13\frac{1}{4}$lötiges Silber; 3 Mark der ersten und 10 Mark der zweiten Art zusammengeschmolzen $13\frac{3}{4}$lötiges Silber. Wie viel lötig war jede Art?

45. Jemand hat zwei Arten Gold von verschiedenem Gehalt. Es geben 71 Pfund der ersten und 195 Pfund der zweiten Art 800haltiges Gold (s. Anmerk. S. 141); 171 Pfund der ersten und 95 Pfund der zweiten Art 900haltiges Gold. Wie viel haltig war jede Art?

46. Jemand hat zwei Arten Silber. Nimmt er 375 Pfund der ersten und 125 Pfund der zweiten Art zusammen, so erhält er 880haltiges Silber. Nimmt er aber 225 der ersten und 275 Pfund der zweiten Art, so wird die Mischung 850haltig. Wie viel haltig jede Art?

47. Jemand hatte 1000 Gramm Gold, 900haltiges und 750haltiges. Zusammen gaben sie 831haltiges Gold. Wie viel Gramm von jeder Art?

48. Jemand hat zwei Arten Spiritus. Es geben 23 Liter der ersten und 47 Liter der zweiten Art eine $84\frac{5}{7}$prozentige Mischung; 43 Liter der ersten und 17 Liter der zweiten Art eine $80\frac{5}{6}$prozentige Mischung. Wie viel Prozent hielt jede Art?

49. Jemand kaufte zwei Arten Zeug, von der ersten Art 7 Ellen, von der zweiten Art 11 Ellen und zahlt dafür 22 Mk. Hätte er umgekehrt von der ersten Art 11 und von der zweiten Art 7 Ellen gekauft, so hätte er für erstere 3 Mk. mehr zahlen müssen als für letztere. Wie hoch war der Preis einer Elle jeder Art?

50. Jemand hat zwei Arten Wein. Gießt er 3 Flaschen der ersten und 7 Flaschen der zweiten Art zusammen, so kommt die Flasche im Durchschnitt auf 2 Mk. Nimmt er umgekehrt 7 Flaschen von der ersten und drei Flaschen von der zweiten Art, so kommt die Flasche im Durchschnitt auf 2 Mk. 40 Pf. Wie hoch war der Preis einer Flasche von jeder Art?

51. Es kaufte jemand für 1500 Mk. Weizen und Roggen. Er bezahlt den Scheffel Weizen mit $7\frac{1}{2}$ Mk., den Scheffel Roggen mit 5 Mk. Hätte er 4 Wochen früher gekauft, so hätte er 61 Mk. gespart, denn damals war der Weizen 10 Pf., der Roggen 40 Pf. wohlfeiler. Wie viel Scheffel kaufte er von jeder Kornart?

52. Es machen 72 englische und 51 preußische Ellen zusammen 100 Meter; 48 englische und 84 preußische ebenfalls 100 Meter. Wie lang sind darnach eine englische und eine preußische Elle in Metern, und in welchem Verhältnis stehen eine englische und eine preußische Elle zu einander?

53. In Mecklenburg gab es bis dahin sieben verschiedene Scheffel: den Rostocker, den wismarschen, den Güstrower, den Schweriner, den parchimschen, den Grabower und den warenschen Scheffel. Die gewöhnlichsten waren der Rostocker und der parchimsche Scheffel. Wie viel

Liter hat jeder der beiden Scheffel, wenn 300 Rostocker Scheffel um 720 Liter größer sind als 200 parchimsche Scheffel, und 500 parchimsche Scheffel 700 Rostocker noch um 144 Liter übertreffen?

54. Welchen Wert haben ein Dollar und ein Rubel nach unserem Gelde, und in welchem Verhältnis stehen ein Dollar und ein Rubel zu einander, wenn 48 Rubel noch 3 Mk. mehr sind als 36 Dollar, und 1 Dollar und 1 Rubel zusammen gerade $7\frac{1}{2}$ Mk. sind?

55. Ein Reisender erzählte: Ich habe Deutschland, Frankreich, die Schweiz und Italien durchreist und im ganzen 3000 Mk. gebraucht und zwar in Deutschland 846 Mk., in Frankreich 931 Franken, in der Schweiz 880 Franken und in Italien 205 Ducato. Welchen Wert hat jede Münzsorte nach unserem Gelde, wenn 7 Ducato noch 8 Pf. mehr sind als 30 Franken?

Zweite Stufe.

1. Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist 840. Wäre jede Zahl um 3 größer, so wäre die Differenz der Quadrate 900. Welches sind die beiden Zahlen?

2. Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist 2080. Wäre die erste um 4 größer, die zweite um 4 kleiner, so wäre die Differenz der Quadrate 3120. Wie heißen die beiden Zahlen?

3. Zwei Zahlen geben ein gewisses Produkt. Wäre die erste um 2 größer, die zweite um 1 kleiner, so wäre das Produkt um 5 größer. Wäre die erste um 12 kleiner, die zweite um 12 größer, so würde das Produkt sich nicht ändern. Wie heißen die Zahlen?

4. Zwei Zahlen geben ein gewisses Produkt. Wäre die erste um 8 kleiner, die zweite um 25 größer, so würde das Produkt um 5000 größer sein. Wäre die erste um 12 größer, die zweite um 25 kleiner, so würde das Produkt um 4000 kleiner sein. Wie heißen die beiden Zahlen?

5. Eine Frau bringt Eier zu Markte und beabsichtigt, dieselben zu einem gewissen Preise zu verkaufen. Könnte sie das Ei einen Pfennig teurer verkaufen, als sie vorhatte, so würde sie keinen Schaden haben, wenn ihr unterwegs auch 12 Eier zerbrochen sein sollten. Müßte sie aber das Ei $\frac{1}{2}$ Pfennig wohlfeiler verkaufen, als sie gedachte, so hätte sie noch 12 Eier mehr haben müssen, um 12 Pf. mehr einzunehmen, als sie ursprünglich erwartete. Wie viel Eier hatte sie, und was sollte das Stück kosten?

6. Jemand hatte ein Kapital auf Zinsen. Wäre sein Kapital um 1000 Mk. größer, stände aber $\frac{1}{2}$ Prozent niedriger, so hätte er jährlich 35 Mk. Zinsen weniger. Wäre sein Kapital 500 Mk. kleiner, stände aber $\frac{1}{2}$ Prozent höher, so hätte er jährlich 50 Mk. Zinsen mehr. Kapital und Prozent?

7. A hat eine Summe Geldes auf Zinsen. B nimmt jährlich 150 G. weniger an Zinsen ein; er hat sein Geld zwar $\frac{1}{2}$ Prozent höher ausstehen, aber sein Kapital ist um 5000 G. kleiner als das des A. C nimmt 150 G. Zinsen mehr ein als A.; er hat zwar sein

Geld $\frac{1}{2}$ Prozent niedriger ausstehen, aber sein Kapital ist um 6250 G. größer als das des A. Wie groß war das Kapital des A., und zu wie viel Prozent stand es?

8. Jemand nimmt von seinem Gelde jährlich 1040 Mk. Zinsen ein. Die Hälfte des Kapitals trägt $\frac{1}{2}$ Prozent weniger als der 3. Teil und 1 Prozent weniger als der Rest. Hätte er sein Kapital durchschnittlich $\frac{1}{2}$ Prozent höher stehen, so würde er jährlich 120 Mk. Zinsen mehr haben. Kapital und Prozente?

9. Zwei Kapitalien, von denen das erste um 4000 G. größer ist als das zweite, stehen zu verschiedenen Prozenten, das zweite $\frac{1}{2}$ Prozent höher als das erste, und bringen gleich viel Zinsen. Stände das erste zu den Prozenten des zweiten und das zweite zu den Prozenten des ersten, so würde das erste 380 G. mehr bringen als das zweite. Wie groß waren die Kapitalien, und zu wie viel Prozent stand jedes?

10. Jemand hat zwei Kapitalien auf Zinsen, das erste zu $5\frac{1}{2}$, das zweite zu $4\frac{1}{2}$ Prozent. Stände das erste zu $4\frac{1}{2}$, das zweite zu $5\frac{1}{2}$ Prozent, so hätte er gerade so viel Zinsen unter 1000 Mk., als er jetzt darüber hat. Wie groß waren die Kapitalien, wenn das erste noch 291 Mk. mehr trug als das zweite?

11. Die bevölkertsten Gegenden in Europa sind Lancaster in England und Ostflandern in Belgien. Wäre ganz England so dicht bevölkert als Lancaster, und ganz Belgien so dicht als Ostflandern, so würde England noch um 1392000 Einwohner mehr haben als 12mal so viel als Belgien. Wäre aber Belgien so dicht bevölkert als Lancaster, und England so dicht als Ostflandern, so hätte England nur noch 2146000 Einwohner mehr als doppelt so viel als Belgien. Wie viel Einwohner kommen in Lancaster und wie viel in Ostflandern auf die Qadratmeile, wenn England zu 2740 und Belgien zu 540 Quadratmeilen gerechnet wird?

12. Verzehrte jeder Einwohner in Konstantinopel täglich 8 Piaster und jeder Einwohner in Petersburg täglich 40 Kopeken, so würde man in Konstantinopel täglich noch 9000 Mk. weniger gebrauchen, als in Petersburg. Würde aber jeder Einwohner in Konstantinopel täglich 40 Kopeken und jeder Einwohner in Petersburg täglich 8 Piaster verzehren, so würde der Unterschied in der Konsumtion noch 26,8mal so groß sein als im ersten Falle. Wie viel Einwohner hat darnach jede der beiden Städte, wenn 1 Rubel von 100 Kopeken zu $3\frac{1}{4}$ Mk., 1 Piaster zu $18\frac{1}{2}$ Pf. gerechnet wird?

13. Die Bewohner von Madrid sind mäßig und brauchen durchschnittlich nur wenig zu ihrem Unterhalte. Verzehrte jeder Einwohner täglich 1 Real weniger, so würde die Stadt täglich 64974 Mk. sparen, wenn sie auch 300 Einwohner mehr hätte. Verzehrte aber jede Person täglich 1 Real mehr, so würde sich die Konsumtion um 64596 Mk. steigern, wenn die Zahl der Einwohner auch um 600 geringer wäre. Wie viel Einwohner hat Madrid, und wie viel verzehrt jeder täglich im Durchschnitt, den Real zu 21 Pf. gerechnet?

14. Nach Moleschott bedarf ein arbeitender Mann an Nahrung

täglich 130 Gramm eiweißartige Stoffe, 84 Gramm Fett und 404 Gramm fettbildende Stoffe. Wie viel Fleisch und wie viel Reis wird hiernach ein arbeitender Mann täglich haben müssen, wenn Fleisch (von Säugetieren) 21 Prozent eiweißartige Stoffe und 3,6 Prozent Fett, Reis 5 Prozent eiweißartige und 85 Prozent fettbildende Stoffe enthält, 1 Gramm Fett $1\frac{2}{3}$ Gramm fettbildende Stoffe gleich gerechnet? Und wie hoch kommt ihm die Kost, wenn 1 Pfund (= 500 Gramm) Fleisch zu 50 Pf. und 1 Pfund Reis zu 30 Pf. gerechnet wird?

15. Wie viel Bohnen und wie viel Weizenbrot braucht nach der vorigen Aufgabe ein arbeitender Mann täglich, wenn Bohnen $22\frac{1}{2}$ Prozent eiweißartige Stoffe und 53 Prozent fettbildende Stoffe enthalten; Brot 9 Prozent eiweißartige und 47 Prozent fettbildende? Wie hoch kommt ihm diese Kost täglich, 1 Pfund Bohnen zu 5 Kr., 1 Pfund Brot zu 10 Kr. gerechnet?

16. Ein Wasserbehälter von 450 Kubikmeter kann durch zwei Röhren gefüllt werden. Wenn die erste Röhre 3 Minuten, die zweite 1 Minute offen ist, so fließen 40 Kubikmeter in den Behälter. Ist aber die erste Röhre 1 Minute, die zweite 7 Minuten offen, so fließen 60 Kubikmeter ein. Wie viel Kubikmeter liefert jede Röhre in einer Minute, und wie lange müssen beide Röhren zugleich geöffnet sein, wenn der Behälter voll werden soll?

17. Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden. Ist die erste 15 Minuten und die zweite ebenfalls 15 Minuten offen, so wird nur der 6. Teil des Behälters voll. Ist aber die erste 12 Minuten, die zweite 20 Minuten offen, so wird der 5. Teil des Behälters voll. In welcher Zeit kann der Behälter durch eine der beiden Röhren allein gefüllt werden, und in welcher Zeit wird der ganze Behälter voll, wenn beide zugleich offen sind?

18. Zwei Schreiber sollen eine Anzahl Bogen schreiben. Schreibt der erste 4 Tage und der zweite 3 Tage, so bringen sie die Hälfte fertig. Schriebe der erste 16 Tage und der zweite 6 Tage, so würden sie schon um die Hälfte mehr fertig bringen, als nötig ist. Wie lange mußte jeder allein an der Arbeit schreiben, und in welcher Zeit wurden sie fertig, wenn sie zugleich arbeiteten?

19. Zwei Maurer A und B sollen eine Mauer aufführen. Arbeiten sie zusammen, so werden sie in 12 Tagen fertig. Arbeitet A 2 Tage, B 3 Tage, so bringen sie in dieser Zeit $\frac{1}{5}$ der ganzen Mauer fertig. Wie lange braucht jeder allein zu der ganzen Mauer?

20. Auf der Peripherie eines Kreises, welche 100 Meter lang ist, bewegen sich zwei Körper, die alle 20 Sekunden zusammentreffen, wenn sie sich in derselben Richtung bewegen, alle 4 Sekunden, wenn sie sich in entgegengesetzter Richtung bewegen. Wie viel Meter legt jeder in der Sekunde zurück?

21. Auf der Peripherie eines Kreises, die 999 Meter lang ist, bewegen sich zwei Körper in derselben Richtung und treffen alle 37 Sekunden zusammen. Wie schnell ist die Bewegung eines jeden, wenn die des ersten noch 4mal so schnell ist als die des zweiten?

22. Aus dem Orte A geht jemand nach dem Orte B, der 6 Meilen von A entfernt ist. Als er 2 Meilen zurückgelegt hat, fährt ihm die Post vorbei, die ebenfalls die Tour von A nach B macht. Die Post hält sich 1 Stunde in B auf, kehrt zurück, begegnet dem Wanderer eine Meile von B und kommt 2 Stunden später in A an, als der Wanderer in B. Wie groß ist die Schnelligkeit des Fußgängers, und wie groß ist die der Post?

23. Aus zwei Städten, die 81 Kilometer von einander entfernt sind, gehen zwei Freunde aus, um sich zu treffen. Geht A 3 Stunden früher aus als B, so treffen sie 7 Stunden nach dem Ausgange von B zusammen. Geht B 3 Stunden früher aus, so treffen sie erst 8 Stunden nach dem Ausgange von A zusammen. Wie viel Meter macht jeder in einer Stunde?

24. Zwei Körper bewegen sich von zwei Punkten aus, die p Meter von einander entfernt sind. Fängt der erste d Stunden früher an sich zu bewegen, so treffen sie a Stunden nach dem Abgange des zweiten zusammen. Fängt der zweite d_1 Stunden früher an sich zu bewegen, so treffen sie a_1 Stunden nach dem Abgange des ersten zusammen. Wie viel Meter legt jeder in einer Stunde zurück?

25. Messing besteht aus Kupfer und Zink. Wie viel Kupfer und wie viel Zink muß in einer Komposition von 124 Pfund sein, wenn 89 Pfund Kupfer im Wasser 10 Pfund, 7 Pfund Zink im Wasser 1 Pfund, und die 124 Pfund Messing im Wasser 15 Pfund von ihrem Gewicht verlieren?*)

26. Eine Komposition von Blei und Zink, die 149 Pfund wiegt, verliert im Wasser 18 Pfund. Wie viel Pfund von jedem Metall sind darin, wenn $11\frac{1}{4}$ Pfund Blei im Wasser 1 Pfund, $6\frac{3}{4}$ Pfund Zink im Wasser ebenfalls 1 Pfund verlieren?

27. Eine Komposition von zwei Metallen verliert im Wasser p Pfund. Wie viel Pfund sind von jedem Metall darin, wenn a Pfund des ersten im Wasser m Pfund, b Pfund des zweiten im Wasser n Pfund verlieren und die ganze Masse q Pfund wiegt?

28. Nach Vitruv war die Krone des Königs Hiero von Syrakus 20 Pfund schwer und verlor im Wasser $1\frac{1}{4}$ Pfund. Wie viel Gold und wie viel Silber mußte sie enthalten, falls sie blos aus Gold und Silber bestand, wenn $19\frac{1}{4}$ Pfund Gold im Wasser 1 Pfund, $10\frac{1}{2}$ Pfund Silber ebenfalls 1 Pfund verlieren?

29. Ein Stein, dessen specifisches Gewicht 3 ist, ist mit einem Stück Korkholz verbunden, dessen specifisches Gewicht 0,24 ist. Wie schwer ist der Stein, und wie schwer muß das Stück Korkholz sein, wenn das Ganze 115 Pfund wiegt und gerade so schwer als Wasser ist, d. h. im Wasser weder aufsteigt, noch untersinkt?

30. Ein junger Mann hat sich, um leichter schwimmen zu können, einen Korkgürtel gemacht. Er wiegt mit demselben 135 Pfund und

*) Die Rechnung wird in diesem Fall und in den folgenden nicht ganz mit der Wirklichkeit stimmen, da beim Zusammenschmelzen immer eine Veränderung in der Dichtigkeit der Metalle eintritt nnd durch den Schmelzprozeß immer ein Teil des Metalles verloren geht, von unedlen mehr, von edlen weniger.

Das specifische Gewicht wird gefunden, in dem man das Gewicht durch den Gewichtsverlust dividirt.

ist im Wasser gerade so schwer, daß er den Kopf, der 12 Pfund wiegt, außerhalb des Wassers haben kann, sonst aber vom Wasser weder höher gehoben wird, als nötig ist, noch in demselben untersinkt, die Arme und Füße also nur zu seiner Fortbewegung verwenden kann. Wie viel wog er, und wie viel der Korkgürtel, wenn 120 Pfund seines unter Wasser getauchten Körpers nur 3 Pfund wogen und das specifische Gewicht des Korkholzes 0,24 ist?

31. Zwei zweiziffrige Zahlen werden mit denselben Ziffern geschrieben. Setzt man die erste Zahl vor die zweite und dividiert die entstandene Zahl durch die zweite, so giebt das 58, Rest 9. Setzt man die zweite Zahl vor die erste und dividiert durch die erste, so giebt das 176. Wie heißen die Zahlen?

32. Welche zweiziffrige Zahl wächst zu 100 an, wenn man sie vermehrt um die erste Ziffer und das Vierfache der zweiten, und deren Ziffern in umgekehrter Reihenfolge erscheinen, wenn man sie um 36 vermehrt?

33. Ein Rechenmeister giebt seinen Schülern zwei Zahlen auf zu multiplizieren und läßt dann die Probe machen, d. h. das Produkt durch die kleinere Zahl dividieren. Ein Schüler erhält bei der Division 542 zum Quotienten und 75 als Rest, ein anderer 540 zum Quotienten und 55 als Rest, ein dritter 507 zum Quotienten und 60 als Rest. Der erste hatte eine 1 an einer Stelle im Sinne zu behalten vergessen, der zweite eine 2 an der links folgenden Stelle, der dritte eine 3 an der dann folgenden Stelle. Wie hießen die aufgegebenen Zahlen?

34. Es giebt eine zweiziffrige und eine vierziffrige Zahl von folgender Beschaffenheit: Dividiert man die erste in die zweite, so geht das 204mal und läßt 1 zum Rest; macht man aus beiden Zahlen eine Zahl, indem man die erste links vor die zweite setzt, so ist diese Zahl gerade halb so groß als die Zahl, welche man erhält, wenn man umgekehrt die zweite links vor die erste setzt. Wie heißen die beiden Zahlen?

35. Es giebt zwei dreiziffrige Zahlen, deren Summe 999 beträgt. Bildet man aus beiden Zahlen eine Zahl, indem man die erste vor die zweite setzt, so wird diese Zahl dadurch versechsfacht, daß man die beiden Zahlen umkehrt, also die zweite vor die erste setzt. Wie heißen die beiden Zahlen?

36. Zwei andere Zahlen genügen der ersten Bedingung der vorigen Aufgabe; die beiden Zahlen, welche man aus der Zusammensetzung der beiden fraglichen Zahlen erhält, verhalten sich jedoch wie 2 : 5. Welches sind die Zahlen?

37. Zwei Zahlen sind in Summa 15390, die erste ist einziffrig, die zweite fünfziffrig. Setzt man die erste vor die zweite, so ist die so entstandene Zahl noch 4mal so groß als die Zahl, welche man erhält, wenn man die erste hinter die zweite setzt. Wie heißen die beiden Zahlen?

37_1. Zerlege die in XXXII Nr. 50. angegebenen Brüche in Partialbrüche. Die Nenner sind zu dem Zwecke in Faktoren zu zerlegen; diese werden die Nenner der gesuchten Brüche.

---

38. Die drei größten Städte auf der skandinavischen Halbinsel sind Stockholm, Christiania und Gotenburg. Wie viel Einwohner hat jede Stadt, wenn St. und Ch. zusammen 206000, Ch. und G. zusammen 126000, G. und St. zusammen 200000 Einwohner haben?

39. Der Ducato in Italien, der Rubel in Rußland und der Dollar in Amerika sind Münzen, welche unsern Thaler an Wert ein wenig übertreffen. Der Rubel kommt ihm am nächsten, doch erreicht weder der Ducato noch der Dollar den Wert von $1\frac{1}{2}$ Thlr. Wie hoch kommen diese Münzen nach unserem Gelde, wenn 1 Ducato und 1 Rubel zusammen 6 Mk. 66 Pf., 1 Ducato und 1 Dollar zusammen 7 Mk. 54 Pf., 1 Rubel und 1 Dollar zusammen 7 Mk. 32 Pf. ausmachen?

40. Die Summen je zweier von drei Zahlen sind der Reihe nach a, b und c. Wie heißen dieselben?

41. Wenn man von drei Zahlen die Summen je zweier bildet und von diesen Summen die jedesmalige dritte Zahl abzieht, so erhält man der Reihe nach a, b und c. Wie heißen die drei Zahlen?

42. Es giebt drei Zahlen, die sich verhalten wie 2 : 3 : 4 und deren Summe 999 ist. Wie heißen dieselben?

43. Ein Vater sprach zu seinen beiden Söhnen Otto und Max: Ich bin jetzt gerade doppelt so alt als ihr beide zusammen. Vor zwei Jahren war ich 4 mal so alt als du, Otto, und vor vier Jahren war ich 6 mal so alt als du, Max. Wie alt war jeder?

44. Ein Landmann hat drei Kornböden. Auf dem ersten liegen 81 Scheffel Weizen, 15 Scheffel Roggen und 75 Scheffel Hafer. Auf dem zweiten liegen 12 Scheffel Weizen, 40 Scheffel Roggen und 10 Scheffel Hafer. Auf dem dritten liegen 21 Scheffel Weizen, 25 Scheffel Roggen und 60 Scheffel Hafer. Wie viel kostet der Scheffel von jeder Getreideart, wenn alles Getreide auf dem ersten Boden 900 Mk., auf dem zweiten 300, auf dem dritten 450 Mk. wert ist?

45. Eine Frau zahlt ein Mal für 7 Pfund Kaffee und 5 Pfund Zucker 10 Mk., ein ander Mal für 3 Pfund Kaffee und 10 Pfund Reis 6 Mk., ein drittes Mal für 7 Pfund Zucker und 6 Pfund Reis ebenfalls 6 Mk. Was kostete das Pfund von jeder Ware, wenn die Preise bei den Einkäufen dieselben waren?

46. Die Piaster in der Türkei, die Realen in Spanien und die Drachmen in Griechenland sind kleine Münzsorten, von denen keine den Wert von 80 Pf. erreicht. Welchen Wert haben dieselben nach unserem Gelde, wenn 4 Piaster gleich 3 Realen, 7 Drachmen gleich 29 Piaster sind und 12 Realen noch um 10 Pf. mehr als 3 Piaster und 3 Drachmen zusammen?

47. Die Mark Courant in Hamburg, der Milreis in Brasilien, die britische Rupie in Ostindien sind Münzen, von denen keine den Wert eines Thalers erreicht, jede aber größer als 1 Mk. ist. Wie hoch steht jede nach unserem Gelde, wenn 7 Mark Crt. gleich 4 Milreis sind, 10 Milreis noch 10 Pf. mehr als 11 Rupien, 1 Mark Crt. und 11 Milreis und 3 Rupien zusammen 30 Mk. sind?

48. In Süddeutschland schenkte man bis dahin die Flüssigkeiten nach Maßen aus, die aber in Baiern, Würtemberg und Baden verschieden waren. Sie verhalten sich in diesen Ländern (genähert) wie 4 : 7 : 6. Außerdem sind 10 Maß in Baiern und 4 Maß in Würtemberg und 2 Maß in Baden zusammen 20 Liter. Wie viel Liter hält demnach jedes Maß?

49. Jemand hat drei Kapitalien, die zusammen 50000 Mk. ausmachen, der Reihe nach zu $4\frac{1}{2}$, 5 und $5\frac{1}{2}$ Prozent stehen und die ihm jährlich zusammen 2475 Mk. Zinsen bringen. Hätte er sie der Reihe nach zu $5\frac{1}{2}$, 5 und $4\frac{1}{2}$ Prozent ausgeliehen, so hätte er alle Jahre 25 Mk. weniger. Wie groß waren die Kapitalien?

50. Jemand hat 11100 G., die in drei Posten von 3100 G., 2700 G. und 5300 G. zu verschiedenen Prozenten ausstehen. Der erste und zweite Posten bringen zusammen 346 G. Zinsen, der zweite und dritte zusammen 414, der dritte und erste zusammen 409 G. Zu wie viel Prozent standen die einzelnen Summen?

51. A hat sein Geld zu 4 Prozent, B zu 5, C zu 6 Prozent ausstehen. Wie viel Geld hat jeder, wenn A und B zusammen 1592 Mk., B und C zusammen 1766 Mk., C und A zusammen 1638 Mk. Zinsen einnehmen?

52. Drei Maurer sollen eine Mauer aufführen. A und B werden in 12 Tagen fertig, B und C in 20 Tagen, A und C in 15 Tagen. Wie viel Zeit wird jeder allein gebrauchen, und in welcher Zeit werden alle drei damit fertig werden, wenn sie gemeinschaftlich arbeiten?

53. Ein Behälter kann durch drei Röhren gefüllt werden: durch die erste und zweite in 72 Minuten, durch die zweite und dritte in 2 Stunden, durch die erste und dritte in $1\frac{1}{2}$ Stunden. In welcher Zeit wird er durch jede allein voll, und in welcher Zeit durch alle drei, wenn sie zugleich offen sind?

54. Die drei Kräfte A, B und C können gesondert oder in Verbindung mit einander eine Wirkung oder Arbeit M zu Stande bringen: B und C allein in a Tagen, C und A allein in b Tagen, A und B allein in c Tagen. In wie viel Tagen wird jede Kraft allein die Wirkung M hervorbringen, und in welcher Zeit alle drei zusammen?

55. Aus den Örtern A und B gehen zwei Fußgänger einander entgegen und treffen, indem jeder stündlich eine gewisse Anzahl von Metern zurücklegt, nach 4 Stunden zusammen. Machte jeder 900 Meter weniger in der Stunde, so träfen sie erst nach 5 Stunden zusammen. Gingen sie aber hinter einander her statt einander entgegen, so hätte sich nach 4 Stunden die anfängliche Entfernung erst um $\frac{1}{7}$ vermindert. Wie viel Meter legt jeder in der Stunde zurück, und wie weit ist es von A nach B?

56. Von den Örtern A und B gehen zwei Freunde zu gleicher Zeit aus und treffen nach 6 Stunden zusammen. Ginge der erste eine Stunde früher aus als der zweite, und machte jeder in der Stunde 1800 Meter mehr, als er macht, so würden sie 4 Stunden nach dem Abgange des zweiten zusammentreffen. Ginge der zweite 2 Stunden früher aus als der erste und machte jeder in der Stunde 50 Meter mehr, als er macht, so würden sie 5 Stunden nach dem Abgange des ersten zusammentreffen. Wie viel Meilen legt jeder in der Stunde zurück und wie weit ist es von A nach B?

57. Auf der Peripherie eines Kreises bewegen sich zwei Körper, die alle 30 Sekunden zusammentreffen, wenn sie sich in derselben Richtung bewegen; alle 10 Sekunden, wenn sie sich in entgegengesetzter Richtung

bewegen. Sind sie im zweiten Falle noch 30 Meter von einander entfernt, so werden sie nach 3 Sekunden wieder 30 Meter von einander entfernt sein. Wie schnell bewegen sich die Körper, und wie lang ist die Peripherie des Kreises?

58. Drei Zahlen sind in Summe gleich 100. Dividiert man die erste in die zweite, so erhält man 5 zum Quotienten und 1 als Rest. Dividiert man die zweite in die dritte, so erhält man dasselbe Resultat. Wie heißen die drei Zahlen?

59. Es giebt drei Zahlen von folgender Beschaffenheit. Vermindert man die erste und zweite um je drei, so verhalten sie sich wie 1 : 2; vermindert man die erste und dritte um je 4, so verhalten sie sich wie 1 : 3; vermehrt man die zweite und dritte um je 5, so verhalten sie sich wie 3 : 4. Welche Zahlen sind das?

60. Eine Zahl besteht aus drei Ziffern. Bringt man die Ziffern in die entgegengesetzte Reihenfolge, so wird die Zahl um $\frac{1}{3}$ weniger als 3mal so groß. Subtrahiert man die erste Ziffer von der zweiten, so erhält man die dritte Ziffer. Multipliziert man die erste Ziffer mit 9, die zweite mit 6, die dritte mit 4, so ist die Summe dieser Produkte gerade 100. Wie heißt die Zahl?

61. Eine Zahl wird mit drei Ziffern geschrieben. Sie wird um 99 größer, wenn man die Ziffern in die entgegengesetzte Reihenfolge bringt. Schneidet man die erste Ziffer vorn ab und setzt sie rechts wieder an, so wird die Zahl um 189 größer. Schneidet man die letzte Ziffer rechts ab und setzt sie vorn wieder an, so verhält sich die so entstandene Zahl zur ursprünglichen wie 4 : 3. Wie heißt die Zahl?

62. Eine dreiziffrige Zahl wird gesucht. Die Quersumme derselben ist 18. Sie ist durch 11 teilbar, ohne daß die Summe der ersten und dritten Ziffer die Zahl 11 erreicht. Bringt man die Ziffern in die entgegengesetzte Reihenfolge, so hat man die ursprüngliche Zahl durch $4\frac{1}{2}$ dividiert.

63. Es sollen drei Zahlen gesucht werden. Addiert man die Summe je zweier zur doppelten dritten, so erhält man der Reihe nach die Summen 60, 54 und 50. Wie heißen die drei Zahlen?

64. Es sollen drei Zahlen gesucht werden. Addiert man je eine zur dreifachen Summe der beiden andern, so erhält man der Reihe nach die Summen 19, 27 und 31. Wie heißen die Zahlen?

64_1. Zerlege die in XXXII Nr. 51. und 52. angegebenen Brüche in Partialbrüche.

---

65. Je drei Seiten eines Vierecks geben der Reihe nach eine Länge von 130, 135, 147 und 152 Fuß. Wie lang ist jede derselben?

66. Es sollen fünf Zahlen gesucht werden. Addiert man jede zur vierfachen Summe der vier übrigen, so erhält man der Reihe nach 43, 49, 55, 61 und 64.

67. Es sollen sieben Zahlen gesucht werden. Vermehrt man die Summe von je sechs um die jedesmalige doppelte siebente Zahl, so erhält man der Reihe nach 48, 45, 44, 42, 40, 39 und 38.

68. Jemand hat drei Körbe mit Äpfeln. Er legte aus dem ersten in jeden der beiden andern so viel, als schon darin sind; dann aus dem zweiten in jeden der beiden andern so viel, als jetzt darin sind; endlich aus dem dritten ebenso in jeden der beiden andern so viel, als schon darin sind. Schließlich sind in jedem Korbe 80 Äpfel. Wie viel waren anfangs in jedem Korbe?

69. Drei Personen, A, B und C spielten mit einander. Jeder setzte jedesmal den vierten Teil seines Geldes, und sie gewannen alle der Reihe nach, erst A, dann B, dann C. Da hatte jeder noch 27 G. Wie viel hatte jeder anfangs gehabt?*)

70. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn jeder Spieler jedesmal den 10. Teil seines Geldes setzt und schließlich nach dem dritten Spiele jeder noch 7 Mk. 29 Pf. hat?

71. Beim Pharao muß der Bankhalter, wenn er verliert, jedem Spieler so viel geben, als er gesetzt hat, erhält aber den Einsatz des Spielers, wenn er gewinnt. Es spielen drei Herren Pharao, haben der Reihe nach die Bank, jeder Spieler setzt den 5. Teil seines Geldes, und jedesmal verliert der Bankhalter. Schließlich hatte jeder noch 216 Fr. Wie viel hatte jeder anfangs?

72. Es seien vier Spieler vorhanden. Sie haben der Reihe nach die Bank. Jeder Spieler setzt den dritten Teil seines Geldes und jedesmal verliert der Bankhalter. Schließlich hatte jeder noch 256 Fr. Wie viel hatte jeder anfangs?

73. Es sind sechs Spieler. Sie haben der Reihe nach die Bank. Jeder Spieler setzt sein ganzes Geld, und jedesmal verliert der Bankhalter. Schließlich haben alle gleich viel, jeder 64 Fr. Wie viel hatte jeder anfangs?

74. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn jeder Spieler nur die Hälfte seines Geldes setzt und schließlich noch 729 Fr. hat?

XXV.

Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

Eine **quadratische Gleichung** oder eine Gleichung vom **zweiten Grade** ist eine Gleichung, welche die Form $ax^2 + bx = c$ hat oder sich auf diese Form bringen läßt. Hat sie diese Form nicht, so muß man sie zum Zweck der Auflösung erst umformen und sie auf jene Form, die **Normalform einer quadratischen Gleichung**, bringen. Kommt demnach x in einer Klammer vor, so muß man die Klammer auflösen;

---

*) Bei dieser und den folgenden Aufgaben ist es wichtig, daß man die Summe kennt. Bei einer größeren Anzahl von Unbekannten würden sonst die Gleichungen sehr verwickelt und die Aufstellung derselben umständlich. Mit Benutzung der Summe bleibt jedesmal in dem Ausdruck für das Geld jedes Spielers nur eine Unbekannte, und schließlich enthält jede Gleichung auch nur eine Unbekannte.

kommt x im Nenner vor, so muß man den Nenner fortschaffen; kommt x unter einer Wurzel vor, so muß man es von der Wurzel befreien. Es dürfen nach den genannten Reduktionen nur Glieder mit x^2, mit x und ohne x übrig bleiben. Kommen auch Glieder mit x^3 vor, so ist die Gleichung kubisch oder eine Gleichung vom dritten Grade, also nicht mehr quadratisch. Kommt kein Glied mit x^2, kommen nur Glieder mit x und ohne x vor, so ist die Gleichung nur vom ersten Grade oder eine einfache Gleichung. Kommen in der quadratischen Gleichung keine Glieder mit x vor, sondern nur Glieder mit x^2 und ohne x, so ist die Gleichung rein quadratisch und hat die Form $ax^2 = c$. Von dieser Art sind in der ersten Stufe die Gleichungen 1.—57., in der zweiten Stufe die Gleichungen 1.—14. Die Schwierigkeit ihrer Auflösung kann nur darin liegen, sie erst auf die Form $ax^2 = c$ zu bringen. Hieraus folgt dann

$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}, \text{ oder } x_1 = +\sqrt{\frac{c}{a}} \text{ und } x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}}$$

Die Gleichung $ax^2 + bx = c$, in der das zweite Glied nicht fehlt, heißt eine vollständige quadratische Gleichung und wird gelöst mit Hülfe der quadratischen Ergänzung. Man erhält

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}}, \text{ oder } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}.$$

Diese Formeln sind zu merken, damit man von jeder quadratischen Gleichung, welche die Form $ax^2 + bx = c$ hat, das Resultat ohne Rechnung hinschreiben kann. Ist $a = 1$, so hat man für die Gleichung $x^2 + bx = c$ die Lösung

$$x = -\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + c}.$$

Jede quadratische Gleichung liefert zwei Werte für x, welche der Gleichung genügen. Bei der reinen quadratischen unterscheiden sich dieselben nur durch das Zeichen. Diese beiden Werte von x nennt man die Lösungen oder die Wurzeln der Gleichung. Die Wurzeln einer Gleichung sind nicht zu verwechseln mit den Wurzeln eines Grades, der Quadratwurzel, der Kubikwurzel u. s. w.

Für die Gleichung $x^2 + ax + b = 0$, in welcher x^2 keinen Koefficienten hat und positiv ist, ist $+b$ gleich dem Produkt der beiden Wurzeln, $-a$ gleich der Summe derselben. Kann man daher $+b$ in zwei Faktoren zerlegen, deren Summe $-a$ ist, oder $-a$ in zwei Summanden, deren Produkt $+b$ ist, so hat man die Wurzeln der Gleichung, braucht dieselbe also nicht weiter aufzulösen. Dies kann Anwendung finden bei den Gleichungen 146., 147., 155., 159. u. s. w.

Hat eine Gleichung einen Faktor x, so muß sie auch eine Wurzel 0 haben; denn $x = 0$ genügt der Gleichung. Die andere Wurzel findet man, wenn man den Faktor x ausscheidet und die übrig bleibende Gleichung nach x auflöst. Beispiele geben Nr. 113., 115., 116., 117. u. v. a.

Hat überhaupt eine Gleichung einen Faktor, der x enthält, z. B.

$x - 1$, $x - a$ u. dgl., so kann man die Gleichung zerlegen. Man setzt den Faktor $= 0$, löst diese Gleichung nach x auf und ebenso die nach Ausscheidung des Faktors noch übrig bleibende Gleichung, die dann nur noch vom ersten Grade sein kann. Die so erhaltenen Werte von x sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung. Beispiele liefern Nr. 109., 114., 120. u. s. w. — Durch Zerlegung lassen sich Gleichungen, deren Lösung auf dem gewöhnlichen Wege nicht so einfach, bisweilen verwickelt ist, oft sehr leicht lösen. Hierher gehören in der ersten Stufe Nr. 163.—166., 201. und in der zweiten Stufe Nr. 32., 33., 72., 73., 110. u. s. w.

Erkennt man, daß einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ durch $x = \alpha$ genügt wird, mithin α eine Wurzel der Gleichung ist, so ist $x - \alpha$ ein Faktor der linken Seite. Man hat dann $(x - \alpha)\left(ax - \frac{c}{\alpha}\right) = 0$, und $x = \frac{c}{a\alpha}$ muß die andere Wurzel der Gleichung sein. Hierher gehörige Beispiele sind Nr. 153. 154. 176. u. s. w.

Bei manchen Gleichungen ist es nicht zweckmäßig, die Unbekannte x direkt zu suchen, sondern zunächst einen Ausdruck, in dem dieselbe vorkommt und daraus x selbst. So setzt man in Nr. 28. (zweite Stufe) $a - x = t(b - x)$ und bestimmt zunächst t. Aehnlich in den folgenden Nummern, wie in vielen andern. Bei Nr. 86., 87., 88., 89., 96. u. s. w. (zweite Stufe) setzt man bezüglich x^{-3}, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt{37 - x}$ u. s. w. $= t$. Ist t gefunden, so ergiebt sich auch x leicht.

Um die Wurzeln quadratischer Gleichungen mit großen Zahlen zu berechnen, wie sie in der zweiten Stufe Nr. 143 ff. vorkommen, wird allgemein die trigonometrische Lösung empfohlen. Aber selbst mit Hilfe solcher Tafeln, in denen die Differenzen für die Sekunden angegeben sind, ist, falls die Wurzeln der Gleichung selber, nicht ihre Logarithmen gefunden werden sollen, die direkte Lösung nicht nur kürzer, sondern auch viel einfacher als die trigonometrische und verdient daher unbedingt den Vorzug. Hat die Gleichung die Form $ax^2 + bx + c = 0$, so dividiere man durch a und berechne $\frac{b}{a} = 2p$ und $\frac{c}{a} = q$ auf drei Decimalen. Dann hat man

$$x = -p \pm \sqrt{p^2 - q},$$

wo p^2 mittelst abgekürzter Multiplikation und danach $\sqrt{p^2 - q}$ nach Anhang 2. zu berechnen sind. — Will man Logarithmen anwenden, so folgt aus der Gleichung $ax^2 + 2bx + c = 0$, wo die 2 im 2. Gliede zu beachten ist,

$$x = -\frac{b}{a} \pm \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{ac}{b^2}}.$$

dann ist $\frac{ac}{b^2}$ logarithmisch zu berechnen, danach, wenn $1 - \frac{ac}{b^2} = r$ gefunden ist, die Glieder $\frac{b}{a}$ und $\frac{b}{a}\sqrt{r}$ ebenfalls logarithmisch.*)

*) Bei Anwendung von Tafeln ohne die Differenzen für die Sekunden ist die trigonometrische Auflösung mindestens doppelt so lang und umständlich, als

Unter den hier als quadratische Gleichungen aufgeführten Aufgaben kommen auch Gleichungen des dritten, des vierten Grades und noch höherer Grade vor, deren Auflösung aus der Lehre von den quadratischen Gleichungen leicht folgt, also keine besonderen Hilfsmittel erfordert.

Von den kubischen Gleichungen gehören hierher zunächst diejenigen, welche einen Faktor x und mithin eine Wurzel 0 haben. Scheidet man diesen Faktor aus, so bleibt noch eine quadratische Gleichung zu lösen übrig. Gleichungen dieser Art sind Nr. 197.—201. in der ersten Stufe und 39.—42. in der zweiten Stufe.

Von den kubischen Gleichungen lassen sich ferner diejenigen als quadratische behandeln, welche einen leicht erkennbaren Faktor haben, der x enthält. Setzt man diesen Faktor = 0, so erhält man eine Wurzel der Gleichung. Scheidet man den Faktor aus, so liefert die noch bleibende quadratische Gleichung die beiden andern Wurzeln. Von dieser Art sind die meisten Aufgaben der zweiten Stufe von Nr. 43. bis 78. Bei den symmetrischen kubischen Gleichungen Nr. 56. bis 67. braucht man nur die Glieder mit gleichen Coefficienten zu vereinigen, um sofort den Faktor $x \pm 1$ zu erkennen. — Bei manchen Aufgaben tritt der Faktor der Gleichung nicht so leicht hervor, man muß die Gleichung erst umformen (Nr. 75.—78.).

Von den Gleichungen des 4. Grades oder den biquadratischen Gleichungen gehören hierher zunächst diejenigen, welche von der Form $ax^4 - bx^2 + c = 0$ sind. Man findet hier x^2, wie man in der einfachen quadratischen Gleichung x findet, und erhält

$$x = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Dieser Ausdruck läßt sich in ein Aggregat von zwei Wurzeln auflösen, wenn ac ein Quadrat ist*)

Zweitens gehören von den Gleichungen des 4. Grades hierher diejenigen, welche die Form $(ax^2 + bx)^2 + m(ax^2 + bx) + p = 0$ haben oder sich auf diese Form bringen lassen. Man sucht zunächst $ax^2 + bx = t$ und dann x selber. So sucht man z. B. in Nr. 122. u. 125. (zweite Stufe) bezüglich zunächst $2x^2 - 3x + 1$ und $\sqrt{x^2 - 8x + 40}$ — Allgemein läßt eine Gleichung des 4. Grades

$$(1) \qquad x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

diese Art der Lösung zu, wenn $c = \frac{1}{2}a(b - \frac{1}{4}a^2)$ ist. Dies Kriterium aber jedesmal anzuwenden ist umständlich. Man ergänzt die beiden ersten Glieder zum Quadrat, schreibt also die Gleichung (1) $(x^2 + \frac{1}{2}ax)^2 - \frac{1}{4}a^2x^2 + bx^2 + cx + d = 0$. Soll die Glei-

---

die hier gegebene, und mit der Länge der Rechnung wächst die Unsicherheit derselben in gleichem Grade. Schon die Herstellung richtiger trigonom. Formeln macht einem Schüler Mühe und ist daher meistens wenig zuverlässig.

*) Vgl. des Verfassers „Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung" S. 36 und 55.

chung die verlangte Form annehmen, so muß $-\frac{1}{4}ax^2 + bx^2 + cx = m(x^2 + \frac{1}{2}ax)$ sein, wo m von a, b und c abhängt. — In vielen Fällen braucht man eine Gleichung gar nicht erst auf die Form (1) zu bringen; man übersieht leicht, welche Größe man als neue Unbekannte einzuführen hat, um eine quadratische Gleichung zu erhalten. — Die Wurzeln dieser Gleichungen des 4. Grades haben die Eigentümlichkeit, daß sie sich zu zweien so ordnen lassen, daß die Summe des einen Paares gleich der Summe des andern Paares ist (s. Algebr. Gleich. S. 94 Nr. 365.).

Drittens lassen sich die symmetrischen Gleichungen des 4. Grades, welche die Form haben

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0,$$

als quadratische Gleichungen lösen. Man vereinigt die Glieder mit gleichen Koefficienten, schreibt $a(x^2 \pm 1)^2 \mp 2ax^2$ statt $ax^4 + a$ und dividiert die ganze Gleichung durch x^2, so hat man

$$a\left(\frac{x^2 \pm 1}{x}\right)^2 + b\left(\frac{x^2 \pm 1}{x}\right) + c \mp 2a = 0.$$

Diese Gleichung ist quadratisch für $\frac{x^2 \pm 1}{x}$ und liefert zunächst diese Größe, mithin auch x. Anstatt $\frac{x^2 + 1}{x}$ zunächst zu suchen, kann man auch $\frac{x+1}{x-1} = t$, also $x = \frac{t+1}{t-1}$ setzen und t zunächst bestimmen. Bald ist dies, bald jenes einfacher (A. G. S. 107 ff). — Hierher gehören auch die symmetrischen Gleichungen des 5. Grades Nr. 134. ff., zweite Stufe. Nachdem man den Faktor $x \pm 1$ ausgeschieden hat, bleibt noch eine symmetrische Gleichung des 4. Grades.

Die Auflösung der Gleichungen der dritten Stufe kann zwar fast durchweg auf einem der beiden zuletzt angegebenen Wege geschehen, läßt sich aber meistens einfacher einrichten. Die Methoden, nach welchen man hier auf die einfachste und kürzeste Weise zum Resultat gelangt, findet man in des Verfassers „Algebr. Gleichungen".

Erste Stufe.

1. $x^2 = 169$	2. $x^2 = 0{,}074529$
3. $x^2 = a$	4. $x^2 = 5$
5. $ax^2 = b$	6. $19x^2 = 5491$
7. $\frac{ax^2}{b} = \frac{c}{d}$	8. $\frac{5}{7}x^2 = 560$
9. $ax^2 - b = c$	10. $17x^2 - 7 = 418$
11. $9x^2 + 4x^2 = 325$	12. $mx^2 = a^2 - nx^2$
13. $13x^2 - 19 = 7x^2 + 5$	14. $ax^2 - b = cx^2 + d$

15. $\frac{15x}{2} = \frac{810}{3x}$ 16. $\frac{2x}{3} = \frac{1050}{7x}$

17. $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$ 18. $(3x + 1{,}5)(3x - 1{,}5) = 54$

19. $(a + x)(b - x) + (a - x)(b + x) = 0$

20. $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$

21. $(7 + x)(9 - x) + (7 - x)(9 + x) = 76$

22. $(2x + 7)(5x - 9) + (2x - 7)(5x + 9) = 1874$

23. $(1 + x)(2 + x)(3 + x) + (1 - x)(2 - x)(3 - x) = 120$

24. $(2x + 3)(3x + 4)(4x + 5) - (2x - 3)(3x - 4)(4x - 5) = 184$

25. $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$

26. $(a + bx)(b - ax) + (b + cx)(c - bx) + (c + ax)(a - cx) = 0$

27. $(a + x)(b - x) + (1 + ax)(1 - bx) = (a + b)(1 + x^2)$

28. $(a + 5b + x)(5a + b + x) = 3(a + b + x)^2$

29. $(9a - 7b + 3x)(9b - 7a + 3x) = (3a + 3b + x)^2$

30. $\frac{a + x}{a - x} = \frac{x + b}{x - b}$ 31. $\frac{ax + b}{a + bx} = \frac{cx + d}{c + dx}$

32. $\frac{a - x}{1 - ax} = \frac{1 - bx}{b - x}$ 33. $\frac{25 + x}{9 + x} = \frac{13 + x}{47 - x}$

34. $\frac{35 + 3x}{1 + x} = \frac{x - 55}{3x - 53}$ 35. $\frac{x - 2}{3x + 14} = \frac{3(8 - x)}{28 - x}$

36. $\frac{x + 5a + b}{x - 3a + b} = \frac{x - a + b}{a - x + 3b}$

37. $\frac{3a - 2b + 3x}{a - 2b + x} = \frac{x - 7a + 8b}{3x - 5a + 4b}$

38. $\frac{7a - b + x}{7b - a + x} = \frac{a(a + 5b + x)}{b(5a + b + x)}$

39. $\frac{x + a - b}{x - a + b} = \frac{a(x + a + 5b)}{b(x + 5a + b)}$

40. $\frac{17a + b - x}{a + 17b - x} = \frac{a^2(a + 17b + x)}{b^2(17a + b + x)}$

41. $\frac{(1 + 3x + 5x^2)(x^2 + 3x + 5)}{(1 + 2x + 3x^2)(x^2 + 2x + 3)} = \frac{9}{4}$

42. $\frac{1}{1 + \sqrt{1 - x}} + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - x}} = \frac{2x}{9}$

43. $\sqrt{13 + x} + \sqrt{13 - x} = 6$

44. $\sqrt{x + 4} - \sqrt{5x - 24} = \frac{6}{\sqrt{x + 4}}$

45. $\sqrt{x+a} - \sqrt{5x-3a-4b} = \frac{2b}{\sqrt{x+a}}$

46. $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \frac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}$

47. $\sqrt{3a-2b+2x} - 2\sqrt{3a-2b-2x} = \frac{a+2b+2x}{\sqrt{3a-2b+2x}}$

48. $2\sqrt{5+2x} - \sqrt{13-6x} = \sqrt{37-6x}$

49. $\sqrt{14x-11} + \sqrt{3(2x-1)} = 2\sqrt{2x+1}$

50. $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$

51. $\sqrt[3]{76+x} + \sqrt[3]{76-x} = 8$

52. $\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a}{b}$

53. $\frac{\sqrt{a-x}}{x} - \frac{\sqrt{a-x}}{a} = \sqrt{x}$

54. $\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} = \frac{a}{b}$

55. $\frac{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3-x^2}} = \frac{a}{b}$

56. $\frac{\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{a}{b}$

57. $\frac{\sqrt[4]{1+x^2}+\sqrt[4]{1-x^2}}{\sqrt[4]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x^2}} = \frac{a}{b}$

---

58. $x^2 + 2ax = b$

59. $x^2 - 2ax + b = 0$

60. $x^2 + 2x = 63$

61. $x^2 - 8x + 15 = 0$

62. $x^2 + 6x = 91$

63. $x^2 - 40x + 111 = 0$

64. $x^2 + 2x = 1$

65. $x^2 - 6x + 4 = 0$

66. $x^2 - 2x + 2 = 0$

67. $x^2 - 10x + 32 = 0$

68. $x^2 + ax = b$

69. $x^2 - ax + b = 0$

70. $x^2 + x - 56 = 0$

71. $x^2 - 11x + 10 = 0$

72. $x^2 - 7x = 30$

73. $x^2 - 17x + 60 = 0$

74. $x^2 + x = 1$

75. $x^2 - 7x + 11\frac{1}{2} = 0$

76. $x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$

77. $x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$

78. $x^2 - \frac{x}{3} = 8$

79. $x^2 + \frac{x}{7} = 50$

80. $x^2 - 1\frac{1}{2}x = 1$

81. $x^2 + 38\frac{2}{3} = 12\frac{7}{12}x$

82. $ax^2 + 2bx + c = 0$

83. $ax^2 - 2bx = c$

84. $3x^2 - 22x + 35 = 0$

85. $91x^2 - 2x = 45$

86. $15x^2 + 21 = 44x$

87. $14x^2 - 33 = 71x$

88. $25x^2 + 2 = 30x$
89. $15x^2 + 527 = 178x$
90. $ax^2 - bx = c$
91. $ax^2 + bx + c = 0$
92. $6x^2 + x = 15$
93. $6x^2 - 13x + 6 = 0$
94. $7x^2 + 25x = 12$
95. $6x^2 + 7x = 3$
96. $6x^2 + 5x = 56$
97. $20x^2 + x = 12$
98. $7x^2 + 9x = 100$
99. $3x^2 - 7x = 16$
100. $1\frac{1}{5}x^2 + 10 = 7x$
101. $6x^2 + 26\frac{1}{4} = 25\frac{1}{2}x$
102. $x^2 + 6{,}51 = 5{,}2x$
103. $x^2 + 20{,}3 = 9{,}3x$
104. $x^2 + 4{,}3x = 27{,}3$
105. $2x^2 + 15{,}9 = 13{,}6x$
106. $14x^2 + 45{,}5x + 36{,}26 = 0$
107. $7{,}82x^2 - 33{,}1x + 35 = 0$
108. $10{,}85x^2 + 21{,}91x - 10{,}5 = 0$

---

109. $(x - 7)(x - 5) = 0$
110. $(x + 3)(x - 13) = 0$
111. $(x - a + b)(x - b + c) = 0$
112. $(x - \sqrt{7})(x - \sqrt{5}) = 0$
113. $x^2 - ax = 0$
114. $(x - 1)^2 = a(x^2 - 1)$
115. $x^2 + (a - x)^2 = (a - 2x)^2$
116. $a^2(b - x)^2 = b^2(a - x)^2$
117. $(a - x)(x - b) + ab = 0$
118. $(a - x)^2 + (x - b)^2 = a^2 + b^2$
119. $(a - x)(x - b) = (a - x)(c - x)$
120. $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$
121. $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$
122. $(x - 6)(x - 5) + (x - 7)(x - 4) = 10$
123. $(2x - 17)(x - 5) - (3x + 1)(x - 7) = 84$
124. $(2x - 5)^2 - (x - 6)^2 = 80$
125. $(33 + 10x)^2 + (56 + 10x)^2 = (65 + 14x)^2$
126. $2x + \frac{1}{x} = 3$
127. $\frac{x}{4} + \frac{25}{x} = 3$
128. $\frac{x + 11}{x + 3} = \frac{2x + 1}{x + 5}$
129. $\frac{7x - 5}{10x - 3} = \frac{5x - 3}{6x + 1}$
130. $\frac{5x - 1}{9} + \frac{3x - 1}{5} = \frac{2}{x} + x - 1$
131. $\frac{5x - 7}{9} + \frac{14}{2x - 3} = x - 1$

132. $\frac{16-x}{4}-\frac{2(x-11)}{x-6}=\frac{x-4}{12}$

133. $\frac{6x+4}{5}-\frac{15-2x}{x-3}=\frac{7(x-1)}{5}$

134. $\frac{2x+2}{18}+\frac{12}{x+4}=\frac{x-4}{4}+\frac{x-2}{6}$

135. $\frac{7}{2x-3}+\frac{5}{x-1}=12$ 136. $\frac{7-x}{11-2x}+\frac{4x-5}{3x-1}=2$

137. $\frac{x^3-10x^2+1}{x^2-6x+9}=x-3$ 138. $\frac{x^2-x+3}{x^2-4x+5}=\frac{x+3}{x-1}$

139. $\frac{3x}{2}-\frac{3x-20}{18-2x}=2+\frac{3x^2-80}{2(x-1)}$

140. $\frac{21}{x}-\frac{10}{x-2}-\frac{4}{x-3}=0$

141. $\frac{5+x}{3-x}-\frac{8-3x}{x}=\frac{2x}{x-2}$

142. $\frac{2x-3}{x-2}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{3x+11}{x+1}$

143. $\frac{2x-1}{x-2}+\frac{3x+1}{x-3}=\frac{5x-14}{x-4}$

144. $\frac{4}{x-1}+\frac{1}{x-4}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-3}$

145. $\frac{5}{7-x}-\frac{4}{6-x}=\frac{3}{5-x}-\frac{2}{4-x}$

---

146. $ax^2-(a^2+1)x+a=0$

147. $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$

148. $a^2(a-x)^2=b^2(b-x)^2$

149. $(a-x)^2+(x-b)^2=(a-b)^2$

150. $(a-x)(b-x)=2(a-b)^2$

151. $(a-x)^2-(a-x)(x-b)+(x-b)^2=(a-b)^2$

152. $(n-p)x^2+(p-m)x+(m-n)=0$

153. $(a+b+c)x^2-(2a+b+c)x+a=0$

154. $(ax-b)(c-d)=(a-b)(cx-d)x$

155. $x^2-(a+b)x+(a+c)(b-c)=0$

156. $x^2-(a-m)x=(a-1)(m-1)$

157. $x^2 - 2(a - b)x = (a + c - b)(b + c - a)$

158. $abx^2 - (a+b)x + 1 = 0$ 159. $4x^2 - 4ax + a^2 - b^2 = 0$

160. $m^2x^2 - m(a - b)x - ab = 0$

161. $x^2 + 2ab(a^2 + b^2) = (a + b)^2 x$

162. $(a^2 - b^2)(x^2 + 1) = 2(a^2 + b^2)x$

163. $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$ 164. $a + x = \frac{1}{a} + \frac{1}{x}$

165. $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ 166. $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$

167. $(3x - 5)^2 - 8(3x - 5) + 7 = 0$

168. $(2x - a)^2 = b(2x - a) + 2b^2$

169. $(3x - 2a + b)^2 + 2b(3x - 2a + b) = a^2 - b^2$

170. $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$ 171. $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$

172. $\frac{(a - x)^2 + (x - b)^2}{(a - x)^2 - (x - b)^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

173. $\frac{ax^2 - bx + c}{\alpha x^2 - \beta x + \gamma} = \frac{c}{\gamma}$ 174. $\frac{ax^2 - bx + c}{\alpha x^2 - \beta x + \gamma} = \frac{a - b + c}{\alpha - \beta + \gamma}$

175. $\frac{(a-x)^3 + (x-b)^3}{(a - x) - (x - b)} = \frac{a^3 - b^3}{a + b}$ 176. $\frac{(a-x)^3 + (x-b)^3}{(a-x)^2 + (x-b)^2} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2}$

177. $\frac{(a-x)^3 + (x-b)^3}{(a-x)^2 + (x-b)^2} = a - b$ 178. $\frac{ax + b}{bx + a} = \frac{mx - n}{nx - m}$

---

179. $3x - 7\sqrt{x} + 2 = 0$ 180. $\sqrt{x + 5} = x - 1$

181. $x + \sqrt{x + 3} = 4x - 1$ 182. $1 - 6x + \sqrt{5(x + 4)} = 0$

183. $2x - \sqrt{2x - 1} = x + 2$ 184. $3x - 4\sqrt{x - 7} = 2(x + 2)$

185. $x - 10 = \frac{2}{3}(x - 1) - \sqrt{2x - 1}$

186. $a + \sqrt{a^2 - x^2} = x$ 187. $\sqrt{a^2 - x} + \sqrt{b^2 + x} = a + b$

188. $\sqrt{a - x} + \sqrt{x - b} = \sqrt{a - b}$

189. $\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \sqrt{a + b - 2x}$

190. $\sqrt{a - bx} + \sqrt{c - dx} = \sqrt{a + c - (b + d)x}$

191. $\sqrt{x + 3} + \sqrt{2x - 3} = 6$

192. $\sqrt{4x - 3} - \sqrt{x - 4} = 4$

193. $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{8 - 2x} = \sqrt{x - 1}$

194. $\sqrt{4x - 3} + \sqrt{5x + 1} = \sqrt{15x + 4}$

195. $\sqrt{x + 7 - \sqrt{5(x - 2)}} = 3$

196. $\sqrt{2x + 1 - 2\sqrt{2x + 3}} = 1$

197. $x\sqrt{x - a} + a\sqrt{x + a} = \sqrt{x^3 + a^3}$

198. $2x^2 + a\sqrt{b^2 + 4bx} = a(b + 2x)$

199. $\sqrt{a(x - b)} + \sqrt{b(x - a)} = x$

200. $\sqrt{1 + ax} - \sqrt{1 - ax} = x$

201. $\frac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}} = \frac{a}{x}$

202. $\frac{(a - x)\sqrt{a - x} + (x - b)\sqrt{x - b}}{\sqrt{a - x} + \sqrt{x - b}} = a - b$

203. $\frac{(x - a)\sqrt{x - a} + (x - b)\sqrt{x - b}}{\sqrt{x - a} + \sqrt{x - b}} = a - b$

204. $\sqrt{\frac{a - x}{b + x}} + \sqrt{\frac{b + x}{a - x}} = c$

205. $\frac{\sqrt{a - x} + \sqrt{x - b}}{\sqrt{a - x} - \sqrt{x - b}} = \sqrt{\frac{a - x}{x - b}}$

206. $\sqrt{x} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

207. $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} - \frac{(x + a)^2}{a(x - a)}$

208. $\frac{\sqrt{a - bx} + \sqrt{c - mx}}{\sqrt{a - bx} + \sqrt{nx - d}} = \frac{\sqrt{a - bx} - \sqrt{c - mx}}{\sqrt{a - bx} - \sqrt{nx - d}}$

---

209. Wenn $x + m$ und $x + n$ die Faktoren des Ausdrucks $x^2 + ax + b$ sind, man also hat $x^2 + ax + b = (x + m)(x + n)$, welches sind dann die Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$?

210. Welche Beziehung haben die Größen m und n zu den Größen a und b?

211. Wie kann man aus den Zeichen von a und b auf die von m und n schließen?

212. Um die Größen m und n für den Ausdruck $x^2 + ax + b$

zu finden, hat man b in zwei Faktoren zu zerlegen, deren Summe a ist; oder a in zwei Summanden, deren Produkt b ist. Bald liegt das eine, bald das andere näher. Bringe die Gleichungen 60.—63. und 70.—73. auf 0, wenn dies nicht schon geschehen ist, zerlege den linken Teil der Gleichung in Faktoren, d. h. suche die Größen m und n und bestimme so die Wurzeln der Gleichungen.

213. Wenn umgekehrt x_1 und x_2 die Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ sind, welches sind dann die Größen, die oben mit m und n bezeichnet sind, und welches sind darnach die Faktoren des Ausdrucks $x^2 + ax + b$?

214. Welche Beziehung haben die Wurzeln der Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ zu den Größen a und b?

215. Wie heißen die Gleichungen in ihrer einfachsten Form, deren Wurzeln sind:

1. 5 und 6	2. 7 und -8	3. $3\frac{1}{3}$ und $2\frac{2}{3}$
4. $4\frac{1}{2}$ und $-3\frac{1}{2}$	5. 0,7 und $-0,3$	6. a und b
7. $a+b$ und $a-b$	8. $1+\sqrt{3}$ u. $1-\sqrt{3}$	9. $2+\sqrt{-1}$ u. $2-\sqrt{-1}$
10. $a+b\sqrt{2}$ und $a-b\sqrt{2}$	11. $3a+2b\sqrt{5}$ und $3a-2b\sqrt{5}$	

Man kann zur Bildung dieser Gleichungen nach 213. oder nach 214. verfahren. Der erste Weg giebt mehr Einsicht in die Natur der Wurzeln, der letztere ist der kürzere.

216. Unter welchen Bedingungen sind die Wurzeln der Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ beide positiv, unter welchen beide negativ, unter welchen haben sie entgegengesetzte Zeichen? Wann ist im letzten Fall, abgesehen vom Zeichen, die positive größer, wann die negative?

217. Unter welchen Bedingungen sind die Wurzeln der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ reell, unter welchen imaginär, unter welchen rational und unter welchen irrational?

218. Wie findet man die Faktoren des Ausdruckes $ax^2 + bx + c$, wenn sie nach dem in 212. Gesagten nicht so leicht zu erkennen sind?

219. Welche Bedingung muß stattfinden, damit der Ausdruck $ax^2 + bx + c$ sich in Faktoren zerlegen läßt? und wann sind diese Faktoren rational?

220. Gieb die Bedingungen an, unter welchen die Zerlegung folgender Ausdrücke möglich oder unmöglich, rational oder irrational ist:

$ax^2 + bx - c$	$ax^2 - bx + c$
$ax^2 + 2bx + c$	$ax^2 - 2bx - c$
$x^2 + bx + c$	$x^2 + bx - c$
$x^2 - 2bx + c$	$x^2 - 2bx - c$

221. Bringe die Gleichungen 84.—87. und 92.—97. auf 0, wenn dies nicht schon geschehen ist, und zerlege mit Hülfe der Wurzeln der Gleichung die linke Seite der Gleichung in Faktoren.

222. Untersuche, ob sich folgende Ausdrücke in Faktoren zerlegen lassen, und, wenn dies möglich ist, ob die Faktoren rational oder irrational sind. Sind sie rational, so gieb dieselben nach 212. direkt an, oder indirekt mit Hilfe der Auflösung der betreffenden quadratischen Gleichung.

1. $x^2 - 7x + 12$ 2. $x^2 + 13x + 30$

3. $x^2 - 9x + 15$ 4. $x^2 + 12x + 27$

5. $x^2 - 3x - 20$ 6. $x^2 + 2x - 35$

7. $x^2 + 4ax + 3a^2$ 8. $x^2 - 6ax - 30a^2$

9. $a^2 - 7ab + 6b^2$ 10. $a^2 + 3ab + 6b^2$

11. $a^2 - ab - 2b^2$ 12. $a^2 + ab - 2b^2$

13. $3x^2 + 4x + 5$ 14. $2x^2 - 7x + 3$

15. $3x^2 - 17ax + 10a^2$ 16. $4x^2 - 3ax - 2a^2$

17. $6a^2 - 5ab - 6b^2$ 18. $2a^2 - 5ab - 3b^2$

Zweite Stufe.

1. $\left(\frac{5a - 3b + x}{5b - 3a + x}\right)^2 = \frac{7a - 9b + 3x}{7b - 9a + 3x}$

2. $\left(\frac{a + 5b + x}{5a + b + x}\right)^2 = \frac{a + 17b + x}{17a + b + x}$

3. $\left(\frac{x - 3a + 5b}{x + 5a - 3b}\right)^2 = \frac{5x - 11a + 5b}{5x + 5a - 11b}$

4. $a\sqrt{m + x} - b\sqrt{m - x} = \sqrt{m(a^2 + b^2)}$

5. $\sqrt{2a - b + 2x} - \sqrt{10a - 9b - 6x} = 4\sqrt{a - b}$

6. $2\sqrt{2a + b + 2x} + \sqrt{10a + b - 6x} = \sqrt{10a + 9b - 6x}$

7. $\sqrt{(a + x)(x + b)} + \sqrt{(a - x)(x - b)} = 2\sqrt{ax}$

8. $\frac{\sqrt{(a + x)(x + b)} + \sqrt{(a - x)(x - b)}}{\sqrt{(a + x)(x + b)} - \sqrt{(a - x)(x - b)}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

9. $\sqrt{1 - x^2} = 2ab - \frac{a\sqrt{1 - a^2} + b\sqrt{1 - b^2}}{a\sqrt{1 - b^2} + b\sqrt{1 - a^2}}$

10. $\frac{(\sqrt[4]{a + x} + \sqrt[4]{a - x})^2}{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}} = c$

11. $\frac{\sqrt[3]{(a + x)^2} + \sqrt[3]{a^2 - x^2} + \sqrt[3]{(a - x)^2}}{\sqrt[3]{(a + x)^2} - \sqrt[3]{a^2 - x^2} + \sqrt[3]{(a - x)^2}} = c$

12. $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{c}$ 13. $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}=c$

14. $\frac{(a+x)\sqrt[3]{a-x}-(a-x)\sqrt[3]{a+x}}{\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}}=c$

---

15. $\frac{2a+m}{a+x}-\frac{2a-m}{a-x}=\frac{2a}{m}$ 16. $a^2-\frac{a^2-b^2}{2x-x^2}=\frac{b^2(x+2)}{x-2}$

17. $(a^2-b^2)x^2+ab=(a^2+b^2)x$

18. $(a^2-b^2)x^2-2(a^4-b^4)x+a^6-b^6=0$

19. $abx^2-(a+b)(ab+1)x+(ab+1)^2=0$

20. $abx^2-(a+b)(ab-1)x+(a^2-1)(b^2-1)=0$

21. $x^2-(a^2-b^2)x=(a+b)x-(a+b)^2(a-b)$

22. $a(a-b)-b(a-c)x+c(b-c)x^2=0$

23. $(a+b+x)(b+c+x)=(3a-b-x)(3a-2b+c-2x)$

24. $(3a-5b+x)(5a-3b-x)=(7a-b-3x)^2$

25. $(3a-b+x)(2a+b-x)=(5a+3b-3x)^2$

26. $(3a-b+3c-2x)(2b+x)=(2a+2c-x)^2$

27. $9(a-b+c-x)^2+4(2a+2c-x)^2=(3a+b+3c-x)^2$

28. $(a-x)^2+(b-x)^2=\frac{5}{2}(a-x)(b-x)$

29. $(a-x)^2-5(a-x)(x-b)+6(x-b)^2=0$

30. $2(a-x)^2-\frac{17}{6}(a-x)(x-b)+(x-b)^2=0$

31. $10(a-x)^2+7(b-x)^2=16\frac{3}{4}(a-x)(b-x)$

32. $\frac{a-x}{x-b}+\frac{x-b}{a-x}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

33. $\frac{a-x}{b+x}-\frac{b+x}{a-x}=\frac{m}{n}-\frac{n}{m}$

34. $\frac{2a-(1+a^2)x}{1+a^2-2ax}=\frac{2b+(1+b^2)x}{1+b^2+2bx}$

35. $\frac{(a-x)^2+(a-x)(x-b)+(x-b)^2}{(a-x)^2-(a-x)(x-b)+(x-b)^2}=\frac{49}{19}$

36. $\frac{\sqrt{(a-x)^2}+\sqrt{(a-x)(x-b)}+\sqrt{(x-b)^2}}{\sqrt{(a-x)^2}-\sqrt{(a-x)(x-b)}+\sqrt{(x-b)^2}}=\frac{7}{3}$

37. $\frac{(\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x})^2}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}=\frac{100}{21}$ 38. $\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}}=\frac{b}{x}$

---

39. $\sqrt{a+b+x} - \sqrt{a+b-x} = \frac{x}{\sqrt{a}}$

40. $\sqrt{2a+b+x} - \sqrt{2a+b-x} = \frac{x}{\sqrt{a+b}}$

41. $\sqrt{3a-2b+2x} - \sqrt{3a-2b-2x} = \frac{2x}{\sqrt{a}}$

42. $\sqrt{\frac{a+x}{b+x}} + \sqrt{\frac{a-x}{b-x}} = 2\sqrt{\frac{a}{b}}$

43. $x^3 - 1 = 0$ 44. $x^3 + 1 = 0$

45. $x^3 = a^3$ 46. $x^3 = -a^3$

47. $x^3 - 5 = 0$ 48. $x^3 + 7 = 0$

49. $(a-x)^3 = (x-b)^3$ 50. $a^3(b+x)^3 = b^3(a+x)^3$

51. $a^3(a-x)^3 = b^3(x-b)^3$ 52. $a^3(x-b)^3 = b^3(a-x)^3$

53. $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{7}{9} \cdot \frac{x+1}{x-1}$ 54. $\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+4} = \frac{49}{76} \cdot \frac{x+2}{x-2}$

55. $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{a^2}{b^2}$

56. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

57. $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

58. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

59. $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$

60. $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$

61. $2x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0$

62. $6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 = 0$

63. $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$

64. $12x^3 + 13x^2 - 13x - 12 = 0$

65. $10x^3 - 19x^2 - 19x + 10 = 0$

66. $35x^3 - 39x^2 - 39x + 35 = 0$

67. $72x^3 - 217x^2 + 217x - 72 = 0$

68. $\frac{a\sqrt{x-b} + b\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}} = x$ 69. $\frac{a\sqrt{a-x} + b\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}} = x$

70. $\frac{a+x}{b+x} = \frac{a-x}{b-x} + \frac{x}{c}$

71. $\frac{a+x}{b+x} + \frac{c+x}{d+x} = \frac{a-x}{b-x} + \frac{c-x}{d-x}$

72. $\frac{a-x}{3(a-b)} + \frac{3(a-b)}{a-x} = \frac{b-x}{2(a-b)} + \frac{2(a-b)}{b-x}$

73. $\frac{a-x}{a-b} + \frac{a-b}{a-x} = \frac{b-x}{6(a-b)} + \frac{6(a-b)}{b-x}$

74. $\frac{\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{x-b}} = \frac{a-b}{a+b-2x}$

75. $\frac{\sqrt{9a-4b-3x} + \sqrt{5a-4b+x}}{\sqrt{9a-4b-3x} - \sqrt{5a-4b+x}} = \frac{2a}{a-x}$

76. $\frac{\sqrt{17a+b-x} + \sqrt{a+17b-x}}{\sqrt{17a+b-x} - \sqrt{a+17b-x}} = \frac{7a-b+x}{2(5a+b-x)}$

77. $\frac{\sqrt{3a-4b+5x} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{3a-4b+5x} - \sqrt{x-a}} = \sqrt{\frac{x+a}{2(x-b)}}$

78. $\frac{\sqrt{a+3b+x} + \sqrt{9a+11b-7x}}{\sqrt{a+3b+x} - \sqrt{9a+11b-7x}} = \sqrt{\frac{3a+b-x}{2(a+3b-x)}}$

---

79. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 80. $x^4 - 21x^2 = 100$

81. $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$ 82. $(x^2-5)^2 + (x^2-1)^2 = 40$

83. $10x^4 - 21 = x^2$ 84. $6x^4 - 35 = 11x^2$

85. $a^4 + b^4 + x^4 = 2a^2b^2 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2$

86. $8x^{-6} + 999x^{-3} = 125$ 87. $2(\sqrt{x} - 3)^2 - 3 = \sqrt{x}$

88. $(\sqrt[3]{x} - 1)^2 + \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x}$ 89. $(\sqrt[4]{x} - 3)(\sqrt[4]{x} - 4) = 12$

90. $\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + x = 0$ 91. $2x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{3}{3}} = 0$

92. $x^{\frac{3}{2}} + 8x^{\frac{1}{2}} = 9x$ 93. $x^{\frac{5}{12}} + x^{\frac{2}{3}} = 20x^{\frac{1}{6}}$

94. $\frac{\sqrt{x} - a}{b} = \frac{x}{(a+b)^2}$ 95. $\frac{\sqrt{x} + 2a - b}{a} = \frac{3a - b}{\sqrt{x}}$

96. $x + 5\sqrt{37 - x} = 43$ 97. $1215 + x = 49\sqrt{615 + x}$

98. $x + 2a\sqrt{2(a^2 + b^2) - x} = 3a^2 + b^2$

99. $x + (a + b)\sqrt{a^2 - ab + b^2 - x} = a^2 + b^2$

100. $x^4 - ax^2 + b^2 = 0$

101. $x^4 - 4(a + b)x^2 + 16(a - b)^2 = 0$

102. $x^4 - 4(a^2 + b^2)x^2 + 4a^2b^2 = 0$

103. $x^4 - 2(a^2 + 4ab - b^2)x^2 + (a - b)^4 = 0$

104. $a = x^2 + b + \frac{b^2}{x^2}$

105. $\frac{x^4 + 10x^2 + 1}{x^4 - 10x^2 + 1} = \frac{a}{b}$

106. $\frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)^2} \cdot \frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} = \frac{a}{b}$

107. $(x - a)^2 + \frac{1}{(x - a)^2} = m$

108. $4(x - a)^4 - 4b(x - a)^2 + c^2 = 0$

109. $(x - a)^4 - (b + c)(x - a)^2 + (b - c)^2 = 0$

110. $\frac{ax - b}{cx - d} + \frac{cx - d}{ax - b} = \frac{a - bx}{c - dx} + \frac{c - dx}{a - bx}$

111. $\frac{ax + b}{a + bx} + \frac{cx + d}{c + dx} = \frac{ax - b}{a - bx} + \frac{cx - d}{c - dx}$

112. $(x + 1)(x + 3)(x - 4)(x - 7) +$
$(x - 1)(x - 3)(x + 4)(x + 7) = 96$

113. $(1 + x)(2 - x)(3 + x)(4 - x)(5 + x) +$
$(1 - x)(2 + x)(3 - x)(4 + x)(5 - x) = 144$

114. $\frac{11 + x}{7 + x} + \frac{5 + x}{3 + x} + \frac{2 + x}{1 + x} = \frac{11 - x}{7 - x} + \frac{5 - x}{3 - x} + \frac{2 - x}{1 - x}$

115. $\frac{x + 5}{x + 2} - \frac{x + 7}{x + 3} + \frac{3(x + 1)}{x + 5} = \frac{x - 5}{x - 2} - \frac{x - 7}{x - 3} + \frac{3(x - 1)}{x - 5}$

---

116. $(x^2 + ax)^2 + m(x^2 + ax) = p$

117. $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0$

118. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$

119. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

120. $32x^4 - 48x^3 - 10x^2 + 21x + 5 = 0$

121. $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$

122. $(2x^2 - 3x + 1)^2 = 22x^2 - 33x + 1$

123. $16x^2(x - 4)^2 + 121(x - 2)^2 = 265$

124. $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 1$

125. $x^2 + 5 = 8x + 2\sqrt{x^2 - 8x + 40}$

126. $2x^2 + 3\sqrt{x^2 - x + 1} = 2x + 3$

---

127. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

128. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$

129. $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$

130. $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 0$

131. $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

132. $90x^4 - 399x^3 + 622x^2 - 399x + 90 = 0$

133. $2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$

134. $6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0$

135. $8x^5 - 46x^4 + 47x^3 + 47x^2 - 46x + 8 = 0$

136. $x^5 - 11x^4 + 36x^3 - 36x^2 + 11x - 1 = 0$

137. $12x^5 + 8x^4 - 45x^3 - 45x^2 + 8x + 12 = 0$

138. $20x^5 - 81x^4 + 62x^3 + 62x^2 - 81x + 20 = 0$

139. $12x^5 - 56x^4 + 107x^3 - 107x^2 + 56x - 12 = 0$

140. $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

141. $ax^6 + bx^5 + cx^4 = a + bx + cx^2$

142. $6x^6 - 35x^5 + 56x^4 = 6 - 35x + 56x^2$

142_1. $x^3 = \frac{ax - b}{bx - a}$ 142_2. $x^3 = \frac{41x - 15}{15x - 41}$

142_3. $x^4 = \frac{11x - 6}{6x - 11}$ 142_4. $x^5 = \frac{133x - 78}{133 - 78x}$

---

143. $x^2 + 4{,}1853x + 4{,}37276 = 0$

144. $x^2 - 77{,}34056x + 175{,}542 = 0$

145. $x^2 + 0{,}51388x - 0{,}33333 = 0$

146. $x^2 - 111{,}11x = 27958{,}32$

147. $37557x^2 - 144411x + 68530 = 0$

148. $119295x^2 + 596643x + 287776 = 0$

149. $160290x^2 + 855231x - 4956861 = 0$

150. $2265125x^2 - 5258160x - 3644352 = 0$

151_1. $x^3 + 4x^{\frac{1}{3}} = 16\frac{1}{4}x\sqrt[3]{x^2}$ 151_2. $x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{3}{5}} = (2^8 + 2^{-8})x\sqrt[5]{x^{\frac{2}{3}}}$

151_3. $7\sqrt[7]{x^5} + 5x\sqrt[7]{x^3} = 66$

151_4. $\sqrt[5]{(3x - 5)^3} - \sqrt[5]{(5 - 3x)^{-3}} = 5{,}2$

151_5. $8(8x - 5)^3 + 5(5 - 8x)^6 = 85$

151_6. $7(7x - 3)^5 - 3(3 - 7x)^{-5} = 10$

$152_1.\; 13x^{7,7} + 23 = 300x^{3,85}$ $152_2.\; 9x^{-3,3} + 11 = 100x^{-1.65}$

$152_3.\; 64x^{0,63} - 7x^{-1,74} = 9x^3$ $152_4.\; 3x^{3,5} + 5x^{5,3} = 16x^{4,4}$

$153_1.\; 8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30$ $153_2.\; 6^{1+x} + 6^{1-x} = 13$

$153_3.\; \left(\frac{57}{37}\right)^{1+x} + \left(\frac{57}{37}\right)^{1-x} = 10$

$153_4.\; 3\left(\frac{76}{47}\right)^{3x+1} + 5\left(\frac{47}{76}\right)^{3x-1} = 32$

$154_1.\; 7^{xx} = 191365$

$154_2.\; (0,98473)^{3xxx} = (0,0076828)^{-2}$

$154_3.\; 85\left(\frac{56}{65}\right)^{2xx} = 2419\left(\frac{19}{91}\right)^{5xx}$

$154_4.\; (0,047)^{-7,1xx} = 1,2828\left(\frac{107}{701}\right)^{1,7xx}$

$155_1.\; 17^{\frac{x+1}{x-1}} = 71^{\frac{x-1}{x+1}}$ $155_2.\; (0,222128)^{\frac{2-3x}{2x-3}} = 89^{\frac{2x-3}{3x-2}}$

$155_3.\; 5^{x(x-1)} . 2^{x(x+1)} = 64 . 10^{2x}$

$155_4.\; (3,111)^{xx} . (0,5188)^x = 10^{0,7779}$

$155_5.\; 3088 . (0,9977)^{\frac{3x-7}{x-5}} = 5767 . (0,8531)^{\frac{7x+3}{x+5}}$

$155_6.\; (9,482)^{\frac{4x-3}{x+1}} . (0,7093)^{\frac{3x-4}{x-1}} = 100\tfrac{1}{32}$

$156_1.\; \log(7x - 9)^2 + \log(3x - 4)^2 = 2$

$156_2.\; \log\sqrt{2x - 1} + \log\sqrt{x - 9} = 1$

$156_3.\; \log\sqrt{7x + 5} + \tfrac{1}{2}\log(2x + 7) = 1 + \log 4,5$

$156_4.\; \log(x - 2)^3 + 3\log(x - 5) = 2,69897 + \log 2$

$156_5.\; \frac{\log 2x}{\log(4x - 15)} = 2$ $156_6.\; \frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$

$157_1.\; \frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1$ $157_2.\; \log x^3 - \frac{12}{\log x} = 5$

$158_1.\; (1000x)^{3-\log x} = 51\frac{161}{170}$ $158_2.\; (10^4 x^3)^{4-3\log x} = 5\frac{364}{437}$

$158_3.\; x^{-\log x} = \frac{1916}{2759}$ $158_4.\; 7x^{-2\log x} = 0,73787$

$159_1.\; \left(\frac{x}{883,08}\right)^{\log x} = \left(\frac{1}{10}\right)^{1,946}$ $159_2.\; \left(\frac{19}{9x}\right)^{3\log x} = \frac{1715}{3511}$

$159_3.\; (3x^5)^{3-5\log x} = 57\frac{134}{343}$ $159_4.\; x^8\left(\frac{1}{8}x\right)^{8\log x} = 3\frac{41}{404}$

159_5. $3{,}2x^{3\log x - 2} = (2{,}3x)^{3-2\log x}$

159_6. $9x^{\log x} + 91x^{-\log x} = 60$

Dritte Stufe.

1. $x + \sqrt{x^2 - 1} = (a + \sqrt{a^2 - 1})(b + \sqrt{b^2 - 1})$
2. $x + \sqrt{x^2 - 1} = (a + \sqrt{a^2 - 1})(b + \sqrt{b^2 + 1})$
3. $\sqrt{x - 2} + \sqrt{x} = \sqrt{x^2 - 1}$
4. $\sqrt{\frac{x + a}{a}} - \sqrt{\frac{x - a}{x}} = \sqrt{2\left(1 - \frac{a}{x}\right)}$
5. $\sqrt[4]{\frac{a - x}{b - x}} - \sqrt[4]{\frac{b - x}{a - x}} = c$
6. $\sqrt[3]{\frac{a - x}{b + x}} + \sqrt[3]{\frac{b + x}{a - x}} = c$
7. $\sqrt[5]{\frac{a - x}{b + x}} + \sqrt[5]{\frac{b + x}{a - x}} = c$
8. $\frac{\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x}}{\sqrt{a - x} - \sqrt{b - x}} = \frac{c}{\sqrt{(a - x)(b - x)}}$
9. $\frac{\sqrt{x - a} + \sqrt{x - b}}{\sqrt{x - a} - \sqrt{x - b}} = \frac{c}{a + b - 2x}$
10. $\frac{\sqrt[3]{a - x} - \sqrt[3]{x - b}}{\sqrt[3]{a - x} + \sqrt[3]{x - b}} = \frac{a + b - 2x}{a - b}$
11. $\sqrt[3]{(a - x)^2} + \sqrt[3]{(a - x)(b - x)} + \sqrt[3]{(b - x)^2} = \sqrt[3]{a^2 + ab + b^2}$
12. $\sqrt[3]{x + 1580} - \sqrt[3]{x - 1136} = 4$
13. $\sqrt[3]{a - x} + \sqrt[3]{x - b} = \sqrt[3]{c}$
14. $\sqrt[3]{60 - x} + \sqrt[3]{x - 11} = \sqrt[3]{4}$
15. $\frac{\sqrt[3]{(a - x)^2} + \sqrt[3]{(x - b)^2}}{(\sqrt[3]{a - x} + \sqrt[3]{x - b})^2} = c$
16. $\frac{\sqrt{x - a} + \sqrt{x + a} - \sqrt{2a}}{\sqrt{x - a} - \sqrt{x + a} + \sqrt{2a}} = \sqrt[4]{\frac{x + c}{x - c}}$
17. $\frac{a + b + (a - b)x^2}{2x} = \frac{2x}{a - b + (a + b)x^2}$
18. $\frac{(1 + x^2)^2}{a^2} - \frac{(1 - x^2)^2}{b^2} = 4x^2$

19. $\sqrt{(a+x)(x-b)} + \sqrt{(a-x)(x+b)} = \sqrt{(a+x)(x+b)}$
$- \sqrt{(a-x)(x-b)}$

20. $\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{x^2}}$

21. $\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)} + \sqrt{(a^2-x^2)(c^2-x^2)} + \sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)} = x^2$

22. $x(x+2)(x+4)(x+6) = 1920$

23. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 24$

24. $(x-1)(3-x)(5-x)(7-x) = 15$

25. $(1-x)(2+x)(4-x)(7-x) = 80$

26. $(a-x)^4 + (x-b)^4 = c$

27. $(5-x)^4 + (2-x)^4 = 17$

28. $(x-a)^5 + (b-x)^5 = c$

29. $(x-1)^5 + (4-x)^5 = 33$

30. $x^4 + (a-x)^4 = a^4$ 31. $x^5 + (a-x)^5 = a^5$

32. $x^4 + (x-7)^4 = 337$ 33. $x^5 + (5-x)^5 = 275$

34. $4(a-x)^4 - 17(a-x)^2(x-b)^2 + 4(x-b)^4 = 0$

35. $2(a-x)^4 - 9(a-x)^3(x-b) + 14(a-x)^2(x-b)^2$
$- 9(a-x)(x-b)^3 + 2(x-b)^4 = 0$

36. $6(a-x)^4 - 25(a-x)^3(x-b) + 38(a-x)^2(x-b)^2$
$- 25(a-x)(x-b)^3 + 6(x-b)^4 = 0$

---

37. $\frac{1}{8-x} + \frac{1}{4-x} + \frac{2}{3-2x} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{5-x} + \frac{2}{15-2x}$

38. $\frac{5}{x} - \frac{4}{x-a} - \frac{9}{x-2a} - \frac{4}{x-3a} + \frac{5}{x-4a} = 0$

39. $\frac{14}{x+20} + \frac{5}{x+5} - \frac{4}{x-10} = \frac{14}{x-55} + \frac{5}{x-40} - \frac{4}{x-25}$

40. $\frac{2x+5a}{x} - \frac{x+8a}{x-a} + \frac{x}{x-2a} = \frac{x-a}{x-3a} - \frac{x+5a}{x-4a} + \frac{2x-5a}{x-5a}$

41. $\frac{x+4}{x+2} + \frac{x+2}{x} + \frac{x+4}{x-1} = \frac{x+3}{x-2} + \frac{x-1}{x-3} + \frac{x-3}{x-5}$

42. $\frac{1-x}{x+4} + \frac{9-x}{x-4} + \frac{2-x}{x+2} = \frac{4-x}{x+1} + \frac{9-x}{x-5} + \frac{12-x}{x-7}$

43. $\frac{7}{x} - \frac{31}{x-1} + \frac{20}{x-2} + \frac{8}{x-3} + \frac{20}{x-4} - \frac{31}{x-5} + \frac{7}{x-6} = 0$

44. $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{3+x}+\frac{1}{4+x}=\frac{1}{6-x}-\frac{1}{6-2x}+\frac{1}{8+x}-\frac{1}{10+2x}$

45. $\frac{5}{x+6}-\frac{4}{x+4}+\frac{1}{5(x+2)}-\frac{30}{x}=\frac{5}{x-7}-\frac{4}{x-5}+\frac{1}{5(x-3)}-\frac{30}{x-1}$

46. $\frac{21}{7-x}+\frac{7}{4-x}+\frac{9}{2-x}+\frac{2}{1-x}=\frac{21}{3-x}+\frac{7}{6-x}+\frac{9}{8-x}+\frac{2}{9-x}$

47. $\frac{4}{x}-\frac{7}{x-1}-\frac{27}{x-2}+\frac{30}{x-3}+\frac{30}{x-4}-\frac{27}{x-5}-\frac{7}{x-6}+\frac{4}{x-7}=0$

48. $\frac{49}{x}-\frac{25}{x-2}-\frac{27}{x-4}+\frac{3}{x-6}+\frac{3}{x-8}-\frac{27}{x-10}-\frac{25}{x-12}+\frac{49}{x-14}=0$

49. $\frac{6-x}{1-x}+\frac{1+2x}{2-x}+\frac{3+x}{8+x}-\frac{5+2x}{10+2x}=\frac{1+2x}{3+x}-\frac{9+x}{4+x}$
$+\frac{x-1}{6-x}+\frac{2x-11}{6-2x}$

50. $\frac{x+1}{1-x}+\frac{2x+7}{7-x}+\frac{3x-5}{4-x}+\frac{4x+1}{2-x}=\frac{x+1}{8-x}+\frac{2x-16}{9-x}$
$+\frac{3x-11}{6-x}+\frac{4x+9}{3-x}$

---

51. $\frac{(x+1)^4}{x(x^2+1)}=\frac{a}{b}$

52. $\frac{(x+1)^5}{x(x^3+1)}=\frac{625}{42}$

53. $\frac{(x+1)^4}{x^4+1}=\frac{a}{b}$

54. $\frac{(x+1)^5}{x^5+1}=\frac{a}{b}$

55. $\frac{(x+1)(x^3+1)}{(x-1)(x^3-1)}=\frac{a}{b}$

56. $\frac{(x+1)(x^4+1)}{(x-1)(x^4-1)}=\frac{353}{68}$

57. $\frac{(x^2+1)(x^3+1)}{(x+1)(x^4+1)}=\frac{15}{17}$

58. $\frac{(x^2+1)(x^3+1)}{(x^2-1)(x^3-1)}=\frac{35}{26}$

59. $\frac{(x+1)(x^5-1)}{(x-1)(x^5+1)}=\frac{a}{b}$

60. $\frac{(x^3-1)(x+1)^3}{(x^3+1)(x-1)^3}=11\frac{10}{57}$

61. $\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4-x^3+x^2-x+1}=\frac{a}{b}$

62. $\frac{2x(x+1)^2}{(x^2+1)(x-1)^2}=\frac{b(a-b)}{a(b-2a)}$

63. $\frac{(x^2+1)^2}{(x^2+x+1)(x+1)^2}=\frac{2(a-b)^2}{ab}$

64. $\frac{x^2(x+1)}{(x^2+1)(x^3+1)}=\frac{4b^2}{a^2-b^2}$

65. $\frac{(x^2-x+1)^2}{x^4-x^3+x^2-x+1}=\frac{4a^2}{5a^2-b^2}$

66. $\frac{(x^6+1)(x^2+1)}{(x^6-1)(x^2-1)} = \frac{a}{b}$ 67. $\frac{(x^6+1)(x^4+1)}{(x^8+1)(x^2+1)} = \frac{a}{b}$

68. $\frac{(x^8+1)(x^2+1)}{(x^8-1)(x^2-1)} = \frac{a}{b}$ 69. $\frac{(x^{10}-1)(x^2+1)}{(x^{10}+1)(x^2-1)} = \frac{a}{b}$

70. $\frac{(x^4+x^2+1)(x^2+1)^2}{(x^4-x^2+1)(x^2-1)^2} = \frac{a}{b}$

71. $\frac{(x^4+x^2+1)^2}{x^2(x^4+1)} = \frac{n^2}{n-1}$

72. $\frac{(a-x)^4-(x-b)^4}{(a-x)-(x-b)} = \frac{(a-b)c}{(a-x)(x-b)}$

73. $\frac{(a-x)^3+(x-b)^3}{(a-x)^4+(x-b)^4} = \frac{c}{(a-x)(x-b)}$

74. $\frac{(a-x)^5+(x-b)^5}{(a-x)^2+(x-b)^2} = c\,(a-x)(x-b)$

75. $\frac{(a-x)^4+(x-b)^4}{(a-x)^2+(x-b)^2} = \frac{41}{20}(a-b)^2$

76. $\frac{(a-x)^5+(x-b)^5}{(a-x)^4+(x-b)^4} = \frac{211}{97}(a-b)$

77. $\frac{(a-x)^4+(x-b)^4}{(a-x)^3+(x-b)^3} = \frac{a^4+b^4}{a^3-b^3}$

78. $\frac{(a-x)^5+(x-b)^5}{(a-x)^3+(x-b)^3} = \frac{a^5-b^5}{a^3-b^3}$

79. $\frac{(a-x)^4+(x-b)^4}{(a+b-2x)^2} = \frac{a^4+b^4}{(a+b)^2}$

80. $\frac{(a-x)^3}{b-x} + \frac{(b-x)^3}{a-x} = \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a}$

81. $\frac{a-x}{(x-b)^2} + \frac{x-b}{(a-x)^2} = \frac{a}{b^2} - \frac{b}{a^2}$

82. $\frac{a-x}{x-b}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}} = \frac{m\sqrt{a-x}-n\sqrt{x-b}}{n\sqrt{a-x}-m\sqrt{x-b}}$

83. $\frac{(a-x)^2+(x-b)^2}{(\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b})^4} = c$

84. $\frac{x^4+(4-x^2)^2}{(x+\sqrt{4-x^2})^2} = ax\sqrt{4-x^2}$

85. $\frac{(a-x)^2\sqrt{a-x}+(x-b)^2\sqrt{x-b}}{(a-x)^2\sqrt{x-b}+(x-b)^2\sqrt{a-x}} = c$

86. $\frac{(a-x)^2\sqrt{a-x}+(b-x)^2\sqrt{b-x}}{(\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x})^5} = c$

87. $\frac{\sqrt[3]{a - x} + \sqrt[3]{x - b}}{\sqrt[3]{a - x} - \sqrt[3]{x - b}} = \frac{a + b - 2x}{c}$

88. $\frac{\sqrt[3]{(a - x)^2} + \sqrt[3]{(x - b)^2}}{\sqrt[3]{(a - x)^2} - \sqrt[3]{(x - b)^2}} = \frac{c}{a + b - 2x}$

89. $\frac{(a - x)\sqrt[3]{a - x} + (x - b)\sqrt[3]{x - b}}{(a - x)\sqrt[3]{x - b} + (x - b)\sqrt[3]{a - x}} = c$

90. $\frac{(a - x)\sqrt[3]{x - b} + (x - b)\sqrt[3]{a - x}}{(\sqrt[3]{a - x} + \sqrt[3]{x - b})^4} = c$

91. $\frac{a - b}{x\sqrt[3]{b - x^3}} = x + \sqrt[3]{b - x^3}$

92. $\frac{a}{x^3 - b} = \frac{x + \sqrt[3]{2b - x^3}}{x - \sqrt[3]{2b - x^3}}$

93. $\sqrt[4]{3400 - x} + \sqrt[4]{x - 918} = 10$

94. $\sqrt[4]{a - x} + \sqrt[4]{x - b} = \sqrt[4]{c}$

95. $\sqrt[4]{2875 - x} - \sqrt[4]{x - 232} = \sqrt[4]{3}$

96. $\frac{(a - x)\sqrt[4]{a - x} + (x - b)\sqrt[4]{x - b}}{(a - x)\sqrt[4]{x - b} + (x - b)\sqrt[4]{a - x}} = c$

97. $\frac{\sqrt[4]{a - x} + \sqrt[4]{x - b}}{\sqrt[4]{a - x} - \sqrt[4]{x - b}} = \frac{c}{a + b - 2x}$

98. $\frac{20 - x}{\sqrt[4]{5 - x}} + \frac{5 - x}{\sqrt[4]{20 - x}} = \frac{16\frac{1}{2}}{\sqrt[4]{20 - x} - \sqrt[4]{5 - x}}$

99. $\sqrt[5]{5125 - x} + \sqrt[5]{x - 976} = 9$

100. $\sqrt[5]{a - x} + \sqrt[5]{x - b} = \sqrt[5]{c}$

101. $\sqrt[5]{1800 - x} - \sqrt[5]{323 - x} = \sqrt[5]{7}$

102. $\frac{(a - x)\sqrt[5]{x - b} - (x - b)\sqrt[5]{a - x}}{\sqrt[5]{a - x} - \sqrt[5]{x - b}} = c$

XXVI.

Anwendung der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten.

1. Das Produkt aus dem vierten und fünften Teil einer Zahl giebt 500. Wie heißt die Zahl?

2. Das Produkt aus dem dritten Teil einer Zahl und aus ihrem Fünffachen liefert 540. Wie heißt die Zahl?

3. Ein Werk besteht aus 4 gleichen Bänden, und jede Seite hat durchschnittlich eben so viel Buchstaben, als das ganze Werk Seiten hat. Wie hoch kommt die Seitenzahl jedes Bandes, wenn das ganze Werk auf 2310400 Buchstaben veranschlagt ist?

4. Eine Frau bringt Eier zur Stadt und verkauft das Stück für so viel Pfennige, als der 12. Teil der Anzahl ihrer Eier beträgt. Wie viel hatte sie, wenn sie für dieselben 3 Mk. einnahm?

5. Jemand hat zwei Stücke Acker; das eine ist ein Rechteck, das andere ein Quadrat. Das Rechteck ist noch 3mal so groß als das Quadrat. Wie groß ist die Seite des Quadrats, wenn die Seiten des Rechtecks 2844 und 237 Meter lang sind?

6. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind 2288 und 3534 Meter. Wie lang die Hypotenuse?

7. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist 514 Meter und die eine Kathete 64 Meter. Wie groß ist die andere Kathete?

8. Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist a. Wie groß ist die Höhe?

9. Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks ist 1000 Meter. Wie groß ist die Seite?

10. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks verhalten sich wie $3:4$. Wie lang sind dieselben, wenn die Hypotenuse 555 Meter lang ist?

11. Welche Zahlen verhalten sich wie $m:n$, während die Summe ihrer Quadrate $= a^2$ ist?

12. Wie groß muß die Diagonale eines Quadrats sein, dessen Umfang 100 Meter ist?

13. Zwei Körper A und B bewegen sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels vom Scheitelpunkt aus. Nach wie viel Sekunden werden sie die Entfernung a von einander haben, wenn sie in einer Sekunde bezüglich m und n Meter zurücklegen?

14. Wenn man die Summe und Differenz einer gewissen Zahl mit der Zahl 1 bildet, so ist das Produkt aus der Summe und der Differenz 360. Wie heißt die Zahl?

15. Wenn man die Summe und Differenz einer gewissen Zahl mit der Zahl 7 bildet, so ist die Summe der Quadrate der so erhaltenen Zahlen 1066. Wie heißt die Zahl?

16. Es giebt zwei Zahlen, von denen die eine ebenso viel über 100 beträgt, als die andere darunter, deren Produkt 9831 ist. Wie heißen dieselben?

17. Es giebt zwei Zahlen, von denen die eine ebenso viel über 58 beträgt als die andere darunter, deren Quadrate in Summe 6970 sind. Wie heißen dieselben?

18. Es giebt eine Zahl, die zwischen 96 und 150 liegt. Die Summen der gesuchten Zahl mit den gegebenen verhalten sich wie die Differenzen der gesuchten Zahl mit den gegebenen. Wie heißt die Zahl?

19. Wie heißt das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt der gegebenen Zahlen die allgemeinen Zahlzeichen a und b gesetzt werden?

20. Ein Mann kauft ein sehr mageres Pferd, füttert es gut und verkauft es wieder. Er gewinnt bei dem Handel, die Futterkosten nicht gerechnet, ebenso viel Prozent, als ihm das Pferd gekostet hat. Wie hoch war der Einkaufspreis, wenn dieser noch 784 Mk. niedriger war als der Verkaufspreis?

21. Jemand gewann bei einer Ware so viel Prozent als der 5. Teil des Einkaufspreises betrug. Wie hoch verkaufte er die Ware, wenn er 245 Mk. gewann?

22. Ich habe eine Zahl im Sinne. Bilde ich das Produkt aus den Summen dieser Zahl mit je einer der Zahlen 16 und 19, und ebenso das Produkt aus den Differenzen mit je einer der genannten Zahlen, so beträgt die Summe der beiden Produkte gerade 1000. Wie groß muß die Zahl sein, wenn sie kleiner ist als jede der genannten?

23. Wie groß muß nach den Bedingungen der vorigen Aufgabe die gesuchte Zahl sein, wenn die gegebenen Zahlen 10 und 67 sind, die gesuchte Zahl zwischen beiden liegt und die Differenz der Produkte (nicht die Summe) 2222 beträgt?

24. Die Summe der Quadratwurzeln aus zwei Zahlen, von denen die eine um ebenso viel größer ist als 37 als die andere kleiner, ist gleich der Quadratwurzel aus 74. Wie heißen die Zahlen?

25. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe sein, wenn statt 37 die Zahl 58 gegeben und die Summe der Wurzeln gleich 14 ist?

26. Es giebt eine Zahl, welche größer als 50 ist, von der Art, daß die Summe und Differenz derselben mit der Zahl 37 in demselben Verhältnis stehen, wie die Kuben der Summe und Differenz mit der Zahl 13. Wie heißt dieselbe?

27. Welche Zahl muß man zu 41 addieren und von 41 subtrahieren, daß die Summe der Kubikwurzel aus der Summe und derjenigen aus der Differenz gleich der Kubikwurzel aus 82 ist?

28. Es giebt eine Zahl, die größer ist als 28, von der Art, daß der Unterschied der Kubikwurzeln aus der Summe und der Differenz der gesuchten Zahl mit der Zahl 28 gleich 2 ist. Wie heißt dieselbe?

29. Es giebt zwei Zahlen, von denen die eine ebenso viel über 536 beträgt, als die andere darunter. Zieht man die Kubikwurzeln aus beiden Zahlen und bildet den Quotienten zwischen beiden Wurzeln, so macht dieser mit seinem reziproken Werte zusammen $2\frac{4}{63}$ aus. Wie heißen die Zahlen?

30. Jemand hat ein Gefäß mit 125 Liter Wein. Er zapft eine gewisse Quantität ab und ersetzt die abgezapfte Flüssigkeit durch Wasser.

Nachdem er dies 3mal wiederholt hat, sind im Gefäß noch 27 Liter reinen Weins. Wie viel Liter hat er jedesmal abgezapft?

31. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe heißen, wenn statt der Zahlen 125, 27 und 3 die allgemeinen Zahlzeichen a, b und n gesetzt werden?

32. Jemand hat 1250 Liter Alkohol von 80 Prozent, d. h. 100 Liter davon enthalten 80 Liter reinen oder wasserfreien Alkohol und 20 Liter Wasser. Er zapft immer eine gewisse Anzahl Liter ab und ersetzt den abgezapften gemischten Alkohol durch Wasser. Nachdem er dies 3 mal wiederholt hat, enthält die Mischung nur noch 125 Liter reinen Alkohol. Wie viel Liter wurden jedesmal abgelassen?

33. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt der Zahlen 1250, 125, 80 und 3 die allgemeinen Zahlzeichen a, b, p und n gesetzt werden?

34. Zwei Seiten eines Dreiecks a und b sind gegeben. Wie groß ist die dritte Seite, wenn der von den gegebenen Seiten eingeschlossene Winkel 60 Grad ist?

35. Wie ist das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn der eingeschlossene Winkel 120 Grad faßt?

36. Wie ist das Resultat, wenn der eingeschlossene Winkel 30 Grad ist?

37. Wie groß ist das Resultat, wenn der betreffende Winkel 45 Grad ist?

38. Die eine Seite eines Dreiecks ist 52 Meter, die beiden andern Seiten verhalten sich wie 8 : 15, der von ihnen eingeschlossene Winkel ist 60 Grad. Wie groß sind die beiden andern Seiten?

39. Zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie 3 : 5, der eingeschlossene Winkel ist 120 Grad, die dritte Seite ist 28 Meter lang. Wie lang die beiden ersten Seiten?

40. Auf der Hypotenuse a und der einen Kathete b eines rechtwinkligen Dreiecks liegen zwei Punkte M und N, deren Entfernung von der Ecke, wo a und b zusammenstoßen, bezüglich m und n ist. Wie lang ist die Linie MN?

41. Zwei Körper A und B bewegen sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels. A ist jetzt 123 Meter vom Scheitelpunkt entfernt und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 239 Meter in der Sekunde vom Scheitelpunkt ab. B ist jetzt 239 Meter vom Scheitelpunkt entfernt und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 123 Meter in der Sekunde nach dem Scheitelpunkt hin. Wann hatten und wann werden die Körper eine Entfernung von 850 Meter von einander haben?

42. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt der Zahlen 239, 123 und 850 die allgemeinen Zahlzeichen a, b und m gesetzt werden?

43. Auf der Hypotenuse a eines rechtwinkligen Dreiecks und einer Kathete b bewegen sich zwei Körper, vom Schnittpunkt der Linien a und b anfangend, bezüglich mit den Geschwindigkeiten von m und n Meter in der Sekunde. Nach wie viel Sekunden werden die Körper die Entfernung d Meter von einander haben?

44. Von der Spitze eines gleichseitigen Dreiecks aus bewegen sich zwei Körper, zu gleicher Zeit anfangend, auf den Seiten mit den Geschwindigkeiten m und n Meter in der Sekunde. Wann werden sie von einander eine Entfernung von d Meter haben?

---

45. Es soll eine Zahl gesucht werden, deren 29-faches das Quadrat derselben noch um 190 übertrifft.

46. Es giebt eine Zahl, deren 10-faches noch um 999 kleiner ist als ihr Quadrat. Wie heißt dieselbe?

47. Die Zahl 53 in zwei Summanden zu zerlegen, deren Produkt 612 ist.

48. Die Größe $a^2 + b^2$ in zwei Summanden zu zerlegen, deren Produkt $\frac{1}{4}(a^4 + a^2 b^2 + b^4)$ ist.

49. Die Zahl 384 in zwei Faktoren zu zerlegen, deren Differenz 8 ist.

50. Die Zahl 2268 in zwei Faktoren zu zerlegen, deren Summe 99 ist.

51. Die Größe $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ in zwei Faktoren zu zerlegen, deren Differenz $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ist.

52. Den Bruch $\frac{1}{4}$ in zwei Faktoren zu zerlegen, deren Summe $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ ist.

53. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen, von denen die eine um 12 größer ist als die andere, beträgt 1130. Wie heißen dieselben?

54. Die Größe $5a + b$ in zwei Summanden zu zerlegen, daß die Summe ihrer Quadrate $= 13(a^2 + b^2)$ ist.

55. Der Inhalt eines Rechtecks ist 1440 Q.-Meter. Wie groß sind die Seiten desselben, wenn die eine noch 18 Meter länger ist als die andere?

56. Von den Seiten eines Rechtecks ist die eine noch um 19 Fuß länger als die andere. Wäre die kleinere um den 4. Teil größer und die größere um den 3. Teil kleiner, so würde der Inhalt des ganzen Rechtecks 1320 Q.-Fuß kleiner sein. Wie groß die Seiten?

57. Der Umfang eines Rechtecks ist 252 Fuß, sein Inhalt 3888 Q.-Fuß. Wie groß die Seiten?

58. Um welche Zahl muß man jeden Faktor des Produkts 24.20 vergrößern, damit das Produkt um 540 größer wird?

59. Zwei Zahlen zu finden, deren Produkt 900 und deren Quotient 4 beträgt.

60. Zwei Zahlen verhalten sich wie 5:4. Vermehrt man jede um 15, so beträgt die Differenz der Quadrate der neuen Zahlen gerade 999. Wie heißen die Zahlen?

61. Welche Zahl giebt in $4\frac{1}{2}$ dividiert gerade so viel als von $4\frac{1}{2}$ subtrahiert?

62. Welche Zahl giebt durch 5 dividiert noch 1 mehr als in 360 dividiert?

63. Die Zahl 900 in zwei solche Summanden zu zerlegen, daß die Summe ihrer reziproken Werte gleich dem reziproken Werte von 221 ist.

64. Die Summe zweier Zahlen ist **a**, die Summe ihrer reziproken Werte gleich dem reziproken Werte von b. Wie heißen dieselben?

65. Das Produkt zweier Zahlen vermehrt um die Summe derselben giebt 999. Wie groß ist jede, wenn die erste die zweite noch um 15 übertrifft?

66. Der Nenner eines Bruches ist um 4 größer als der Zähler. Vermindert man den Zähler um 3 und vermehrt den Nenner um dieselbe Zahl, so ist der entstehende Bruch nur halb so groß als der ursprüngliche. Wie heißt der Bruch?

67. Der Zähler und der Nenner eines Bruches betragen zusammen 100. Wäre der Zähler um 18 größer und der Nenner um 16 kleiner, so würde der Bruch doppelt so groß sein. Wie heißt derselbe?

68. Es giebt eine Zahl zwischen 50 und 10. Die Unterschiede der Zahl mit den genannten verhalten sich wie die Summen der Zahl mit den Zahlen 94 und 10. Wie heißt die Zahl?

69. Eine Zahl besteht aus zwei Ziffern, von denen die erste um 3 größer ist als die zweite. Multipliziert man die Zahl mit der Summe ihrer Ziffern, so erhält man 814. Wie heißt die Zahl?

70. Eine Zahl besteht aus zwei Ziffern, deren Summe 10 ist. Stellt man die Ziffern um und multipliziert die so erhaltene Zahl mit der ursprünglichen, so erhält man 2944. Wie heißt die Zahl?

71. Zwei Zahlen sind in Summe 200. Die Wurzel der ersten giebt um die zweite Zahl vermehrt 44. Wie heißen die Zahlen?

72. Die Summe zweier Zahlen ist 290, die Summe ihrer Quadratwurzeln 24. Wie heißen die Zahlen?

73. Die Summe zweier Zahlen ist 40, die Summe ihrer Kuben 17080. Wie heißen die Zahlen?

74. Die Differenz zweier Zahlen ist 10, die Differenz ihrer Kuben 20530. Wie heißen die Zahlen?

75. Die Summe zweier Zahlen ist 7110, die Summe ihrer Kubikwurzeln = 30. Wie heißen dieselben?

76. Wie groß ist die Kante eines Würfels, der 4167 Kubikfuß mehr hielte, als er hält, wenn die Kante um 3 Fuß länger wäre?

77. Um ein Blumenbeet, welches die Form eines Rechtecks hat, dessen Seiten 3 und 4 Meter lang sind, geht ein überall gleich breiter Rasenstreifen, dessen Fläche 10mal so groß ist als die des Blumenbeetes. Wie breit ist derselbe?

78. Eine Anzahl Soldaten ist 3 Mann tief in Form eines hohlen Carrés aufgestellt. Wären es 9 Mann mehr gewesen, so hätte man sie in einem vollen Carré aufstellen können. Dann hätte die

Seite des vollen Carrés 32 Mann weniger gehabt als die innere Seite des hohlen Carrés. Wie groß die Anzahl?

79. Eine Truppenabteilung marschiert in geschlossener Kolonne und hat 14 Mann mehr in der Tiefe als in der Fronte. Vor dem Feinde wird die Fronte um 828 vergrößert, daß nur noch 5 Mann in der Tiefe stehen. Wie stark ist die Abteilung?

80. Ein Kaufmann kauft für eine gewisse Summe Ware ein, hat noch 5 Prozent Unkosten und verkauft sie wieder für 504 Mk., wobei er so viel Prozent gewinnt, als der 20. Teil des Einkaufspreises beträgt. Wie hoch dieser?

81. Jemand hat 8000 G. auf Zinsen und vermehrt sein Kapital am Ende jeden Jahres außer den Zinsen um 100 G. Im Anfang des 3. Jahres hat er 8982,8 G. — Zu wie viel Pzt. stand das Kapital?

82. Wie heißt das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt der dort vorkommenden Zahlen der Reihe nach die allgemeinen Zahlen a, m und b gesetzt werden?

83. Zwei Männer A und B haben zusammen in 20 Tagen eine Mauer aufgeführt. Wie lange hätte jeder allein daran arbeiten müssen, wenn B noch 9 Tage länger gebraucht hätte als A?

84. Durch zwei Röhren kann ein Teich in 6 Stunden gefüllt werden, wenn sie beide offen sind. In wie viel Stunden kann er durch jede allein gefüllt werden, wenn die erste zu dem Zwecke noch 5 Stunden weniger offen zu sein braucht als die zweite?

85. Auf der Peripherie eines Kreises von 360 Meter Länge bewegen sich zwei Körper A und B. A legt in der Sekunde noch 4 Meter mehr zurück als B und braucht daher, um die ganze Peripherie zu durchlaufen, eine Sekunde weniger. Wie viel Meter legt jeder in einer Sekunde zurück?

86. Eine Anzahl von Personen verzehrt in einem Wirtshause für 30 Mk. Wären es 5 Personen weniger gewesen, so hätte jede Person 30 Pf. mehr verzehren können, ohne daß sich die Rechnung geändert hätte. Wie viel Personen?

87. Eine Anzahl von Studenten kehren in einem Wirtshause ein und haben schließlich eine Rechnung von 12 G. zu bezahlen. Wären ihrer 4 mehr gewesen und hätte jeder 25 Kr. weniger verzehrt, so hätte sich die Rechnung auf 15 G. belaufen. Wie groß war die Zahl der Studenten?

88. Eine Frau bringt Butter zur Stadt und löst dafür 30 Mk. Hätte sie 5 Pfund weniger gehabt, so hätte sie das Pfund schon um 20 Pf. teurer verkaufen müssen, wenn sie ebenso viel hätte einnehmen wollen. Wie viel Pfund?

89. Es kauft jemand für 2 G. Citronen. Hätte er für dasselbe Geld 20 Citronen mehr erhalten, so wäre ihm das Stück $\frac{1}{3}$ Kr. wohlfeiler gekommen. Wie viel Citronen kaufte er?

90. Es kauft jemand zwei Arten Tuch, zusammen für 49 G., von der ersten Art 2 Ellen weniger als von der zweiten. Das Tuch der ersten Art würde zum Preise der zweiten Art 20 G. kosten. Das

Tuch der zweiten Art würde zum Preise der ersten Art 30 G. kosten. Wie viel Ellen von jeder Art?

91. Jemand kauft zwei Arten Zeug, von der ersten Art 3 Ellen weniger als von der zweiten, und zahlt im ganzen 126 Mk. Von der ersten Art kostet die Elle 30 mal so viel Pfennige, als er von der zweiten Art Ellen kauft. Von der zweiten Art kostet die Elle 40 mal so viel Pfennige, als er von der ersten Art Ellen kauft. Wie viel Ellen von jeder Art?

92. A und B stehen eine gleiche Zahl von Tagen in Arbeit. A versäumt nur einen Tag und verdient 60 Mk. B versäumt 7 Tage und verdient 54 Mk. Hätte A 7 Tage versäumt und B einen Tag, so hätte B 27 Mk. mehr verdient als A. Wie lange standen sie in Arbeit?

93. Zwei Frauen hatten Eier zur Stadt gebracht, die zweite 24 mehr als die erste, und beide gleich viel Geld gelöst. Hätte ich meine Eier zu deinem Preise verkauft, sprach die erste, so hätte ich 1 Mk. 60 Pf. erhalten. Hätte ich meine Eier zu deinem Preise verkauft, antwortete die zweite, so wäre ich auf 2 Mk. 50 Pf. gekommen. Wie viel Eier hatte jede Frau gehabt?

94. Zwei Personen A und B legen denselben Weg zwischen M und N zurück, A von M nach N, B von N nach M, und gehen zugleich aus. Als sie sich begegnen, hat A 3 Meilen mehr gemacht als B. Würden sie jetzt mit derselben Geschwindigkeit weiter reisen, so würde A in 4 Stunden nach N, B in 9 Stunden nach M gelangen. Wie weit ist es von M nach N?

95. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe sein, wenn statt der Zahlen 9, 4 und 3 die allgemeinen Zahlzeichen a, b und m gesetzt werden?

96. Aus A wird ein Kurier nach B abgeschickt, der dort nach 10 Stunden eintreffen wird. Zu derselben Zeit wird aus einem $3\frac{3}{4}$ Meilen mehr rückwärts gelegenen Orte ein zweiter Kurier abgeschickt, der mit dem ersten Kurier zu gleicher Zeit in B eintreffen soll und daher auf jede Meile 8 Minuten gewinnen muß. Wie weit ist A von B entfernt?

97. Wie heißt das Resultat der vorigen Aufgabe wenn statt der Zahlen 10, $3\frac{3}{4}$ und 8 die allgemeinen Zahlzeichen a, d und n gesetzt werden?

98. Aus den Örtern A und B gehen zwei Wanderer zu gleicher Zeit aus und begegnen einander nach $10\frac{1}{2}$ Stunden. Wie lange gebraucht jeder zu einer Meile, wenn der erste noch $\frac{1}{4}$ Stunde weniger gebraucht als der zweite und wenn A und B 13 Meilen von einander entfernt sind?

99. Zwei Körper A und B bewegen sich auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien. A ist jetzt 175 Meter vom Schnittpunkt entfernt, B 20 Meter, und beide kommen vom Schnittpunkt her. Wann betrug und wann wird die Entfernung der beiden Körper von einander 370 Meter betragen, wenn A 49 Meter, B 28 Meter in der Sekunde zurücklegt?

100. Zwei Körper A und B bewegen sich auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien mit den Geschwindigkeiten von 4 und 3 Meter in der Sekunde. A ist jetzt 300 Meter vom Schnittpunkt entfernt und seine Bewegung ist nach dem Schnittpunkt hin gerichtet. B ist 250 Meter vom Schnittpunkte entfernt und seine Bewegung ist vom Schnittpunkte ab gerichtet. Wann war und wann wird die Entfernug der beiden Körper von einander 1825 Meter sein?

101. Zwei Körper A und B bewegen sich auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien nach dem Schnittpunkte hin. A macht 6 Meter in der Sekunde, B 4 Meter. A ist jetzt noch 78 Meter vom Schnittpunkt entfernt, B 104 Meter. Die Körper haben demnach jetzt eine gegenseitige Entfernung von 130 Meter. Vor wie langer Zeit war ihre gegenseitige Entfernung 1378 Meter, und nach wie langer Zeit wird sie wieder 1378 Meter sein?

102. Zwei Kreise bewegen sich mit ihren Mittelpunkten auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien nach dem Schnittpunkte hin und darüber hinaus. Der erste hat einen Radius von 981 Meter, durchläuft in jeder Sekunde 7 Meter, und sein Mittelpunkt ist jetzt noch 2442 Meter vom Schnittpunkt der Linien entfernt. Der zweite hat einen Radius von 980 Meter, durchläuft in jeder Sekunde 5 Meter, sein Mittelpunkt ist jetzt noch 1591 Meter vom Schnittpunkte der Linien entfernt. Nach wie viel Sekunden berühren sich die Kreise zum ersten Mal von außen und nach wie viel Sekunden zum zweiten Mal, vorausgesetzt, daß sie sich in ihren Bewegungen nicht hinderlich sind?

103. Wie heißt das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt der Zahlen 2442, 1591, 7, 5, 981 und 980 bezüglich die allgemeinen Zahlzeichen a, b, m, n, r und r_1 gesetzt werden?

104. Zwei Kreise bewegen sich mit ihren Mittelpunkten auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien nach dem Schnittpunkte hin. Der erste hat einen Radius von 100 Meter, durchläuft in jeder Sekunde 3 Meter, und sein Mittelpunkt ist jetzt noch 247 Meter vom Schnittpunkt entfernt. Der zweite hat einen Radius von 35 Meter, macht in jeder Sekunde 2 Meter, und sein Mittelpunkt ist jetzt noch 169 Meter vom Schnittpunkt entfernt. Nach wie viel Sekunden werden sich die Kreise von innen berühren?

105. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist 95 Meter, die lange Kathete 76 Meter. Auf diesen Seiten bewegen sich zwei Körper A und B, zu gleicher Zeit auf denjenigen Enden der Linien anfangend, wo sie mit der dritten Seite des Dreiecks zusammenstoßen, nach dem Schnittpunkte hin. A legt auf der Hypotenuse in jeder Sekunde 5 Meter zurück, B auf der Kathete in jeder Sekunde 11 Meter. Wann haben die Körper eine gegenseitige Entfernung von 65 Meter?

106. Von den Enden der Basis a eines gleichseitigen Dreiecks bewegen sich auf den beiden andern Seiten zwei Körper mit den Geschwindigkeiten m und n Meter in der Sekunde. Wann haben diese eine Entfernung von einander, welche gleich der Höhe des Dreiecks ist?

106_1. Welche Basen haben die Zahlensysteme, in denen die erste der folgenden Zahlen, welche dem dekadischen System angehört, in der Form der zweiten erscheint: 1) 73 als 111; 2) 93 als 333; 3) 86 als 222; 4) 250 als 372; 5) 1281 als 777; 6) 1111 als 787; 7) 2695 als 959?

106_2. Welche Basen müssen den Zahlensystemen zum Grunde liegen, in welchen folgende Multiplikationen richtig sind: 1) $4 \cdot 13 = 100$; 2) $9 \cdot 14 = 100$; 3) $3 \cdot 25 = 111$; 4) $5 \cdot 36 = 144$; 5) $24 \cdot 25 = 666$; 6) $26 \cdot 35 = 888$; 7) $12 \cdot 21 = 1022$; 8) $18 \cdot 81 = 1628$?

106_3. Welche Werte haben die unendlichen Kettenbrüche: 1) mit dem konstanten Quotienten 2; 2) 4; 3) 6; 4) 10; 5) 7; 6) 9; 7) a?

106_4. Welche Werte haben die unendlichen Kettenbrüche mit den periodischen Quotienten: 1) 1, 2; 2) 1, 4; 3) 1, 6; 4) 1, 3; 5) 2, 5; 6) 3, 7; 7) a, b?

106_5. Desgl. die mit den Quotienten: 1) 1, 2, 3; 2) 2, 4, 6; 3) 1, 3, 5; 4) 1, 2, 1, 1, 2, 1 . .; 5) 1, 3, 1, 1, 3, 1 . .?

106_6. Wie verhalten sich die unendlichen Kettenbrüche mit den periodischen Quotienten: 1) 1, 2, 3, 4 und 4, 3, 2, 1; 2) 1, 3, 5, 7 und 7, 5, 3, 1; 3) 2, 4, 6, 8 und 8, 6, 4, 2; 4) a, b, c, d und d, c, b, a?

106_7. Welche Wurzelgrößen liefern bei ihrer Entwickelung in Kettenbrüche die periodischen Quotienten: 1) 6, 2, 2, 12, 2, 2, 12 . .; 2) 4, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8 . .; 3) 7, 1, 6, 1, 14 . .; 4) 6, 1, 2, 2, 2, 1, 12 . .; 5) 7, 1, 2, 7, 2, 1, 14 . .; 6) 5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10 . ., wo die erste Zahl jedesmal die in der Wurzel enthaltenen Ganzen bezeichnet.

Einige Aufgaben über Maxima und Minima.

107. Welche Werte nimmt der Ausdruck $a^2 + x^2$ an, wenn man $a = 7$ und für x der Reihe nach die Werte $+3$, $+2$, $+1$, 0, -1, -2 und -3 setzt, und für welchen Wert von x wird $a^2 + x^2$ ein Minimum?

108. Welche Werte nimmt der Ausdruck $a^2 - x^2$ an, wenn man $a = 5$ und für x der Reihe nach $+3$, $+2$, $+1$, 0, -1, -2 und -3 setzt, und für welchen Wert von x wird der Ausdruck ein Maximum?

109. Welche Regel läßt sich aus Nr. 107. und 108. ableiten, um zu erkennen, für welchen Wert von x ein Ausdruck ein Maximum oder ein Minimum wird?

110. Für welchen Wert von x wird die Summe der Produkte $(a + x)(b + x) + (a - x)(b - x)$ ein Minimum?

111. Für welchen Wert von x wird die Summe $(a + x)(b - x) + (a - x)(b + x)$ ein Maximum?

112. Eine Linie von 100 Fuß Länge in zwei solche Teile zu zerlegen, daß das Rechteck aus denselben ein Maximum werde.

113. Eine Linie von 24 Fuß Länge in zwei solche Teile zu zerlegen, daß die Summe der Quadrate über den Teilen möglichst klein werde.

114. In welche Summanden muß man eine Zahl a zerlegen, daß das Produkt derselben möglichst groß werde?

115. In welche Faktoren muß man eine Zahl a zerlegen, daß die Summe derselben möglichst klein werde?

116. Welches von allen Rechtecken mit gleichem Umfang hat den größten Inhalt?

117. Welches von allen Rechtecken mit gleichem Inhalt hat den kleinsten Umfang?

118. Der Ausdruck $a + bx + x^2$ wird ein Minimum $(a - \frac{1}{4}b^2)$ für $x = -\frac{1}{2}b$; denn $a + bx + x^2 = a - \frac{1}{4}b^2 + (\frac{1}{2}b + x)^2$ u. s. w. nach Nr. 107.

119. Der Ausdruck $a + bx - x^2$ wird ein Maximum $(a + \frac{1}{4}b^2)$ für $x = \frac{1}{2}b$; denn $a + bx - x^2 = a + \frac{1}{4}b^2 - (\frac{1}{2}b - x)^2$ u. s. w. nach Nr. 108.

120. Was wird aus dem Ausdrucke $13 - 5x + x^2$, wenn man für x die Werte 0, 1, 2, 3, 4 setzt, für welchen Wert von x erreicht der Ausdruck sein Minimum, und wie groß ist das Minimum?

121. Was wird aus dem Ausdruck $10 + 7x - x^2$, wenn man für x die Werte 0, 1, 2, 3, 4, 5 setzt, für welchen Wert von x wird derselbe ein Maximum, und wie groß ist dies Maximum?

122. Welchen Wert muß x haben, damit das Prod. $(a - x)(b + x)$ ein Maximum wird?

123. Welches von allen Dreiecken, deren Grundlinie und Höhe in Summe $= a$ sind, hat den größten Inhalt, und wie groß ist dieser?

124. Um wie viel muß man die lange Seite a eines Rechtecks kürzer und die kurze b länger machen, ohne den Umfang zu ändern, damit der Inhalt des Rechtecks ein Maximum wird? Wie groß ist der Inhalt des neuen Rechtecks, und um wie viel übertrifft das neue Rechteck das gegebene?

125. Welchen Wert muß x haben, wenn die Summe der Quadrate der Größen $a - x$ und $b + x$ ein Minimum werden soll?

126. Für welchen Wert von x wird $a + bx + cx^2$ ein Minimum, und wie groß wird dies Minimum? (Reduktion auf 118.)

127. Für welchen Wert von x wird $a + bx - cx^2$ ein Maximum, und wie groß wird dies Maximum? (Reduktion auf 119.)

128. Was wird aus dem Ausdrucke $15 - 7x + 2x^2$, wenn man darin für x die Werte 0, 1, 2, 3, 4 und 5 setzt, für welchen Wert von x erreicht der Ausdruck sein Minimum, und wie groß ist dies Minimum?

129. Was wird aus dem Ausdrucke $(9 - 2x)^2 - (1 - 3x)^2$, wenn man darin für x die Werte 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5 setzt, für welchen Wert von x wird derselbe ein Maximum, und wie groß ist dies Maximum?

130. Welches in einen Kreis mit dem Radius r beschriebene Rechteck hat den größten Inhalt, welches den größten Umfang?

131. Wie ist die Lösung der vorigen Aufgabe, wenn ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a statt des Kreises gegeben ist?

132. Auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien bewegen sich zwei Körper A und B nach den Schnittpunkten hin mit den Geschwindigkeiten von m und n Fuß in der Sekunde. A ist jetzt noch a, B noch b Fuß vom Schnittpunkt entfernt. Wann werden beide Körper sich möglichst nahe kommen, und wie groß wird dann ihre gegenseitige Entfernung sein?

133. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe sein, wenn sich die Linien nicht rechtwinklig, sondern unter einem Winkel von 60 Grad schneiden? (Vgl. S. 210, Nr. 34.)

Eine andere Methode die Maxima und Minima aufzufinden ist folgende: Man setze den betreffenden Ausdruck = y, löse die Gleichung nach x auf und setze die sich ergebende Quadratwurzel = 0, so liefern die Wurzeln dieser Gleichung die Maxima und Minima von y, und der vor der Quadratwurzel stehende Ausdruck die zugehörigen Werte von x. (Beweis!)

Manche Ausdrücke haben weder ein Maximum noch ein Minimum, besonders diejenigen, für welche die Quadratwurzel nicht 0 werden kann (134, b). Kann die Quadratwurzel nur auf eine Weise 0 werden (143), so hat y entweder ein Maximum oder ein Minimum; kann sie auf zweifache Weise 0 werden, so hat y im allgemeinen ein Maximum und ein Minimum zugleich. — Es giebt auch Ausdrücke, welche nur Maxima oder nur Minima haben (134 a). Trigonometrische Functionen haben unzählige Maxima und Minima.

Eine dritte Methode für die Auffindung der Maxima und Minima ist folgende: Man setze den Ausdruck in x gleich demselben Ausdruck in x_1, vereinige die Glieder mit gleichen Koefficienten, hebe durch $x - x_1$, setze $x_1 = x$, so liefert die sich ergebende Gleichung die gesuchten Werte von x. (Beweis!)

Die erste Methode führt bei quadratischen Ausdrücken (135—139) am leichtesten und einfachsten zum Ziel. — Die zweite Methode hat den Vorzug, daß sie gleich zeigt, ob und warum ein Maximum oder Minimum eintritt. Man zerlegt den Radikanden der Quadratwurzel in Faktoren und sieht zu, ob ein größerer oder kleinerer Wert von y den Radikanden negativ, also die Wurzel imaginär macht. — Die dritte Methode ist von den drei angegebenen die allgemeinste und reicht auch für viele Fälle aus, die sich nach den beiden ersten Methoden nicht mehr behandeln lassen. — Noch allgemeiner ist die in XXXVI erörterte Methode.

Die Benennung Maximum und Minimum bezieht sich oft nur auf die zunächst liegenden Werte. Daher kann das Minimum sehr wohl größer sein als das Maximum (134, d). Ist man ungewiß, ob für einen Wert von x, z. B. für x = 7 ein Maximum oder ein Minimum eintritt, so sucht man den Wert des Ausdrucks etwa für x = 6 und x = 8. Sind die angrenzenden Werte kleiner als der fragliche, so

findet ein Maximum statt; sind sie größer, ein Minimum; ist der eine kleiner und der andere größer, keins von beiden. — Bei den Ausdrücken 145—148 findet meist nur ein Maximum oder ein Minimum statt; sonst muß man die Doppeldeutigkeit der Quadratwurzel in Betracht ziehen.

Untersuche nach einer der angegebenen Methoden, ob folgende Ausdrücke ein Maximum oder ein Minimum haben, für welchen Wert von x ein solches eintritt und wie groß dasselbe ist.

134. $x^2 + \frac{16}{x^2}$ $\quad \frac{x^2 - 9}{2x}$ $\quad 3x^2 + \frac{2}{x^3}$ $\quad \frac{3x}{2} + \frac{8}{x^3}$

135. $\frac{x^2 + 3}{x + 1}$ $\quad \frac{x^2 - 5}{x - 3}$ $\quad \frac{x - 4}{x^2 - 7}$ $\quad \frac{x - 2}{x^2 + 5}$

136. $\frac{x^2 + 6x + 9}{3x + 4}$, $\frac{x^2 - 5x + 9}{x - 5}$, $\frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 7}$, $\frac{2x - 5}{x^2 - 6x + 11}$

137. $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 5}$, $\frac{3x^2 + 6x - 1}{x^2 - 2x + 2}$, $\frac{7x^2 + 2x + 3}{9x^2 + 6x - 2}$, $\frac{19 + 2x - x^2}{15 + 6x + x^2}$

138. $\frac{9}{x - 3} - \frac{1}{x - 5}$ $\quad \frac{9}{x - 1} - \frac{4}{x - 6}$

139. $\frac{4}{x - 3} - \frac{16}{x - 7}$ $\quad \frac{25}{7 - x} - \frac{9}{3 - x}$

140. $x^3 - x^2 - 16x + 10$ $\quad x^3 - 13x^2 - 64x + 32$

141. $x^3 - 11x^2 - 16x + 98$, $\quad x^3 - 12x^2 + 45x - 10$

142. $x\sqrt{2x - 3}$, $x : \sqrt{2x - 3}$ $\quad x\sqrt{x^2 - 4}$, $x : \sqrt{x^2 - 4}$

143. $x + \sqrt{3 - 2x}$ $\quad \frac{1}{2}x + \sqrt{5 - x}$

144. $2x + \sqrt{13 - 4x}$ $\quad \frac{1}{2}x - \sqrt{x - 3}$

145. $2x + \sqrt{5 - x^2}$ $\quad 2x - \sqrt{x^2 - 12}$

146. $2x - \sqrt{x^2 - 4x - 23}$ $\quad x + \sqrt{31 + 2x - x^2}$

147. $2x + \sqrt{61 - 16x + x^2}$ $\quad 2x - \sqrt{61 + 16x - x^2}$

148. $x - \sqrt{2x^2 + 10x + 13}$ $\quad 3x + \sqrt{24x - 54 - x^2}$

XXVII.

Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Für die Lösung quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten lassen sich nicht so allgemeine Regeln geben wie für die Lösung der Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren Unbekannten.

Kommen in den Gleichungen nur x^2 und y^2 oder ihre reziproken Werte vor, so verfährt man wie bei den einfachen Gleichungen und bestimmt diese Größen zunächst. Dann hat man auch die Unbekannten selber (Nr. 1.—4.).

Ist die eine Gleichung eine einfache, in welcher also x und y nur in der ersten Potenz vorkommen, so führt die Substitutionsmethode

meistens am einfachsten zum Ziele (Nr. 5., 6. u. s. w.). Ganz so verfährt man, wenn man aus der Kombination beider Gleichungen eine einfache ableiten kann.

Kann man aus einer Gleichung oder aus der Kombination beider $\frac{x}{y}$ finden, so daß z. B. $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ ist, so setzt man am einfachsten $x = mt$ und $y = nt$ und bestimmt zunächst t, womit dann auch x und y gefunden sind (Nr. 41.—46.). Dies Verfahren findet auch Anwendung, wenn $\frac{x+y}{x-y}$ gegeben ist oder gefunden werden kann, da man dann auch $\frac{x}{y}$ kennt (Nr. 47., 48. u. s. w.).

In manchen Fällen ist es unbequem, die Unbekannten direkt zu suchen; man kommt einfacher und leichter zum Ziel, wenn man geeignete Ausdrücke von x und y als neue Unbekannte einführt und zunächst sucht. Solche Ausdrücke von x und y sind $x + y$, $x - y$, $x^2 + y^2$, xy, $\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{x^2+y^2}{xy}$ u. s. w.

Ist $x + y = a$ gegeben oder gefunden, so setzt man am einfachsten $x - y = t$ und bestimmt zunächst t. Man hat $x = \frac{a+t}{2}$ und $y = \frac{a-t}{2}$ für x und y zu substituieren und die für t sich ergebende Gleichung nach t aufzulösen. — Ähnlich verfährt man, wenn $x - y$ gegeben ist.

Ist $x^2 + y^2$ gegeben, so sucht man xy. Dann kann man leicht $x + y$ und $x - y$ finden, also auch x und y selbst. — Ist xy gegeben, so sucht man $x^2 + y^2$ zunächst.

Kommt in einer Gleichung ein Ausdruck von x und y und sein reziproker Wert vor, so setzt man den Ausdruck gleich einer neuen Unbekannten u und bestimmt zunächst u. So läßt sich aus $a\frac{x}{y} + b\frac{y}{x} = c$ der Quotient $\frac{x}{y}$ finden. Ebenso läßt sich $\frac{x}{y}$ finden aus Gleichungen von der Form

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$$

$$ax^2 + by^2 = cxy$$

$$\frac{mx^2 + nxy + py^2}{m_1x^2 + n_1xy + p_1y^2} = \frac{a}{b}$$

Ist $\frac{x}{y}$ bestimmt, so hat die Auflösung keine Schwierigkeit mehr. Oft ist es freilich nötig, um das Resultat in einer möglichst einfachen Form zu erhalten, den Quotienten $\frac{x}{y}$ zunächst auf eine geeignete Form zu bringen. Darüber sehe man A. G. S. 61 ff.

Wie man aus der Gleichung

$$\frac{mx^4 + nx^3y + px^2y^2 + nxy^3 + my^4}{m_1x^4 + n_1x^3y + p_1x^2y^2 + n_1xy^3 + m_1y^4} = \frac{a}{b}$$

den Quotienten $\frac{x}{y}$ findet und ihn in einer geeigneten Form darstellt, darüber sehe man A. G. S. 215 ff.

Auch die Zerlegung der Gleichungen leistet oft wesentliche Dienste. So zerfällt bei Nr. 39. die zweite Gleichung in 1) $x - 2 = 0$ und 2) $y - 1 = 0$. Beide Gleichungen sind der Reihe nach mit der ersten zu kombinieren.

Erste Stufe.

1. $\left| \begin{array}{l} 5x^2 + 2y^2 = 22 \\ 3x^2 - 5y^2 = 7 \end{array} \right|$ 2. $\left| \begin{array}{l} 2x^2 - 3y^2 = 6 \\ 3x^2 - 2y^2 = 19 \end{array} \right|$

3. $\left| \begin{array}{l} ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2) \\ bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2 \end{array} \right|$ 4. $\left| \begin{array}{l} \frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2} = a^2 + b^2 \\ \frac{b}{x^2} + \frac{a}{y^2} = a^2 + b^2 \end{array} \right|$

5. $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 40 \\ x = 3y \end{array} \right|$ 6. $\left| \begin{array}{l} 3x - y = 5 \\ xy - x = 0 \end{array} \right|$

7. $\left| \begin{array}{l} xy = 12 \\ 2x + 3y = 18 \end{array} \right|$ 8. $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 50 \\ 9x + 7y = 70 \end{array} \right|$

9. $\left| \begin{array}{l} 5x^2 + y = 3xy \\ 2x - y = 0 \end{array} \right|$ 10. $\left| \begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 2x - 3y = 0 \end{array} \right|$

11. $\left| \begin{array}{l} 3x^2 - 4y = 5x - 2y^2 \\ 3x + 4y = 10 \end{array} \right|$ 12. $\left| \begin{array}{l} (x + y)(x - 2y) = 7 \\ x - y = 3 \end{array} \right|$

13. $\left| \begin{array}{l} (3x - 2y)(2x - 3y) = 26 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{array} \right|$

14. $\left| \begin{array}{l} x^2 + 2xy - y^2 = 7(x - y) \\ 2x - y = 5 \end{array} \right|$

15. $\left| \begin{array}{l} 2x^2 - 5xy + y^2 + 10x + 12y = 100 \\ 2x - 3y = 1 \end{array} \right|$

16. $\left| \begin{array}{l} 7(x + 5)^2 - 9(y + 4)^2 = 118 \\ x - y = 1 \end{array} \right|$

17. $\left| xy = (3 - x)^2 = (2 - y)^2 \right|$

18. $\left| xy = x^2 - y^2 = 2(x + y) \right|$

19. $\left| \begin{array}{l} \frac{3x - 2}{y + 5} + \frac{y}{x} = 2 \\ x - y = 4 \end{array} \right|$ 20. $\left| \begin{array}{l} \frac{2x - 5}{x - 2} + \frac{2y - 3}{y - 1} = 2 \\ 3x - 4y = 1 \end{array} \right|$

21. $\left|\begin{array}{l} \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1} = \frac{8}{3} \\ x^2 - 3xy + y^2 = 5 \end{array}\right|$ 22. $\left|\begin{array}{l} \frac{2x - 1}{x + 1} + \frac{y + 3}{y + 1} = 3 \\ x^2 + y^2 = 2x + y \end{array}\right|$

23. $\left|\begin{array}{c} \frac{1 + x + x^2}{1 + y + y^2} = 3 \\ x + y = 6 \end{array}\right|$ 24. $\left|\begin{array}{c} \frac{x^2 + y + 1}{y^2 + x + 1} = \frac{3}{2} \\ x - y = 1 \end{array}\right|$

25. $\left|\begin{array}{c} \frac{4x + y + 3}{2x + y} - \frac{y + 7}{x + 3} = 1 \\ x + y = 10 \end{array}\right|$

26. $\left|\begin{array}{c} \frac{4x + y - 1}{2x + y - 1} - \frac{4x + y - 12}{2x + y - 12} = 3\frac{2}{3} \\ 3x + y = 13 \end{array}\right|$

27. $\left|\begin{array}{l} x + xy = 35 \\ y + xy = 32 \end{array}\right|$ 28. $\left|\begin{array}{l} x(y - 1) = 10 \\ y(x - 1) = 12 \end{array}\right|$

29. $\left|\begin{array}{l} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ x^2 - y^2 + x - y = 6 \end{array}\right|$ 30. $\left|\begin{array}{l} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 10 \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = 10 \end{array}\right|$

31. $\left|\begin{array}{l} 5x + y + 3 = 2xy \\ xy = 2x - y + 9 \end{array}\right|$ 32. $\left|\begin{array}{l} (x + y)(8 - x) = 10 \\ (x + y)(5 - y) = 20 \end{array}\right|$

33. $\left|\begin{array}{l} (x - 1)(y + 5) = 100 \\ (x - 2)(y + 6) = 99 \end{array}\right|$ 34. $\left|\begin{array}{l} (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 17 \\ (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 13 \end{array}\right|$

35. $\left|\begin{array}{l} (x - 4)(y + 5) = 0 \\ (x + 2)(y - 3) = 0 \end{array}\right|$ 36. $\left|\begin{array}{l} (x + 4)(y - 3) = 0 \\ (x + 7)(y - 7) = 0 \end{array}\right|$

37. $\left|\begin{array}{r} 3x^2 - 2y^2 = 6(x - y) \\ xy = 0 \end{array}\right|$ 38. $\left|\begin{array}{l} 4x^2 - 9y^2 = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 8(x + y) \end{array}\right|$

39. $\left|\begin{array}{l} 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0 \\ (x - 2)(y - 1) = 0 \end{array}\right|$

40. $\left|\begin{array}{l} x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0 \\ (x - 3)(y - 2) = y^2 - 3y + 2 \end{array}\right|$

41. $\left|\begin{array}{c} xy + 72 = 6(2x + y) \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \end{array}\right|$ 42. $\left|\begin{array}{c} x(x - y) - 5y = 6 \\ \frac{x}{x - y} = 3\frac{1}{2} \end{array}\right|$

43. $\left| \begin{array}{l} x : y = 9 : 4 \\ x : 12 = 12 : y \end{array} \right|$

44. $\left| \begin{array}{c} x^2 + y = y^2 + x - 18 \\ x : y = 2 : 3 \end{array} \right|$

45. $\left| \begin{array}{c} x^2 + y^2 = a^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{m}{n} \end{array} \right|$

46. $\left| \begin{array}{l} xy = a \\ \frac{x}{y} = b \end{array} \right|$

47. $\left| \begin{array}{c} x^2 + y^2 = 130 \\ \frac{x+y}{x-y} = 8 \end{array} \right|$

48. $\left| \begin{array}{c} (3x - y)(3y - x) = 36 \\ \frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{2} \end{array} \right|$

49. $\left| \begin{array}{c} 3(x+y)^2 - 2(x-y)^2 = 73(x-y) \\ (2x - y) : (4x - 3y) = 2 : 3 \end{array} \right|$

50. $\left| \begin{array}{c} ax^2 + (a-b)xy - by^2 = c^2 \\ (x+y) : (x-y) = a : b \end{array} \right|$

51. $\left| \begin{array}{l} ax - by = cy \\ a^2x^2 - b^2y^2 = acxy + m^2 \end{array} \right|$

52. $\left| \begin{array}{l} x^2 : y^2 = a^2 : b^2 \\ a - x = b - y \end{array} \right|$

53. $\left| \begin{array}{l} \frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2} = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{c} \end{array} \right|$

54. $\left| \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \\ \frac{bx + ay}{bx - ay} = \frac{m}{n} \end{array} \right|$

55. $\left| \begin{array}{l} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{a}{b} \\ xy = (a^2 - b^2)^2 \end{array} \right|$

56. $\left| \begin{array}{l} \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}} = \frac{a}{b} \\ x^3 - c^3 = c^3 - y^3 \end{array} \right|$

57. $\left| \begin{array}{l} x^2 + xy = a \\ y^2 + xy = b \end{array} \right|$

58. $\left| \begin{array}{l} x^3 + xy^2 = a \\ y^3 + x^2y = b \end{array} \right|$

59. $\left| \begin{array}{l} x^2y = a \\ xy^2 = b \end{array} \right|$

60. $\left| \begin{array}{l} x^2y + xy^2 = a \\ x^2y - xy^2 = b \end{array} \right|$

61. $\left| \begin{array}{l} x = a(x^2 + y^2) \\ y = b(x^2 + y^2) \end{array} \right|$

62. $\left| \begin{array}{l} x(x^3 + y^3) = a \\ y(x^3 + y^3) = b \end{array} \right|$

63. $\left| \begin{array}{l} x\sqrt{x+y} = a \\ y\sqrt{x+y} = b \end{array} \right|$

64. $\left| \begin{array}{l} x\sqrt[3]{x^2 + y^2} = a \\ y\sqrt[3]{x^2 + y^2} = b \end{array} \right|$

65. $\left| \begin{array}{l} (x+y)(x^2+y^2) = a \\ (x-y)(x^2+y^2) = b \end{array} \right|$

66. $\left| \begin{array}{l} x + y = a(x^2 + y^2) \\ x - y = b(x^2 + y^2) \end{array} \right.$

67. $\left| \; a(x-y) = b(x+y) = xy \; \right|$

68. $\left| \; a(x-y) = b(x+y) = x^2 + y^2 \; \right|$

69. $\left| \begin{array}{l} x^3 + y^3 = (a + b)(x - y)^2 \\ x^2 - xy + y^2 = (a - b)(x - y) \end{array} \right|$

70. $\left| \begin{array}{l} (x - y)(x + y)^2 = a \\ (x + y)(x - y)^2 = b \end{array} \right|$ 71. $\left| \begin{array}{l} (x + y)(x^2 + 3y^2) = a \\ (x - y)(x^2 + 3y^2) = b \end{array} \right|$

72. $\left| \begin{array}{l} x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = \frac{a}{x + y} \\ x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = \frac{b}{x - y} \end{array} \right|$

73. $\left| \begin{array}{l} x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = a^2(x - y) \\ x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = b^2(x + y) \end{array} \right|$

74. $\left| \begin{array}{l} x^2(1 + y + y^2 + y^3) = a \\ x^2(1 - y + y^2 - y^3) = b \end{array} \right|$

75. $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = a \\ xy = b \end{array} \right|$ 76. $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 130 \\ xy = 63 \end{array} \right|$

77. $\left| \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 40 \\ xy = 21 \end{array} \right|$ 78. $\left| \begin{array}{l} x^n + y^n = 2a \\ xy = b \end{array} \right|$

79. $\left| \begin{array}{l} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{array} \right|$ 80. $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 250 \\ x - y = 4 \end{array} \right|$

81. $\left| \begin{array}{l} x + y = a \\ xy = b \end{array} \right|$ 82. $\left| \begin{array}{l} x - y = 5 \\ xy = 36 \end{array} \right|$

83. $\left| \begin{array}{l} x + y = 58 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{array} \right|$ 84. $\left| \begin{array}{l} x + y = a \\ x^2 + y^2 = mxy \end{array} \right|$

85. $\left| \begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 = 2a \\ x^2 - xy + y^2 = 2b \end{array} \right|$ 86. $\left| \begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = 39 \\ 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 43 \end{array} \right|$

87. $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 5(x + y) = 8 \\ x^2 + y^2 - 3(x + y) = 28 \end{array} \right|$ 88. $\left| \begin{array}{l} 3xy - 2(x + y) = 28 \\ 2xy - 3(x + y) = 2 \end{array} \right|$

89. $\left| \begin{array}{l} x + xy + y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{array} \right|$ 90. $\left| \begin{array}{l} x + xy + y = 11 \\ x^2 + x^2y^2 + y^2 = 49 \end{array} \right|$

91. $\left| \begin{array}{l} (x + y)^2 - 4(x + y) = 45 \\ (x - y)^2 - 2(x - y) = 3 \end{array} \right|$

92. $\left| \begin{array}{l} (2x - y)^2 - 12(2x - y) = 189 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 - 3x + 6y = 54 \end{array} \right|$

93. $\left| \begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = 13(x-y) \\ xy = 12 \end{array} \right|$ 94. $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2(x-y) = 38 \\ xy + 3(x-y) = 25 \end{array} \right|$

95. $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 + x - y = 12 \\ 2xy = 3(x-y) \end{array} \right|$ 96. $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 12 = x + y \\ xy + 8 = 2(x+y) \end{array} \right|$

97. $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ x - y = 0{,}3 \end{array} \right|$ 98. $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \\ x^2 + y^2 = 160 \end{array} \right|$

99. $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4} \end{array} \right|$ 100. $\left| \begin{array}{l} \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1 \\ \frac{ax}{m} + \frac{by}{n} = 1 \end{array} \right|$

101. $\left| \begin{array}{l} x\left(1 + \frac{x}{y}\right) = a \\ y\left(1 + \frac{y}{x}\right) = b \end{array} \right|$ 102. $\left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{y+1} = 2 \\ \frac{x^2+1}{y^2+1} = 5 \end{array} \right|$

103. $\left| \begin{array}{l} x + y = a \\ x^3 + y^3 = b \end{array} \right|$ 104. $\left| \begin{array}{l} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = a \\ x + y = b \end{array} \right|$

105. $\left| \begin{array}{l} ax + by = c \\ a^3x^3 + b^3y^3 = abxy \end{array} \right|$ 106. $\left| \begin{array}{l} x^3 + 3xy^2 = a \\ y^3 + 3x^2y = b \end{array} \right|$

107. $\left| \begin{array}{l} x + y^2 = ax \\ x^2 + y = by \end{array} \right|$ 108. $\left| \begin{array}{l} ax^2 + by^2 = cx^3 \\ cx^2 - dy^2 = ax \end{array} \right|$

109. $\left| \begin{array}{l} x^2 + ay^2 = \frac{a+1}{a-1} \\ ax^2 + y^2 = (a^2-1)y \end{array} \right|$ 110. $\left| \begin{array}{l} \frac{x^3+y^3}{x-y} = \frac{a^3+b^3}{a-b} \\ x + y = a + b \end{array} \right|$

111. $\left| \begin{array}{l} \frac{x-1}{y-1} = \frac{a-1}{b-1} \\ \frac{x^3-1}{y^3-1} = \frac{a^3-1}{b^3-1} \end{array} \right|$ 112. $\left| \begin{array}{l} x = 10 \cdot \frac{y-1}{y+1} \\ y = \frac{9}{2} \cdot \frac{x-1}{x+1} \end{array} \right|$

113. $\left| \begin{array}{l} \frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = a \\ \frac{(1+x)(1-y)}{(1-x)(1+y)} = b \end{array} \right|$ 114. $\left| \begin{array}{l} xy + \frac{x}{y} = a(x^2+y^2) \\ xy - \frac{x}{y} = b(x^2+y^2) \end{array} \right|$

115. $\left| \begin{array}{l} (x^2+y^2)\frac{x+y}{x-y} = a^2 \\ (x^2+y^2)\frac{x-y}{x+y} = b^2 \end{array} \right|$ 116. $\left| \begin{array}{l} \frac{x^2-xy+y^2}{x-y} = a \\ \frac{x^2+xy+y^2}{x+y} = b \end{array} \right|$

117. $x^2 - xy + y^2 = \sqrt[3]{a^2 - ab + b^2}$
$x^3 + y^3 = a + b$

118. $x + \sqrt[3]{x^2 y} = a$
$y + \sqrt[3]{x y^2} = b$

119. $\sqrt{x - 5} + \sqrt{y + 2} = 5$
$x + y = 16$

120. $\sqrt{5 - 3x + x^2} + \sqrt{5 - 3y + y^2} = 6$
$x + y = 3$

121. $\sqrt{3 - x + \frac{1}{4}x^2} + \sqrt{3 - y + \frac{1}{4}y^2} = 3$
$x + y = 4$

122. $\sqrt{x(1 - y)} + \sqrt{y(1 - x)} = a$
$x + y = b$

Zweite Stufe.

1. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12}$
$x^2 - y^2 = 28$

2. $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{16}{15}$
$3x^2 + 5y^2 = 120$

3. $3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0$
$x^2 + y^2 + 13(x - y) = 0$

4. $2x^2 - 3xy + y^2 = 3$
$x^2 + 2xy - 3y^2 = 5$

5. $(2x + 3y)(x - y) = 58$
$(3x - 2y)(x + y) = 132$

6. $(5x + 3y)(3x - 5y) = 72$
$(4x - y)(x + 4y) = 77$

7. $x^2 - xy + y^2 = 37$
$x^2 - y^2 = 40$

8. $(x + y)^2 = 3x^2 - 2$
$(x - y)^2 = 3y^2 - 11$

9. $x^2 - 2xy + 3y^2 = 3(x - y)$
$2x^2 + xy - y^2 = 9(x - y)$

10. $2x^2 - 3xy = 9(x - 2y)$
$x^2 - 3y^2 = 6(x - 2y)$

11. $(5x - 7y)^2 = 49(x - y)$
$(3x - 5y)^2 = 9(x - y)$

12. $(x + 2y)(x + 3y) = 3(x + y)$
$(2x + y)(3x + y) = 28(x + y)$

13. $(2x - 3y)(3x + 4y) = 39(x - 2y)$
$(3x + 2y)(4x - 3y) = 99(x - 2y)$

14. $\left| x^2 + y^2 = xy = x + y \right|$

15. $\left| x^2 + y^2 = 10xy - 5(x + y) = 5(xy - 1) \right|$

16. $\left| x^3 + y^3 = 7xy = 28(x + y) \right|$

17. $\left| x^3 + y^3 = 4x^2 - \frac{3}{4}xy + 4y^2 = 13(x + y) \right|$

18. $$\left| \begin{array}{l} 19x^2 - 26xy + 19y^2 = 91 \\ 47x^2 - 26xy + 47y^2 = 91(x + y) \end{array} \right|$$

19. $$\left| \begin{array}{c} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{a}{b} \\ x^3 + y^3 = 2b \end{array} \right|$$

20. $$\left| \begin{array}{c} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = a \\ 4x^4 + 7x^2y^2 + 4y^4 = 16 \end{array} \right|$$

21. $$\left| \begin{array}{c} (x^2 + y^2)(x + y) = a \\ xy(x + y) = b \end{array} \right|$$

22. $$\left| \begin{array}{c} x^3 + y^3 = a(x^2 + y^2) \\ x^2y + xy^2 = b(x^2 + y^2) \end{array} \right|$$

23. $$\left| x^2 + xy + y^2 = \frac{a}{x^2 + y^2} = \frac{b}{xy} \right|$$

24. $$\left| (x + y)(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}b\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = a \right|$$

25. $$\left| \begin{array}{l} x^4 + x^2y^2 + y^4 = a \\ x^2 + xy + y^2 = \frac{b}{xy} \end{array} \right|$$

26. $$\left| \begin{array}{l} x^4 - x^2y^2 + y^4 = 4a \\ x^2 - xy + y^2 = \frac{2b}{xy} \end{array} \right|$$

27. $$\left| \begin{array}{l} (x + y)(x^2 - y^2) = a \\ (x - y)(x^2 + y^2) = b \end{array} \right|$$

28. $$\left| \begin{array}{l} (x + y)(x^2 + y^2) = a \\ (x - y)(x^2 - y^2) = b \end{array} \right|$$

29. $$\left| \begin{array}{l} (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = a \\ (x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = b \end{array} \right|$$

30. $$\left| \begin{array}{l} x^3 - y^3 = \frac{a}{x + y} \\ x^3 + y^3 = \frac{b}{x - y} \end{array} \right|$$

31. $$\left| \begin{array}{l} x^3 - y^3 = a\sqrt{\frac{x - y}{x + y}} \\ x^3 + y^3 = b\sqrt{\frac{x + y}{x - y}} \end{array} \right|$$

32. $$\left| \begin{array}{c} (a - x)^2 - 2(b - y)^2 = (a - x)(b - y) \\ x - y = 3(a - b) \end{array} \right|$$

33. $$\left| \begin{array}{l} (a - x)^2 + (b - y)^2 = c \\ (a - x)(b - y) = m \end{array} \right|$$

34. $$\left| \begin{array}{l} (7 + x)^2 + (5 - y)^2 = 109 \\ (7 + x)(5 - y) = 30 \end{array} \right|$$

35. $$\left| \begin{array}{l} \frac{a - x}{b - y} + \frac{b - y}{a - x} = \frac{34}{15} \\ x - y = 3(a - b) \end{array} \right|$$

36. $$\left| \begin{array}{c} \frac{x - 3}{8 - y} + \frac{y - 8}{x - 3} = \frac{16}{15} \\ x + y = 13 \end{array} \right|$$

37. $\left| \begin{array}{l} x + y = a \\ \dfrac{x}{b-y} + \dfrac{b-y}{x} = \dfrac{5}{2} \end{array} \right|$ 38. $\left| \begin{array}{l} x - y = m \\ \dfrac{(a-x)^2 + y^2}{(a-x)\,y} = \dfrac{13}{6} \end{array} \right|$

39. $\left| \begin{array}{c} \dfrac{(a-x)^2 + (a-x)\,y + y^2}{(a-x)^2 - (a-x)\,y + y^2} = \dfrac{49}{19} \\ x - y = b \end{array} \right|$

40. $\left| \begin{array}{l} x^2 y = (a-x)^3 \\ x y^2 = (b-y)^3 \end{array} \right|$ 41. $\left| \begin{array}{l} x^3 = (a-x)^2 (b-y) \\ y^3 = (a-x)(b-y)^2 \end{array} \right|$

42. $\left| \begin{array}{l} x + y = a \\ x^4 + y^4 = b \end{array} \right|$ 43. $\left| \begin{array}{l} x + y = a \\ x^5 + y^5 = b \end{array} \right|$

44. $\left| \begin{array}{l} x + y = a \\ \dfrac{x^3}{y} + \dfrac{y^3}{x} = b \end{array} \right|$ 45. $\left| \begin{array}{l} x + y = a \\ \dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{y^3}{x^2} = b \end{array} \right|$

46. $\left| \begin{array}{l} \dfrac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \dfrac{121}{13} \\ x + y = 2 \end{array} \right|$ 47. $\left| \begin{array}{l} \dfrac{x^5 + y^5}{x^4 + y^4} = \dfrac{122}{41} \\ x + y = 4 \end{array} \right|$

48. $\left| \begin{array}{l} x + y = a \\ (m+x)^3 + (n+y)^3 = b \end{array} \right|$ 49. $\left| \begin{array}{c} \sqrt[3]{m+x} + \sqrt[3]{n+y} = a \\ x + y = b \end{array} \right|$

50. $\left| \begin{array}{l} x - y = 3 \\ (x-4)^3 + (7-y)^3 = 72 \end{array} \right|$ 51. $\left| \begin{array}{l} x + y = 444 \\ \sqrt[3]{x+10} + \sqrt[3]{y+14} = 12 \end{array} \right|$

52. $\left| \begin{array}{l} x + y = 3 \\ (x-1)^4 + (y+1)^4 = 17 \end{array} \right|$ 53. $\left| \begin{array}{l} x - y = 1 \\ \sqrt[4]{6+x} + \sqrt[4]{10-y} = 3 \end{array} \right|$

54. $\left| \begin{array}{l} x + y = 2 \\ (x+1)^5 + (y-2)^5 = 211 \end{array} \right|$ 55. $\left| \begin{array}{l} x - y = 50 \\ \sqrt[5]{143+x} - \sqrt[5]{y-18} = 1 \end{array} \right|$

56. $\left| \begin{array}{c} (x^2 - y + 1)(y^2 - x + 1) = 16 \\ x + y = 5 \end{array} \right|$

57. $\left| \begin{array}{c} (x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1) = 3 \\ (x+1)(y+1) = 6 \end{array} \right|$

58. $\left| \begin{array}{l} x^2 + y = 5(x-y) \\ x + y^2 = 2(x-y) \end{array} \right|$ 59. $\left| \begin{array}{l} x + y^2 = a(x^2 - y^2) \\ x^2 + y = b(x^2 - y^2) \end{array} \right|$

60. $\left| x^2 + y = x + y^2 = 4\tfrac{1}{3}\,xy \right|$

61. $\left| x^2 + y = x + y^2 = \tfrac{13}{10}(x^2 + y^2) \right|$

62. $$\begin{array}{|l|} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5 \end{array}$$

63. $$\begin{array}{|l|} x^2 - xy + y^2 = 2a \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 2b \end{array}$$

64. $$\begin{array}{|r|} x^4 + x^2y^2 + y^4 = \frac{ax - by}{x^2 - y^2} \\ xy\,(x^2 + y^2) = \frac{ay - bx}{x^2 - y^2} \end{array}$$

65. $$\begin{array}{|c|} x\,(x + y)\,(x + 2y)\,(x + 3y) = 120 \\ 2x + 3y = 7 \end{array}$$

66. $$\begin{array}{|c|} x^4 + y^4 = 2a(x^2 + y^2) \\ xy = b \end{array}$$

67. $$\begin{array}{|l|} x^2 + y^2 = a \\ x^4 + y^4 = 2bxy \end{array}$$

68. $$\begin{array}{|l|} x^2 + y^2 = a \\ \frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = b \end{array}$$

69. $$\begin{array}{|l|} xy = 2a \\ \frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = 2b \end{array}$$

70. $$\begin{array}{|l|} x^2 + y^2 = a \\ \frac{x^3 + y^3}{x^3 - y^3} = b \cdot \frac{x - y}{x + y} \end{array}$$

71. $$\begin{array}{|l|} x^2 + y^2 = m \\ \frac{x^3}{y^3} = \frac{bx - ay}{ax - by} \end{array}$$

72. $$\begin{array}{|l|} x^4 + y^4 = a(x + y)^2 \\ xy = b\,(x + y) \end{array}$$

73. $$\begin{array}{|l|} x^4 + y^4 = 2a\,(x + y)^2 \\ x^2 + y^2 = 2b(x + y) \end{array}$$

74. $$\begin{array}{|l|} x^2 - y^2 = a \\ \frac{x + y}{x - y} = \frac{c}{x^2 + y^2} \end{array}$$

75. $$\begin{array}{|l|} x^2 - y^2 = a \\ \frac{x^3 + y^3}{x - y} = c \end{array}$$

76. $$\begin{array}{|l|} \frac{x + x^2}{y + y^2} = 4\frac{2}{3} \\ \frac{y + x^2}{x + y^2} = 3\frac{1}{4} \end{array}$$

77. $$\begin{array}{|l|} \frac{1 + x + x^2}{1 + y + y^2} = 4\frac{1}{3} \\ \frac{1 + y + x^2}{1 + x + y^2} = 3\frac{4}{13} \end{array}$$

78. $$\begin{array}{|l|} \frac{x + 1}{y + 1} = \frac{2}{3}\left(\frac{x - 1}{y - 1}\right) \\ \frac{x^2 + x + 1}{y^2 + y + 1} = \frac{13}{28}\left(\frac{x - 1}{y - 1}\right)^2 \end{array}$$

79. $$\begin{array}{|l|} \frac{x + 1}{y + 1} = \frac{3}{4}\left(\frac{x - 1}{y - 1}\right) \\ \frac{x^2 + x + 1}{y^2 + y + 1} = \frac{31}{39}\left(\frac{x^2 - x + 1}{y^2 - y + 1}\right) \end{array}$$

80. $$\begin{array}{|l|} \frac{(1 + x)\,(1 + y)}{(1 - x)\,(1 - y)} = 3 \\ \frac{(1 + x^2)\,(1 + y^2)}{(1 - x^2)\,(1 - y^2)} = \frac{65}{48} \end{array}$$

81. $\left|\begin{array}{l}\frac{y(1+x^2)}{x(1+y^2)} = a \\ \frac{y(1-x^2)}{x(1-y^2)} = b\end{array}\right|$

82. $\left|\begin{array}{l}\frac{y(1+x^2)}{x(1+y^2)} = \frac{5}{3} \\ \frac{y^2(1+x^4)}{x^2(1+y^4)} = \frac{41}{9}\end{array}\right|$

83. $\left|\begin{array}{l}\frac{x+y}{x-y} = \frac{3}{2}xy \\ \frac{xy+1}{xy-1} = \frac{3x}{2y}\end{array}\right|$

84. $\left|\begin{array}{l}\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{x-y}{a} \\ \frac{x}{y} \cdot \frac{m^2+xy}{m^2-xy} = c^2\end{array}\right|$

85. $\left|\begin{array}{l}\frac{x^2+y^2}{xy} = a \\ \frac{1+x^2y^2}{xy} = b\end{array}\right|$

86. $\left|\begin{array}{l}\frac{x+y}{1+xy} = a \\ \frac{x-y}{1-xy} = b\end{array}\right|$

87. $\left|\begin{array}{l}\frac{x+y}{1+xy} = \frac{2a}{1+a^2} \\ \frac{x-y}{1-xy} = \frac{2b}{1+b^2}\end{array}\right|$

88. $\left|\begin{array}{l}\frac{x+y}{1+xy} = \frac{a^2-m^2}{a^2+m^2} \\ \frac{x-y}{1-xy} = \frac{b^2-n^2}{b^2+n^2}\end{array}\right|$

89. $\left|\begin{array}{l}\frac{x+y}{1-xy} = \frac{2a}{1-a^2} \\ \frac{x-y}{1+xy} = \frac{2b}{1-b^2}\end{array}\right|$

90. $\left|\begin{array}{l}\frac{x+y}{1-xy} = 31 \\ \frac{x-y}{1+xy} = \frac{11}{29}\end{array}\right|$

91. $\left|\begin{array}{l}\frac{x+y}{1+xy} = \frac{1}{2} \\ \frac{x^2+xy+y^2}{1+xy+x^2y^2} = \frac{49}{241}\end{array}\right|$

92. $\left|\begin{array}{l}\sqrt{xy} + \sqrt{(1-x)(1-y)} = a \\ \sqrt{x(1-y)} + \sqrt{y(1-x)} = b\end{array}\right|$

93. $\left|\begin{array}{l}xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = a \\ x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-b^2}\end{array}\right|$

94. $\left|\begin{array}{l}\sqrt{x(1-y)} + \sqrt{y(1-x)} = a \\ \sqrt{x(1-x)} + \sqrt{y(1-y)} = b\end{array}\right|$

Dritte Stufe.

1. $\left|\begin{array}{l}\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} = a^2 - 2ab - b^2 \\ x^2 + xy + y^2 = ab\end{array}\right|$

2. $\left| \begin{array}{l} x^4 + y^4 = (2a^2 - b^2)(x^2 + y^2) \\ x^2 + xy + y^2 = a(2a - b) \end{array} \right|$

3. $\left| \frac{x^3 + y^3}{a^3 + b^3} = \frac{a - b}{x - y} = \frac{x + y}{a + b} \right|$

4. $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \end{array} \right|$ 5. $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \\ x^2y + xy^2 = a^2b + ab^2 \end{array} \right|$

6. $\left| \begin{array}{l} x + y = a + b \\ \frac{x^3 + y^3}{a^3 + b^3} = \frac{x - y}{a - b} \end{array} \right|$ 7. $\left| \begin{array}{l} x + y = a + b \\ \frac{x^4 + y^4}{a^4 + b^4} = \left(\frac{x - y}{a - b}\right)^2 \end{array} \right|$

8. $\left| \begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = a^2 - ab + b^2 \\ \frac{x^5 + y^5}{a^5 + b^5} = \frac{x^3 + y^3}{a^3 + b^3} \end{array} \right|$

9. $\left| \begin{array}{l} \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} \\ \frac{x^5 - y^5}{x^4 - y^4} = \frac{a^5 - b^5}{a^4 - b^4} \end{array} \right|$ 9_1. $\left| \begin{array}{l} \frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2} = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2} \\ \frac{x^4 + y^4}{x^3 - y^3} = \frac{a^4 + b^4}{a^3 - b^3} \end{array} \right|$

10. $\left| \begin{array}{l} (x + y)^3 = a(x^2 + y^2) \\ xy = b(x + y) \end{array} \right|$ 11. $\left| \begin{array}{l} x^2 - y^2 = a \\ 4xy(x^2 + y^2) = b \end{array} \right|$

12. $\left| \begin{array}{l} xy(x + y) = a \\ x^5 + y^5 = bxy \end{array} \right|$ 13. $\left| \begin{array}{l} xy(x + y) = a \\ x^5y^5(x^5 + y^5) = b \end{array} \right|$

14. $\left| \begin{array}{l} x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = a \\ x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = b \end{array} \right|$

15. $\left| \begin{array}{l} x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = a \\ x^8 + x^6y^2 + x^4y^4 + x^2y^6 + y^8 = b \end{array} \right|$

16. $\left| \begin{array}{l} (x + y)^4 = a(x^2 + y^2) \\ x^4 + y^4 = b(x^2 + y^2) \end{array} \right|$ 17. $\left| \begin{array}{l} (x + y)^4 = 2axy \\ x^4 + y^4 = 2bxy \end{array} \right|$

18. $\left| \begin{array}{l} x^3 + y^3 = axy \\ x^5 + y^5 = bx^2y^2 \end{array} \right|$ 19. $\left| \begin{array}{l} x^4 + y^4 = a(x + y)^2 \\ x^5 + y^5 = b(x + y)^3 \end{array} \right|$

20. $\left| \begin{array}{l} \frac{x^2 + y^2}{x + y} = a \\ \frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} = b \end{array} \right|$ 21. $\left| \begin{array}{l} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = a \\ \frac{x^5 - y^5}{x^4 - y^4} = b \end{array} \right|$

22. $\left| \begin{array}{l} (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = a \\ (x + y)(x^4 + y^4) = b \end{array} \right|$ 23. $\left| \begin{array}{l} (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = axy \\ (x + y)(x^4 + y^4) = bxy \end{array} \right|$

24. $\left| \begin{array}{l} (x+y)^5 = 10a(x^3+y^3) \\ x^5+y^5 = 10b(x^3+y^3) \end{array} \right|$ 25. $\left| \begin{array}{l} x^5+y^5 = a(x^3+y^3) \\ x^2y^2(x+y) = b(x^3+y^3) \end{array} \right|$

26. $\left| \begin{array}{c} (x-y)(x^2-y^2)(x^3-y^3)(x^4-y^4) = a \\ (x+y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2) = b \end{array} \right|$

27. $\left| \begin{array}{l} (x-y)^2(x^2-y^2)(x^4-y^4) = a \\ (x+y)^2(x^2+y^2)(x^4+y^4) = b \end{array} \right|$

28. $\left| \begin{array}{l} (x+y)(x^3+y^3) = axy \\ (x-y)(x^3-y^3) = bxy \end{array} \right|$ 29. $\left| \begin{array}{l} (x+y)(x^3+y^3) = 4a \\ (x-y)(x^3-y^3) = 4b \end{array} \right|$

30. $\left| \begin{array}{l} (x+y)^2(x^2+xy+y^2) = 3a(x^2+y^2) \\ (x-y)^2(x^2-xy+y^2) = 3b(x^2+y^2) \end{array} \right|$

31. $\left| \begin{array}{c} (x^2+xy+y^2)(x+y)^2 = a(5x^2+7xy+5y^2) \\ x^4+y^4 = b(5x^2+7xy+5y^2) \end{array} \right|$

32. $| axy(x^2+y^2) = ab(x^3+y^3) = b(x^4+y^4) |$

33. $| a(x^5+y^5) = ab(x^4+y^4) = bxy(x^3+y^3) |$

34. $| a(x^5+y^5) = ab(x+y) = bxy(x^3+y^3) |$

35. $\left| \begin{array}{l} (x+y)^2(x^2+xy+y^2) = 12a \\ (x-y)^2(x^2-xy+y^2) = 12b \end{array} \right|$

36. $\left| \begin{array}{l} x^4 = ax+by \\ y^4 = bx+ay \end{array} \right|$ 37. $\left| \begin{array}{l} x^5 = 2ax-by \\ y^5 = 2ay-bx \end{array} \right|$

38. $\left| \begin{array}{l} (x+y)(x^4+y^4) = a \\ (x-y)(x^4-y^4) = b \end{array} \right|$ 39. $\left| \begin{array}{l} (x+y)(x^5-y^5) = a \\ (x-y)(x^5+y^5) = b \end{array} \right|$

40. $\left| \begin{array}{l} x^2y-xy^2 = \frac{1}{a}(x^4+y^4) \\ x^2y+xy^2 = b(x^2-y^2) \end{array} \right|$ 41. $\left| \begin{array}{l} x^2y-xy^2 = \frac{1}{a}(x^5+y^5) \\ x^2y+xy^2 = b(x-y) \end{array} \right|$

42. $\left| \begin{array}{c} x^4+x^2y^2+y^4 = a(x-y)^2 \\ x^4+y^4 = b(x-y)^2 \end{array} \right|$

43. $\left| \begin{array}{l} x^2+y^2 = a(x+y) \\ \frac{x^3+y^3}{x^3-y^3} = \frac{1}{b}(x-y) \end{array} \right|$ 44. $\left| \begin{array}{l} x^2+y^2 = a(x+y) \\ \frac{x^4+y^4}{x^4-y^4} = \frac{1}{b}(x-y) \end{array} \right|$

45. $\left| \begin{array}{l} \frac{x^2-xy+y^2}{x+y} = a \\ \frac{x^2+xy+y^2}{x+y} = \frac{(x-y)^2}{b} \end{array} \right|$

46. $$\left| \begin{array}{l} x^4 - y^4 = a(x^3 - y^3) \\ x^3 + y^3 = b(x^2 + y^2) \end{array} \right|$$

47. $$\left| \begin{array}{l} x^3 + y^3 = a(x^2 - y^2) \\ x^4 + y^4 = b(x^3 - y^3) \end{array} \right|$$

48. $$\left| \begin{array}{c} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 2a(x + y)^2 \\ x^5 + y^5 = 2b(x + y)^3 \end{array} \right|$$

49. $$\left| \begin{array}{c} x(x + y)(x + 2y)(x + 3y) = 840 \\ (x + 2y)^2 - (x + y)^2 = 11 \end{array} \right|$$

50. $$\left| \begin{array}{l} \frac{1 + xy}{x + y} + \frac{x + y}{1 + xy} = 2a \\ \frac{1 - xy}{x - y} + \frac{x - y}{1 - xy} = 2b \end{array} \right|$$

51. $$\left| \begin{array}{l} \frac{1 - xy}{x + y} + \frac{x + y}{1 - xy} = \frac{2}{a} \\ \frac{1 + xy}{x - y} + \frac{x - y}{1 + xy} = \frac{2}{b} \end{array} \right|$$

XXVIII.

Quadratische Gleichungen mit drei und vier Unbekannten.

A. Mit drei Unbekannten.

1. $$\left| \begin{array}{l} x : y : z = a : b : c \\ x^2 + y^2 + z^2 = m^2 \end{array} \right|$$

2. $$\left| \begin{array}{l} x(x + y + z) = a \\ y(x + y + z) = b \\ z(x + y + z) = c \end{array} \right|$$

3. $$\left| \begin{array}{l} (y + z)(x + y + z) = a \\ (x + z)(x + y + z) = b \\ (x + y)(x + y + z) = c \end{array} \right|$$

4. $$\left| \begin{array}{l} (y + z) : (x + z) : (x + y) = a : b : c \\ (y + z)^2 + (x + z)^2 + (x + y)^2 = 1 \end{array} \right|$$

5. $$\left| \begin{array}{c} 2x - 4y + z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \\ (x + 1)(z + 1) = (y - 1)(y + 6) \end{array} \right|$$

6. $$\left| \begin{array}{l} ax = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \\ by = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \\ cz = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \end{array} \right|$$

7. $$\left| \begin{array}{l} \frac{xyz}{y+z} = a \\ \frac{xyz}{x+z} = b \\ \frac{xyz}{x+y} = c \end{array} \right|$$

8. $$\left| \begin{array}{l} \frac{x^3+y^3+z^3}{y+z-x} = a \\ \frac{x^3+y^3+z^3}{x+z-y} = b \\ \frac{x^3+y^3+z^3}{x+y-z} = c \end{array} \right|$$

9. $$\left| \begin{array}{l} x^2yz = a \\ xy^2z = b \\ xyz^2 = c \end{array} \right|$$

10. $$\left| \begin{array}{l} yz = a \\ xz = b \\ xy = c \end{array} \right|$$

11. $$\left| \begin{array}{l} x = ayz \\ y = bxz \\ z = cxy \end{array} \right|$$

12. $$\left| \begin{array}{l} x^3 = ayz \\ y^3 = bxz \\ z^3 = cxy \end{array} \right|$$

13. $$\left| \begin{array}{l} x(y+z) = a \\ y(x+z) = b \\ z(x+y) = c \end{array} \right|$$

14. $$\left| \begin{array}{l} (x+y)(x+z) = a \\ (x+y)(y+z) = b \\ (x+z)(y+z) = c \end{array} \right|$$

15. $$\left| \begin{array}{l} x(x+y+z) = a - yz \\ y(x+y+z) = b - xz \\ z(x+y+z) = c - xy \end{array} \right|$$

16. $$\left| \begin{array}{l} (x+y-z)(x-y+z) = a \\ (y+z-x)(y-z+x) = b \\ (z+x-y)(z-x+y) = c \end{array} \right|$$

17. $$\left| \begin{array}{l} x^2 - (y-z)^2 = a \\ y^2 - (x-z)^2 = b \\ z^2 - (x-y)^2 = c \end{array} \right|$$

18. $$\left| \begin{array}{l} (y+z)(2x+y+z) = b+c \\ (x+z)(2y+x+z) = a+c \\ (x+y)(2z+x+y) = a+b \end{array} \right|$$

19. $\left| \begin{array}{l} x = a^2 (x + y + z) yz \\ y = b^2 (x + y + z) xz \\ z = c^2 (x + y + z) xy \end{array} \right|$

20. $\left| \begin{array}{l} \frac{y}{z} + \frac{z}{y} = \frac{a}{x} \\ \frac{x}{z} + \frac{z}{x} = \frac{b}{y} \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{c}{z} \end{array} \right|$

21. $\left| \begin{array}{l} x\left(1 - \frac{x}{a^2}\right) + y + z = 0 \\ y\left(1 - \frac{y}{b^2}\right) + x + z = 0 \\ z\left(1 - \frac{z}{c^2}\right) + x + y = 0 \end{array} \right|$

22. $\left| \begin{array}{l} \frac{yz}{y + z} = \frac{xyz}{b + c} - x \\ \frac{xz}{x + z} = \frac{xyz}{a + c} - y \\ \frac{xy}{x + y} = \frac{xyz}{a + b} - z \end{array} \right|$

23. $\left| \begin{array}{l} x + y = au \\ x - y = bu \\ x^2 + y^2 = cu \end{array} \right|$

24. $\left| \begin{array}{l} x + y = 5u \\ x - y = 2u \\ x^3 + y^3 = 185u \end{array} \right|$

25. $\left| \begin{array}{l} x + y = 2u \\ x^2 + y^2 = 5u \\ x^3 + y^3 = 7u^2 \end{array} \right|$

26. $\left| \begin{array}{l} x + y = au \\ x^2 + y^2 = bu^2 \\ x^5 + y^5 = c^4 u \end{array} \right|$

27. $\left| \begin{array}{l} x + y = au \\ x^2 + y^2 = \frac{b}{u} \\ x^3 + y^3 = c \end{array} \right|$

28. $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{2a}{u^2} \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{2b}{u^2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{c} \end{array} \right|$

29. $\left| \begin{array}{l} x : y = y : z \\ x + y + z = 19 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 133 \end{array} \right|$

30. $\left| \begin{array}{l} x : y = y : z \\ x + y + z = 21 \\ (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 126 \end{array} \right|$

31. $\left| \begin{array}{l} x + y = 2az \\ x^2 + y^2 = 2bz^2 \\ x^n + y^n + z^n = c^n \end{array} \right|$

32. $\left| \begin{array}{l} (1 - xy)(z + 1) = 2 \\ (x - y)(z + 1) = 2a \\ (x^2 - y^2)(z + 1)^2 = 4bz \end{array} \right|$

33. $\left| \begin{array}{l} x(y-1)(u-1) = 2a \\ x^2(y^2-1)(u-1)^2 = 4bu \\ x^3(y^3-1)(u-1)^3 = 6cu^2 \end{array} \right|$

34. $\left| \begin{array}{l} \frac{x(u-1)}{y-1} = a \\ \frac{x^2(u^2-1)}{y^2-1} = b \\ \frac{x^3(u^3-1)}{y^3-1} = c \end{array} \right|$

35. $\left| \begin{array}{l} \frac{x(u-1)}{y-1} = a \\ \frac{x^2(u^2-1)}{y^2-1} = b \\ \frac{x^4(u^4-1)}{y^4-1} = c \end{array} \right|$

36. $\left| \begin{array}{l} x^2 + (y-z)^2 = a \\ y^2 + (x-z)^2 = b \\ z^2 + (x-y)^2 = c \end{array} \right|$

37. $\left| \begin{array}{l} x^2 - yz = a \\ y^2 - xz = b \\ z^2 - xy = c \end{array} \right|$

38. $\left| \begin{array}{l} y^2 + z^2 - x(y+z) = a \\ x^2 + z^2 - y(x+z) = b \\ x^2 + y^2 - z(x+y) = c \end{array} \right|$

39. $\left| \begin{array}{l} 2x^2 + y^2 - yz + z^2 = 9 \\ 2y^2 + x^2 - xz + z^2 = 6 \\ 2z^2 + x^2 - xy + y^2 = 3 \end{array} \right|$

40. $\left| \begin{array}{l} 2x^2 + x(y+z) - yz = a \\ 2y^2 + y(x+z) - xz = b \\ 2z^2 + z(x+y) - xy = c \end{array} \right|$

41. $\left| \begin{array}{l} y^2 + yz + z^2 = a^2 \\ x^2 + xz + z^2 = b^2 \\ x^2 + xy + y^2 = c^2 \end{array} \right|$

42. $\left| \begin{array}{l} \frac{x^3 - y^3}{(x+y)^3} = \frac{a}{u} \\ \frac{x^3 + y^3}{(x-y)^3} = \frac{u}{b} \\ \frac{(x-y)^2}{x+y} = \frac{c}{u} \end{array} \right|$

43. $\begin{vmatrix} cx + (b - a)z = yz \\ ay + (c - b)x = xz \\ bz + (a - c)y = xy \end{vmatrix}$ *) 44. $\begin{vmatrix} ax + bz - cy = x^2 \\ by + cx - az = y^2 \\ cz + ay - bx = z^2 \end{vmatrix}$

45. $\begin{vmatrix} (a + b)(x + y) - (b + c)z = 2yz \\ (b + c)(y + z) - (a + c)x = 2xz \\ (a + c)(x + z) - (a + b)y = 2xy \end{vmatrix}$

46. $\begin{vmatrix} (a + b)(x - y) + 2(a - b)z = x^2 - y^2 \\ (b + c)(y - z) + 2(b - c)x = y^2 - z^2 \\ (c + a)(z - x) + 2(c - a)y = z^2 - x^2 \end{vmatrix}$

B. Mit vier Unbekannten.

47. $\begin{vmatrix} x + y = 7 \\ u + v = 3 \\ x + u^2 = 8 \\ y + v^2 = 4 \end{vmatrix}$ 48. $\begin{vmatrix} x + y = 12 \\ u + v = 4 \\ x^2 + u^2 = 34 \\ y^2 + v^2 = 50 \end{vmatrix}$

49. $\begin{vmatrix} xy = uv \\ x + y = 16 \\ u + v = 14 \\ \frac{x}{v} + \frac{u}{y} = 4 \end{vmatrix}$ 50. $\begin{vmatrix} xy = uv \\ x + y = a \\ u + v = b \\ \frac{x + u}{y + v} = c \end{vmatrix}$

51. $\begin{vmatrix} xy = a \\ uv = a \\ x + u = b \\ y + v = c \end{vmatrix}$ 52. $\begin{vmatrix} xy = 24 \\ uv = 6 \\ x + u = 14 \\ y + v = 4 \end{vmatrix}$

53. $\begin{vmatrix} xy = uv \\ x^2 + y^2 = a \\ u^2 + v^2 = b \\ x + y + u + v = c \end{vmatrix}$ 54. $\begin{vmatrix} x^2 + y^2 = a \\ u^2 + v^2 = b \\ xy + uv = c \\ xyuv = d \end{vmatrix}$

---

*) Die Gleichungen 43.—46. sind ihrer Eigentümlichkeit wegen hier angegeben. Ihre direkte Auflösung führt auf eine Gleichung des vierten Grades. Man findet aber eine Lösung, wenn man nach a, b und c auflöst.

55. $\left| \begin{array}{l} x + y = 16 \\ u + v = 12 \\ xy + uv = 95 \\ xu + yv = 100 \end{array} \right|$ 56. $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 17 \\ u^2 + v^2 = 13 \\ xy + uv = 10 \\ xu + yv = 14 \end{array} \right|$

57. $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = a \\ u^2 + v^2 = b \\ ux + vy = c \\ vx + uy = d \end{array} \right|$ 58. $\left| \begin{array}{l} 2x = y(1 + x^2) \\ 2y = u(1 + y^2) \\ 2u = v(1 + u^2) \\ 2v = a(1 + v^2) \end{array} \right|$

59. $\left| \begin{array}{l} x + y = u \\ x + u = v \\ \frac{x - y}{u - v} = a \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 3m^2 \end{array} \right|$ 60. $\left| \begin{array}{l} x + y = v \\ x + u = y \\ \frac{3x - v}{3y - u} = a \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 15m^2 \end{array} \right|$

61. $\left| \begin{array}{l} (x + y)^2 + (u + v)^2 = a \\ (x + u)^2 + (y + v)^2 = b \\ (x + v)^2 + (y + u)^2 = c \\ x + y + u + v = m \end{array} \right|$

62. $\left| \begin{array}{l} \frac{x}{y + z} = \frac{u - a}{a}, \quad \frac{y}{x + z} = \frac{u - b}{b}, \quad \frac{z}{x + y} = \frac{u - c}{c}, \\ (a + b + c)^2 (x^2 + y^2 + z^2) + 4(x + y + z)^2 u^2 = m^2 \end{array} \right|$

63. $\left| \begin{array}{c} \frac{x}{y + z} = \frac{2a - u}{a - 2u}, \quad \frac{y}{x + z} = \frac{2b - u}{b - 2u}, \quad \frac{z}{x + y} = \frac{2c - u}{c - 2u} \\ x^2 + y^2 + z^2 = m^2 \end{array} \right|$

XXIX.

Anwendung der quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

1. Zwei Zahlen verhalten sich wie 5 : 3; ihr Produkt ist 735. Wie heißen dieselben?

2. Welche zwei Zahlen verhalten sich wie 3 : 13, während das Quadrat der ersten um 378 kleiner ist, als das 9fache der zweiten Zahl?

3. Die Zahl 100 in zwei Teile zu zerlegen, daß die Summe der Quadrate derselben 5882 beträgt.

4. Die Zahl 84 in zwei Teile zu zerlegen, daß ihr Produkt 1728 beträgt.

5. Die Summe zweier Zahlen ist 34. Das dreifache Produkt derselben übertrifft die Summe ihrer Quadrate noch um 284. Wie heißen dieselben?

6. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen vermehrt um die erste beträgt 205, vermehrt um die zweite 200. Wie heißen die Zahlen?

7. Das Produkt zweier Zahlen vermehrt um die erste beträgt 180, vermehrt um die zweite 176. Wie heißen die beiden Zahlen?

8. Das Produkt zweier Zahlen ist um 91 größer als das Zehnfache der ersten Zahl und um 51 größer als das Zehnfache der zweiten Zahl. Wie heißen die Zahlen?

9. Das Produkt zweier Zahlen mit ihrer Summe multipliziert giebt 1820, mit der Differenz multipliziert 546. Wie heißen die Zahlen?

10. Dividiert man die Summe der Quadrate zweier Zahlen durch die erste, so erhält man 14 als Quotienten und 4 als Rest; dividiert man sie durch die zweite, so erhält man 10 als Quotienten und ebenfalls 4 als Rest. Wie heißen die Zahlen?

11. Die Summe zweier Zahlen und die Summe ihrer Quadrate beträgt zusammen 686. Die Differenz zweier Zahlen und die Differenz ihrer Quadrate beträgt zusammen 74. Wie heißen dieselben?

12. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen beträgt 370. Wäre die erste Zahl um 1, die zweite um 3 größer, so betrüge die Summe der Quadrate 500. Wie heißen die Zahlen?

13. Die Diagonale eines Rechtecks ist 89 Meter. Wäre jede Seite desselben um 3 Meter kürzer, so würde die Diagonale 85 Meter lang sein. Wie lang die Seiten?

14. Die Diagonale eines Rechtecks ist 65 Fuß lang. Wäre die kleinere Seite um 17 Fuß kürzer, die größere um 7 Fuß länger, so würde die Diagonale ungeändert sein. Wie lang die Seiten?

15. Die Diagonale eines Rechtecks ist 85 Fuß. Vergrößert man jede Seite um 2 Fuß, so wächst der Inhalt um 230 Q.-Fuß. Wie lang die Seiten?

16. Von einem Dreiecke sind gegeben eine Seite zu 39 Meter, die Summe der beiden andern gleich 66 Meter und der von diesen eingeschlossene Winkel gleich 60 Grad. Wie groß die beiden andern Seiten?

17. Wie ist das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt der Zahlen 39 und 66 allgemein a und m gesetzt werden?

18. Von einem Dreieck ist gegeben eine Seite = 43 Meter, die Differenz der beiden andern = 22 Meter und der von diesen eingeschlossene Winkel = 120°. Wie groß die beiden andern Seiten?

19. Von einem Dreieck sind gegeben eine Seite = a, die Summe der beiden andern Seiten = m und der von diesen eingeschlossene Winkel = 120°. Wie groß sind die beiden andern Seiten?

20. Die Summe zweier Zahlen ist 30. Vermindert man die erste um 3, die zweite um 2, so ist die Summe ihrer reziproken Werte gleich dem reziproken Werte von 6. Wie heißen die Zahlen?

21. Zu den Fußböden von zwei quadratischen Zimmern gehören 890 Q.-Fuß Bretter. Wie lang oder wie breit ist jedes Zimmer, wenn das eine in jeder Richtung noch 4 Fuß mehr hat als das andere?

22. Ein Landmann nimmt 245 Thlr. für Korn ein. Hätte er noch 10 Scheffel mehr gehabt und den Scheffel $\frac{1}{4}$ Thlr. teurer verkauft, so hätte er 300 Thlr. voll gehabt. Wie viel Scheffel und wie teuer ein Scheffel?

23. Eine Anzahl Personen verzehrte im Gasthause 8 G. Wären ihrer noch 4 mehr gewesen, und hätte jede noch 5 Kr. mehr verzehrt, so hätte sich die Rechnung auf 11 G. belaufen. Wie viel Personen waren, und wie viel hatte jede verzehrt?

24. Eine Frau bringt Eier zur Stadt und löst dafür gerade 4 Mk. Hätte sie 20 Eier mehr gehabt und das Stück 1 Pfennig teurer verkauft, so hätte sie sogar 6 Mark gelöst. Wie viel Eier hatte sie, und wie teuer war das Stück?

25. Eine Garnison reicht mit ihrem Brotvorrat noch 11 Tage aus. Wäre sie noch um 200 Mann stärker, so müßte jeder täglich schon $\frac{1}{4}$ Pfund Brot weniger erhalten, damit der Vorrat in der genannten Zeit genügte. Wäre die Garnison aber um 300 Mann schwächer, so könnte jeder täglich $\frac{1}{4}$ Pfund Brot mehr erhalten, und man würde doch noch 12 Tage genug haben. Wie stark die Garnison, und wie viel Pfund Brot erhielt jeder täglich?

26. Auf einer Meile oder 7500 Meter macht das Vorderrad eines Wagens 1000 Umläufe mehr als das Hinterrad. Wäre der Umfang jedes Rades 1 Meter größer, so würde auf derselben Strecke das Vorderrad nur 625 Umläufe mehr gemacht haben als das Hinterrad. Wie groß war der Umfang jedes Rades?

27. Jemand kauft eine Menge Schafe und zahlt dafür 630 G. Er behält 14 für sich und verkauft die übrigen einige Zeit nachher das Stück $2\frac{1}{2}$ G. teurer, als der Einkauf betrug. So gewinnt er, die 14 Schafe nicht gerechnet, noch 70 G. Wie viel Schafe hatte er, und wie hoch war der Einkaufspreis für das Stück?

28. Es kauft jemand zwei Arten Tuch, schwarzes und braunes, vom letztern 3 Ellen weniger als vom ersteren. Vom braunen kostet aber die Elle $\frac{1}{2}$ Mk. mehr als vom schwarzen. Im ganzen kostete das schwarze Tuch 105 Mk., das braune 90 Mk. Wie viel Ellen kaufte er, und was kostete die Elle von jeder Art?

29. A und B haben Leinwand gekauft. B hat für 60 Ellen 2 Thlr. mehr gegeben, als A für 45. Wie viel hat jeder für die Elle gezahlt, wenn B für 2 Thlr. noch eine Elle mehr erhält als A?

30. Jemand kauft 51 Pfund Kaffee und 65 Pfund Zucker, zusammen für 45 Gulden. Die Preise sind der Art, daß er für $1\frac{1}{2}$ G. vom Zucker noch 2 Pfund mehr erhält als vom Kaffee. Wie viel Kreuzer kam das Pfund von jeder Art?

31. Jemand hinterläßt ein Vermögen von 18000 Thlr., das unter 8 Personen, nämlich seine eigenen Kinder und die Kinder seiner Schwester verteilt werden soll. Die eigenen Kinder erhalten zusammen 12000 Thlr., die Schwesterkinder 6000 Thlr. So erhält eins von den eigenen Kindern noch 2800 Thlr. mehr als eins von den Schwesterkindern. Wie viel Kinder und wie viel Schwesterkinder?

32. Zwei Freunde A und B, die 221 Meilen von einander entfernt wohnen, wollen zusammentreffen und reisen zugleich ab. A macht täglich 10 Meilen. Die Zahl der Meilen, welche B täglich macht, ist um 6 kleiner als die Zahl der Tage, welche sie beide unterwegs sind. Wie viel Meilen hat jeder bei ihrem Zusammentreffen gemacht?

33. Auf der Peripherie eines Kreises von 1260 Fuß Länge bewegen sich zwei Körper A und B. A braucht, um die Peripherie zu durchlaufen, noch 10 Sekunden weniger als B. Bewegen sie sich in derselben Richtung, so treffen sie alle $157\frac{1}{2}$ Sekunden zusammen. Wie viel Fuß legt jeder in der Sekunde zurück?

34. Wie groß ist das specifische Gewicht des Goldes und des Kupfers, wenn 28 Pfund Gold und 11 Pfund Kupfer mit einander verbunden ein specifisches Gewicht von 14,4 haben und das specifische Gewicht des Goldes noch 10,4 höher ist das des Kupfers?

35. Wie groß ist das specifische Gewicht zweier Körper A und B, wenn a Pfund vom ersten und b Pfund vom zweiten zusammen das specifische Gewicht m haben, a_1 Pfund vom ersten und b_1 Pfund vom zweiten zusammen das specifische Gewicht m_1 haben?

36. Ein Kapital beträgt mit seinen Zinsen nach einem Jahre 22781 Mk. Wäre das Kapital um 200 Mk. größer und stände es $\frac{1}{4}$ Prozent höher auf Zinsen, so würde es in einem Jahre auf 23045 Mk. anwachsen. Wie groß ist das Kapital, und zu wie viel Prozent steht es?

37. Zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen hatten A und B zusammen 8000 Thlr. hergegeben. A läßt seine Einlage 10 Monate stehen und erhält an Einlage und Gewinn 4125 Thr. B hatte seine Einlage 8 Monate stehen und erhält an Einlage und Gewinn 4590 Thlr. Wie viel Geld hatte jeder eingelegt?

38. Zwei Arbeiter A und B machen sich anheischig, eine Arbeit in 6 Tagen für 90 Mk. auszuführen. Um ihrer Verpflichtung nachzukommen, müssen sie jedoch für die letzten zwei Tage noch einen dritten Arbeiter C zu Hülfe nehmen. Deshalb erhält B jetzt 4 Mk. Arbeitslohn weniger, als er würde erhalten haben, wenn er mit A allein in der angegebenen Zeit die Arbeit zu Stande gebracht hätte. In wie langer Zeit hätte B und C jeder die Arbeit allein ausgeführt, wenn A dazu allein 12 Tage gebraucht?

---

39. Dividiert man eine zweizifferige Zahl durch das Produkt ihrer Ziffern, so erhält man 3. Stellt man die Ziffern der Zahl um, so verhält sich die so erhaltene Zahl zur gesuchten wie 7 : 4. Wie heißt die Zahl?

40. Stellt man die Ziffern einer zweiziffrigen Zahl um, so ist die neue Zahl um 18 kleiner als die ursprüngliche. Multipliziert man beide Zahlen mit einander, so erhält man 1008. Wie heißt die ursprüngliche Zahl?

41. Dividiert man eine zweizifferige Zahl durch das Produkt ihrer Ziffern, so erhält man 5 als Quotient und 2 als Rest. Stellt man die

Ziffern der Zahl um und macht dann die Division, so erhält man 2 als Quotienten und 5 als Rest. Wie heißt die Zahl?

42. Eine zweiziffrige Zahl übertrifft die Summe der Quadrate ihrer Ziffern noch um 4. Ständen die Ziffern in umgekehrter Ordnung, so würde die Zahl noch um 5 kleiner sein als die Summe der Quadrate ihrer Ziffern. Wie heißt die Zahl?

43. Welche zweiziffrige Zahl ist um 4 kleiner als die Summe der Quadrate ihrer Ziffern, und um 5 größer als das doppelte Produkt derselben?

44. Vermehrt man den Zähler eines Bruches um 6 und vermindert den Nenner um 2, so wird der Bruch doppelt so groß. Vermehrt man den Zähler um 3 und vermindert den Nenner um ebenso viel, so geht der Bruch in seinen reziproken Wert über. Wie heißt der Bruch?

45. Die Summe zweier Zahlen ist 50. Vermehrt man die erste um 3 und vermindert die zweite um ebenso viel, so ist die Summe der Kuben 35000. Wie heißen die Zahlen?

46. Die Zahl 16120 in zwei solche Teile zu zerlegen, daß die Summe der Kubikwurzeln aus denselben gleich 40 ist. Wie heißen die Teile?

47. Die Summe zweier Zahlen ist 1110. Vermindert man die erste um 48 und vermehrt die zweite um 10, so ist die Summe der Kubikwurzeln aus diesen Zahlen gleich 16. Wie heißen die Zahlen?

48. Die Summe zweier Zahlen ist 28. Die Summe ihrer Kuben dividiert durch die Summe ihrer Quadrate giebt 14,56. Wie heißen die Zahlen?

49. Die Differenz der Quadratwurzeln zweier Zahlen ist 6, die Summe ihrer Quadrate 10256. Wie heißen dieselben?

50. Die Zahl 24 in zwei Teile zu zerlegen, daß die Summe ihrer Biquadrate 85922 werde.

51. Die Zahl 18 in zwei Teile zu zerlegen, daß die Summe der 5. Potenzen derselben 132768 werde.

52. Die Summe zweier Zahlen mit der Summe ihrer Quadrate multipliziert giebt 13740. Die Differenz der Zahlen mit der Differenz ihrer Quadrate multipliziert giebt 480. Wie heißen die Zahlen?

53. Die Summe zweier Zahlen mit der Differenz ihrer Quadrate multipliziert giebt 1296. Die Differenz derselben mit der Summe ihrer Quadrate multipliziert giebt 680. Wie heißen die beiden Zahlen?

54. Auf zwei sich rechtwinklig schneidenden geraden Linien bewegen sich zwei Körper A und B nach dem Schnittpunkt hin. A ist noch 270, B noch 189 Fuß vom Schnittpunkt entfernt. Nach 10 Sekunden ist ihre gegenseitige Entfernung 169 Fuß, nach 14 Sekunden 109 Fuß. Wie schnell ist die Bewegung jedes Körpers?

55. Auf zwei sich unter einem Winkel von 60^0 schneidenden Linien liegen die Punkte A und B, deren gegenseitige Entfernung 31 Fuß beträgt. Schiebt man den Punkt A 20 Fuß weiter nach dem Schnittpunkt der Linien hin, so beträgt die Entfernung zwischen A und B nur noch 21 Fuß. Wie weit sind A und B vom Schnittpunkt entfernt? (Vgl. S. 210 Nr. 34.)

56. Auf zwei geraden sich unter einem Winkel von 60^0 schneidenden Linien bewegen sich zwei Körper A und B nach dem Schnittpunkte hin. A ist noch 50, B noch 36 Fuß von demselben entfernt. Nach 3 Sekunden ist die gegenseitige Entfernung der Körper 31 Fuß, 4 Sekunden später, also 7 Sekunden nach dem Anfang der Bewegung 13 Fuß. Mit welchen Geschwindigkeiten bewegen sich die Körper?

57. Aus dem Ort A reitet um 7 Uhr morgens ein Reiter ab nach dem 2 Meilen entfernten Orte B, um von hier mit der Post weiter zu fahren. Als er in B ankommt, ist die Post bereits um 8 Uhr abgefahren. Er beschleunigt daher seinen Ritt, so daß er gegen seine bisherige Geschwindigkeit auf je eine Meile 10 Minuten gewinnt, und holt die Post um 9 Uhr ein. Wie schnell ritt er anfangs, und wie schnell fuhr die Post, wenn die Post zu einer Meile noch 5 Minuten mehr gebrauchte als der Reiter anfangs?

---

58. Drei Zahlen geben paarweise mit einander multipliziert die Produkte a, b und c. Wie heißen dieselben?

59. Der rechteckige Fußboden und zwei an einander stoßende Wände eines Zimmers halten bezüglich 864, 648 und 432 Q.-Fuß. Wie lang, wie breit und wie hoch ist das Zimmer?

60. Multipliziert man die Summe dreier Zahlen mit je einer derselben, so erhält man der Reihe nach 240, 270 und 390. Wie heißen dieselben?

61. Es giebt drei Zahlen, deren Summe 100 ist. Dividiert man sie der Reihe nach durch 3, 4 und 5, so ist die Summe der Quotienten 25. Das Produkt der beiden letzten ist $2\frac{1}{2}$mal so groß als das Quadrat der ersten. Wie heißen die Zahlen?

62. Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist 2730 Q.-M. Würde man die 3 Seiten des Dreiecks als Kanten zur Konstruktion eines rechtwinkligen Parallelepipeds verwenden, so würde sein Kubikinhalt 595140 K.-M. betragen. Wie groß die Seiten des Dreiecks?

63. Eine Zahl wird mit drei Ziffern geschrieben. Addiert man 297 zu derselben, so erscheinen die Ziffern in umgekehrter Ordnung. Die Summe der Ziffern ist 16, die Summe ihrer Quadrate ist 90. Wie heißt die Zahl?

64. Dividiert man eine dreiziffrige Zahl durch das Produkt aus der ersten und dritten Ziffer, so erhält man 54. Zieht man 693 von der Zahl ab, so erhält man die Ziffern in umgekehrter Ordnung. Die Summe der drei Ziffern ist 18. Wie heißt die Zahl?

65. In einer stetigen Proportion ist die Summe der drei Glieder 39, die Summe ihrer Quadrate 741. Wie heißt dieselbe?

66. Drei Personen bringen eine Summe zu einem Unternehmen zusammen und gewinnen damit 116 Thlr. weniger, als die Hälfte der ganzen Einlage ausmacht. A hat noch 240 Thlr. mehr eingeschossen als C. B und C haben zusammen 600 Thlr. gegeben. Wie viel hat jeder eingelegt, wenn A für seinen Teil vom Gewinn 224 Thlr. erhält?

67. Multipliziert man von drei Zahlen die Summe je zweier mit der dritten, so erhält man der Reihe nach die Produkte 810, 680 und 572. Wie heißen die Zahlen?

68. Von drei Zahlen giebt die Differenz des Quadrats je einer Zahl und des Quadrats der Differenz der beiden andern der Reihe nach a, b und c. Welche Zahlen sind das?

69. Von drei Zahlen giebt die Summe des Quadrats je einer Zahl und des Quadrats der Differenz der beiden andern der Reihe nach a, b und c. Wie heißen die Zahlen?

---

70. Vier Zahlen geben zu je drei mit einander multiplizirt als Produkte der Reihe nach a, b, c und d. Wie heißen die Zahlen?

71. In einer geometrischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder = a, die Summe der inneren = b, der Quotient aus der Summe der beiden ersten Glieder der Proportion durch die Summe der beiden letzten = c. Wie heißt die Proportion?

72. Vier Größen bilden eine Proportion. Das Produkt der äußern oder innern Glieder ist = a, die Summe der beiden ersten Glieder ist = b, und die Summe der beiden letzten ist = c. Wie heißen die vier Größen?

73. Vier Größen bilden eine Proportion. Die Summe der Quadrate der beiden äußern Glieder ist = a, die Summe der Quadrate der beiden innern ist = b, die Summe aller vier Glieder = c. Wie heißen die vier Größen?

74. Vier Größen bilden eine Proportion. Die Summe der ersten und vierten Größe ist = a, die Summe der zweiten und dritten = b, die Summe der Quadrate der vier Größen = c. Wie heißen die vier Größen?

75. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe sein, wenn die letzte Bedingung heißt: die Summe der Kuben der vier Größen ist = c?

76. Wie wird das Resultat der 74. Aufgabe sein, wenn die letzte Bedingung heißt: die Summe der Biquadrate der vier Größen ist = c?

77. Wie wird das Resultat der 74. Aufgabe sein, wenn die letzte Bedingung heißt: die Summe der 5. Potenzen der vier Größen ist = c?

78. Wie wird das Resultat der 74. Aufgabe sein, wenn die letzte Bedingung heißt: die Summe des Produkts aus den beiden ersten und des Produkts aus den beiden letzten Größen ist = c?

79. Vier Größen bilden eine Proportion. Das Produkt der äußern oder innern Größen ist = a, die Summe aller Größen ist = b, die Summe ihrer Quadrate = c. Wie heißen dieselben?

80. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe sein, wenn die letzte Bedingung heißt: die Summe der Kuben der vier Größen ist = c?

81. Wie wird das Resultat der 79. Aufgabe, wenn die letzte Bedingung heißt: die Summe der Biquadrate der vier Größen ist = c?

82. Wie ist das Resultat der 79. Aufgabe, wenn die letzte Bedingung heißt: die Summe der 5 Potenzen der vier Größen ist = c?

83. Vier Größen bilden eine Proportion. Die Summe der Größen selber ist = a, die Summe ihrer Quadrate = b, die Summe ihrer Kuben = c. Wie heißen die Größen?

84. Vier Größen bilden eine Proportion. Die Summe derselben ist = a, die Summe ihrer Quadrate ist = b, die Summe ihrer Biquadrate = c. Wie heißen dieselben?

85. Vier Größen bilden eine Proportion. Die Summe derselben ist = a, die Summe ihrer Quadrate ist = b, die Summe ihrer 5. Potenzen = c. Wie heißen dieselben?

86. Vier Größen bilden eine Proportion. Die Summe derselben ist = a, die Summe ihrer Kuben = b, die Summe ihrer Biquadrate = c. Wie heißen dieselben?

87. Vier Größen bilden eine Proportion. Die Summe derselben ist = a, die Summe ihrer Kuben = b, die Summe ihrer 5. Potenzen = c. Wie heißen dieselben?

88. Vier Größen bilden eine Proportion. Die Summe derselben ist = a, die Summe ihrer Quadrate = b, die Summe des Produkts aus den beiden ersten und des Produkts aus den beiden letzten Größen = c. Wie heißen die vier Größen?

89. Wie ist das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn die zweite Bedingung heißt: die Summe der Kuben der vier Größen ist = b?

XXX.

Diophantische Aufgaben.

A. Vorübungen.

1. In welchem Falle ist eine Aufgabe unbestimmt?

2. In welchem Falle sind die Unbekannten unbestimmt, welche aus Gleichungen gesucht werden sollen?

3. In welchem Falle ist eine Aufgabe überbestimmt?

4. Wie viel Auflösungen können die unbestimmten Gleichungen eigentlich haben?

5. Wodurch verlieren die unbestimmten Aufgaben etwas von ihrer Unbestimmtheit?

6. Welche Aufgaben nennt man vorzugsweise diophantische?

7. Wie heißen die Lösungen folgender Aufgaben in positiven ganzen Zahlen:

1) $x + y = 5$ 2) $x - y = 2$ 3) $3x + y = 20$

4) $x + 7y = 30$ 5) $11x - y = 7$ 6) $x - 13y = 3$

8. Desgleichen von folgenden Aufgaben:

1) $\frac{x}{8} = \frac{y}{5}$ 2) $\frac{x}{y} = \frac{13}{17}$ 3) $x : y = 7 : 11$

4) $7x = 5y$ 5) $13x = 19y$ 6) $x : y = 10 : 17$

9. Gieb ebenso von jeder der folgenden Aufgaben 3 Lösungen an:

1) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ 2) $4x = 7y = 10z$ 3) $x : y : z = 3 : 5 : 7$

4) $\frac{x}{21} = \frac{y}{31} = \frac{z}{41}$ 5) $8x = 11y = 14z$ 6) $x : y : z = 7 : 10 : 13$

10. Suche für folgende vier Gleichungen alle in positiven ganzen Zahlen möglichen Lösungen:

1) $7x + 2y = 71$ 2) $3x + 8y = 100$

3) $4x + 7y = 99$ 4) $8x + 5y = 111$

11. Gieb für folgende beiden Gleichungen 5 Lösungen in den kleinsten positiven ganzen Zahlen an:

1) $5x - 3y = 1$ 2) $7x - 4y = 5$

12. Eine Lösung der Gleichung $15x + 11y = 1000$ ist $x = 41$ und $y = 35$; wie heißen dann die andern Lösungen?

13. Eine Lösung der Gleichung $31x + 12y = 1350$ ist $x = 42$ und $y = 4$; wie heißen dann die andern Lösungen?

14. Die kleinsten positiven ganzen Zahlen, welche der Gleichung $9x - 5y = 1$ genügen, heißen $x = 4$ und $y = 7$; wie heißen danach die fünf nächsten Lösungen?

15. Wie heißen die fünf nächsten Lösungen der Gleichung $4x - 13y = 10$, wenn die erste $x = 9$ und $y = 2$ heißt?

16. Was versteht man unter der allgemeinen Lösung einer diophantischen Aufgabe?

17. Suche eine besondere Lösung der Gleichung $13x + 5y = 444$, bestimme daraus die nächsten Lösungen und bilde die allgemeine Lösung.

18. Suche eine besondere Lösung der Gleichung $10x - 3y = 11$, bestimme daraus die nächsten Lösungen und bilde die allgemeine Lösung.

19. Wie heißt die allgemeine Lösung der Gleichung $ax + by = c$, wenn $x = p$ und $y = q$ der Gleichung genügen? (Beweis!)

20. Wie heißt die allgemeine Lösung der Gleichung $ax - by = c$, wenn $x = p$ und $y = q$ der Gleichung genügen? (Beweis!)

21. Wie findet man leicht eine Lösung der Gleichung $ax + by = c$, wenn einer der Koefficienten, z. B. b, eine kleine Zahl ist?

Löse hiernach folgende Gleichungen:

22. $37x + 3y = 450$ 23. $4x + 73y = 999$

24. $61x + 7y = 1000$ 25. $8x + 89y = 2222$

26. $5x - 17y = 1$ 27. $23x - 4y = 5$

28. $47x - 6y = 10$ 29. $7x - 97y = 11$

30. Gieb alle Lösungen der Gleichung $2x + 3y + 5z = 23$ an, welche in positiven ganzen Zahlen möglich sind.

31. Ebenso von $3x + 5y + 7z = 41$.

32. Desgleichen von $7x + 10y + 13z = 100$.

33. Desgleichen von

1) $\left| \begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ 3x + 7y + 11z = 100 \end{array} \right|$ und 2) $\left| \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ 4x + 11y + 16z = 300 \end{array} \right|$

34. Desgleichen von

1) $\left| \begin{array}{l} x + y + z = 50 \\ 2x + 13y + 17z = 500 \end{array} \right|$ und 2) $\left| \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 7x + 23y + 59z = 1000 \end{array} \right|$

B. Direkte Aufsuchung der allgemeinen Lösung.

1. Welche Bedingung muß stattfinden, daß die Gleichung $ax + by = c$ überhaupt in ganzen Zahlen lösbar ist?

2. Wie gelangt man direkt zur allgemeinen Lösung der Gleichung $ax + by + c = 0$?

3. $7x + 11y = 300$. Suche die allgemeine Lösung und leite daraus alle besonderen ab, da die Zahl der Lösungen eine begrenzte sein muß. (Grund!)

4. $23x - 37y = 1$. Suche die allgemeine Lösung und bestimme darnach die fünf kleinsten Zahlenpaare, welche der Gleichung genügen, da die Zahl der Lösungen eine unbegrenzte ist. (Grund!)

5. $13x + 6y = 400$ 6. $35x - 13y = 4$

7. $18x - 25y = 10$ 8. $9x + 14y = 500$

9. $18x + 7y = 600$ 10. $39x - 14y = 20$

11. Wie löst man die Gleichung $ax - by = 1$ mit Hülfe der Kettenbrüche?

12. Wie heißt die allgemeine Lösung der Gleichung $ax - by = c$, wenn $x = p$ und $y = q$ eine Lösung der Gleichung $ax - by = 1$ ist?

13. Wie löst man mit Hilfe der Kettenbrüche die Gleichung $ax + by = 1$?

14. Wie heißt die allgemeine Lösung der Gleichung $ax + by = c$, wenn $x = p$ und $y = q$ eine Lösung der Gleichung $ax + by = 1$ ist?

15. Die Gleichung $34x - 37y = 1$ mit Hilfe der Kettenbrüche oder sonst auf dem einfachsten Wege zu lösen.

16. Ebenso $21x - 59y = 1$. — Desgleichen:

17. $47x - 89y = 1$ 18. $94x - 231y = 1$

19. $23x + 72y = 1$ 20. $91x + 17y = 1$

21. $9x - 22y = 5$
22. $47x - 11y = 7$
23. $24x - 35y = 10$
24. $49x - 27y = 3$
25. $3x + 7y = 100$
26. $2x + 5y = 50$
27. $5x + 3y = 70$
28. $3x + 11y = 100$
29. $6x + 17y = 500$
30. $13x + 5y = 440$
31. $7x + 48y = 1000$
32. $16x + 39y = 1111$

C. Anwendungen und diophantische Gleichungen des zweiten Grades.

1. Welche Zahlen lassen durch 3 und 5 geteilt den Rest 2?
2. Welche Zahlen geben durch 4 und 6 geteilt den Rest 1?
3. Welche Zahlen geben durch 5 und 7 geteilt bezüglich die Reste 4 und 6?
4. Welche Zahlen geben durch 8 und 12 geteilt die Reste 3 und 7?
5. Welche Zahlen gehen durch 3 auf und lassen durch 4 geteilt den Rest 1?
6. Welche Zahlen gehen durch 7 auf und lassen durch 5 geteilt den Rest 2?
7. Welche Zahlen lassen durch 3 und 7 geteilt bezüglich die Reste 2 und 4?
8. Welche Zahlen lassen durch 8 und 11 geteilt die Reste 3 und 5?
9. Welche Zahlen lassen durch 15 und 19 geteilt bezüglich die Reste 1 und 2?
10. In welche zwei Teile muß man 67 zerlegen, daß der erste durch 3, der zweite durch 5 aufgeht?
11. In welche zwei Teile muß man 55 zerlegen, daß der erste durch 2 dividiert den Rest 1, der zweite durch 7 dividiert den Rest 3 giebt?
12. In welche zwei Teile muß man 222 zerlegen, daß der erste durch 7, der zweite durch 15 aufgeht?
13. Die Zahl 333 in zwei Teile zu zerlegen, daß der erste durch 8, der zweite durch 11 aufgeht.
14. Die Zahl 400 in zwei Teile zu zerlegen, daß der erste durch 7, der zweite durch 13 teilbar ist.
15. Die Zahl 300 in zwei Teile zu zerlegen, daß der erste um 1 vermindert durch 9, der zweite um 7 vermehrt durch 11 teilbar ist.
16. Die Zahl 444 in zwei Teile zu zerlegen, daß der erste um 4 vermehrt durch 11, der zweite um 7 vermindert durch 17 teilbar ist.
17. Zwei Zahlen zu finden, von denen die erste um 1 größer ist als die zweite und die bezüglich durch 7 und 12 teilbar sind.
18. Zwei Zahlen zu finden, von denen die erste um 11 kleiner ist als die zweite und die bezüglich durch 3 und 13 teilbar sind.
19. Zwei Zahlen zu finden, von denen die erste um 20 größer ist als die zweite und die bezüglich durch 15 und 8 teilbar sind.

20. Zwei Zahlen zu finden, von denen die erste mit 3 multipliziert noch 1 mehr giebt als die zweite mit 5 multipliziert.

21. Wie ist das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn man statt 5 und 3 bezüglich 3 und 5 setzt?

22. Multipliziert man zwei Zahlen beziehungsweise mit 4 und 9, so wird das erste Produkt um 7 größer als das zweite. Wie heißen die Zahlen?

23. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn man statt 4 und 9 beziehungsweise 9 und 4 setzt?

24. Welche Zahlen geben mit 2 und 3 multipliziert die Summe 29?

25. Welche Zahlen sind es, die mit 4 und 7 multipliziert die Summe 99 geben?

26. Welche Zahlen geben mit 3 und 9 multipliziert die Summe 200?

27. Multipliziert man zwei Zahlen beziehungsweise mit 56 und 17, so ist das erste Produkt um 1 größer als das zweite. Wie heißen dieselben?

28. Wie ist das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn man 17 und 56 bezüglich statt 56 und 17 setzt?

29. Multipliziert man zwei Zahlen mit 71 und 21, so ist das erste Produkt um 10 größer als das zweite. Wie heißen die Zahlen?

30. Wie ist das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn man statt 71 und 21 bezüglich 21 und 71 setzt?

31. Zwei Zahlen zu finden, die beziehungsweise mit 23 und 71 multipliziert die Summe 10000 geben.

32. Zwei Zahlen zu finden, die mit 37 und 73 multipliziert die Summe 11111 geben.

33. Wie kann man den Bruch $\frac{59}{35}$ in zwei Brüche zerlegen, deren Nenner 5 und 7 sind?

34. Wie kann man den Bruch $\frac{200}{77}$ in zwei Brüche zerlegen, deren Nenner 7 und 11 sind?

---

35. Ein Knabe hatte eine Menge Nüsse, mehr als 400 und weniger als 600. Zählt er sie zu je 11, so bleiben ihm 3 übrig; zählt er sie zu je 13, so bleiben ihm 11 übrig. Wie viel Nüsse hatte er?

36. In einem Korbe liegen eine Menge Äpfel, mehr als 300 und weniger als 600. Gab man 13 für 10 Pf., so blieben noch 7 im Korbe zurück; gab man 12, so blieben noch 5 zurück. Wie viel Äpfel enthielt der Korb?

37. Jemand kauft Apfelsinen und Citronen und zahlt für die Apfelsine 27 Pf., für die Citrone 4 Pfennige, im ganzen 3 Mark. Wie viel Stück von jeder Art kaufte er?

38. Eine Frau bringt Hühnereier und Enteneier zur Stadt. Sie erhält von jenen für das Dutzend 10 Kr., von diesen für das Dutz. 17 Kr., im ganzen 1 G. Wie viel von jeder Art?

39. Jemand verkauft 7 Enten und 17 junge Hühner und nimmt dafür im ganzen 28 Mark ein. Wie viel Zehnpfennigstücke macht

das für eine Ente und für ein Huhn, vorausgesetzt, daß eine Ente mehr kostet als ein Huhn?

40. Jemand kaufte Schafe und Gänse und zahlte durschnittlich für das Schaf 29, für die Gans 8 Fr., im ganzen für die Schafe noch 30 Fr. mehr als für die Gänse. Wie viel Schafe und wie viel Gänse kaufte er?

41. Ein Arbeiter arbeitete 31 Tage, ein anderer 19 Tage. Sie erhielten zusammen 90 Mk. Wie viel Zehnpfennigstücke erhielt jeder täglich?

42. Wie wäre das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn nicht die Summe des Verdienstes angegeben wäre, sondern nur gesagt wäre, der erste verdiente im ganzen 33 Mk. mehr als der zweite, keiner aber täglich über 3 Mk.?

43. Ein Arbeiter erhielt täglich 1 Gulden 10 Kr., seine Frau 75 Kr. Zusammen erhielten sie nach einiger Zeit 43½ G. Wie viel (ganze) Tage hatte der Mann, und wie viel die Frau gearbeitet?

44. Wie wäre das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn die letzte Bedingung hieße: der Mann verdiente noch 43½ G. mehr als die Frau?

45. Jemand kauft 37 Ellen braunes und 20 Ellen schwarzes Zeug, zusammen für 141 Mk. Wie viel Zehnpfennigstücke kam die Elle von jeder Art?

46. Wie wäre die Lösung der vorigen Aufgabe, wenn die letzte Bedingung hieße: das braune Tuch kostete im ganzen noch 30 Mk. mehr als das schwarze, aber von keinem Zeug die Elle über 6 Mk. und unter 3 Mk.

47. Eine Gesellschaft von Herren und Damen verzehrte im Wirtshause 5 G. 10 Kr., jeder Herr 31 Kr., jede Dame 19 Kr. Wie viel Herren und wie viel Damen?

48. Jemand kauft 41 Pfund Zucker und 17 Pfund Kaffee, zusammen für 18 G. 55 Kr. Wie viel ganze Kreuzer kostet das Pfund von jeder Art, vorausgesetzt, daß der Kaffee teurer ist als der Zucker und das Pfund Kaffee nicht über einen halben Gulden kostet?

49. Ein anderer kaufte für 88 Fr. 20 Cent. Zucker und Kaffee, und zahlte für das Pfund Zucker 78 Cent. und für das Pfund Kaffee 1 Fr. 26 Cent. Wie viel (ganze) Pfund von jeder Art kaufte er?

50. Ein Viehhändler kauft Schafe und Kühe, im ganzen mehr als 100 Stück, für 3000 Mk. Er zahlt im Durchschnitt für ein Schaf 13 Mk., für eine Kuh 141 Mk. Wie viel Schafe und wie viel Kühe kaufte er?

51. Jemand läßt zu einer Gesellschaft Champagner und Rheinwein kommen. Die Flasche Champagner kam ihm mit Unkosten 4 G. 2 Kr., die Flasche Rheinwein 1 G. 74 Kr., aller Wein zusammen 120 G. Wie viel Flaschen von jeder Art?

52. Ein Landmann verkauft 272 Scheffel Roggen und 205 Scheffel Weizen und nimmt dafür 3000 Mk. ein. Wie viel ganze Mark kostet der Scheffel von jeder Getreideart?

53. Welche Zahlen geben durch 2, 3 und 5 geteilt den Rest 1?
54. Welche Zahlen geben durch 9, 12 und 15 geteilt den Rest 7?
55. Welche Zahlen geben durch 2, 3 und 4 geteilt der Reihe nach die Reste 1, 2 und 3?
56. Welche Zahlen geben durch 5, 7 und 9 geteilt der Reihe nach die Reste 4, 6 und 8?
57. Welche Zahlen geben durch 8, 12 und 18 geteilt der Reihe nach die Reste 7, 11 und 17?
58. Welche Zahlen geben durch 3, 7 und 10 geteilt der Reihe nach die Reste 1, 5 und 8?
59. Welche Zahlen geben durch 5, 6 und 8 geteilt der Reihe nach die Reste 2, 3 und 5?
60. Desgleichen durch 3 und 5 den Rest 2, durch 7 den Rest 1?
61. Welche durch 4, 6 und 7 die Reste 1, 1 und 0?
62. Welche durch 2, 3 und 5 die Reste 1, 2 und 3?
63. Welche durch 3, 5 und 7 die Reste 2, 3 und 6?
64. Welche Zahlen unter 1000 geben durch 5, 7 und 11 geteilt die Reste 0, 4 und 5?
65. Welche zwei Zahlen unter 6000 durch 11, 13 und 17 die Reste 1, 3 und 7?
66. Welche Zahl unter 2000 geht durch 11 auf, läßt durch 12 und 13 geteilt die Reste 7 und 6?
67. Welche Zahl unter 2000 geht durch 5 auf und läßt durch 3, 7 und 11 geteilt der Reihe nach die Reste 1, 6 und 10?
68. Die Zahl 30 in drei Teile zu zerlegen, daß dieselben die Summe 100 ergeben, wenn man den ersten mit 3, den zweiten mit 5, den dritten mit 7 multipliziert hat.
69. Die Zahl 19 in drei Teile zu teilen, daß das Doppelte des ersten, das 5fache des zweiten und das 10fache des dritten Teils die Summe 99 geben.
70. Die Zahl 23 in drei Teile zu zerlegen, daß das 3fache des ersten, das 8fache des zweiten und das 11fache des dritten Teils die Summe 200 ergeben.
71. Die Zahl 111 in drei Teile zu zerlegen, daß der erste Teil durch 2, der zweite durch 5, der dritte durch 7 ohne Rest teilbar ist, und daß das 3fache des ersten, das 2fache des zweiten und das 5fache des dritten die Summe 400 ausmachen.
72. Die Zahl 144 in drei Teile zu zerlegen, daß der erste durch 3, der zweite durch 7, der dritte durch 8 teilbar ist, und daß das 5fache des ersten, das 6fache des zweiten und das 4fache des dritten die Summe 690 ausmachen.

---

73. Jemand kauft Gänse, Enten und Hühner, im ganzen 100 Stück. Er zahlt durchschnittlich für eine Gans 4,1 Mk., für eine Ente 1,7 Mk., für ein Huhn 70 Pf., im ganzen 150 Mk. Wie viel Stück von jeder Art kaufte er?

74. Ein anderer kaufte für 90 Guld. 80 Stück Geflügel: Gänse, Enten und Tauben. Er zahlte für eine Gans 2 G. 22 Kr., für eine Ente 93 Kr. und für eine Taube 27 Kr. Wie viel Stück von jeder Art?

75. Eine Anzahl Männer, Frauen und Kinder, zusammen 40 Personen, verzehren in einem Gasthause 10 G. Wie viel Personen von jeder Art waren es, wenn ein Mann 36 Kr., eine Frau 26 Kr. und ein Kind 7 Kr. verzehrte?

76. Jemand kauft Schweine, Schafe und Gänse, im ganzen 100 Stück für 600 Fr. Er zahlt für ein Schwein 66 Fr., für ein Schaf 27 Fr. und für eine Gans 4 Fr. Wie viel von jeder Art kaufte er?

77. Jemand kauft Kühe, Schafe und Gänse, im ganzen 1000 Stück für 3000 Mark. Er zahlt für eine Kuh im Durchschnitt 141, für ein Schaf $13\frac{1}{2}$ Mk., für eine Gans $1\frac{1}{2}$ Mk. Wie viel Vieh von jeder Art?

78. Ein General, welcher nach der Stärke seines Corps gefragt wurde, sagte: Ich habe noch nicht 10000 Mann; stelle ich sie 5, 6 und 7 Mann hoch, so bleibt keiner übrig; stelle ich sie aber 11 und 13 Mann hoch, so habe ich im ersten Fall 4 zu wenig, im zweiten 2 zu viel? Wie stark war das Corps?

79. Stellt man ein Regiment, das noch keine 3000 Mann beträgt, zu 3, 4, 5 und 7 auf, so bleibt keiner übrig. Würde man es aber zu 9 und 11 Mann aufstellen, so hätte man im ersten Falle 3 Mann zu wenig, im zweiten 3 zu viel. Wie stark ist das Regiment?

---

80. Welche Reste kann eine Quadratzahl haben, wenn man sie durch 5 dividiert?

81. Welche Reste kann eine Quadratzahl haben, wenn man sie durch 2, 3 oder 4 teilt?

82. Welche Reste kann eine Quadratzahl haben, wenn man sie durch 6, 7, 8, 9 teilt?

83. Weshalb kann es keine ganze Zahl geben, welche für x gesetzt $3x + 2$, $4x + 3$, $5x + 2$, $5x + 3$, $6x + 5$ u. s. w. zu einem Quadrat macht?

84. Welche Ziffern kann eine Quadratzahl am Ende nie haben?

85. Kann eine Kubikzahl am Ende jede Ziffer von 0 bis 9 haben?

86. Welche Ziffern kann ein Biquadrat am Ende nur haben?

87. Welche Ziffern kann die 6. Potenz von einer ganzen Zahl am Ende nie haben?

Welche rationale Zahlen kann man für x setzen, daß folgende Ausdrücke Quadrate werden:

88. $2x^2 + 1$ — 89. $7x^2 + 9$

90. $4x^2 - 5$ — 91. $x^2 - 16$

92. $x(x - 3)$ — 93. $x(x + 6)$

Welche positive ganze Zahlen kann man für x und y setzen, daß nachfolgende Ausdrücke Quadrate werden:

94. $x^2 + y^2$ 95. $x^2 - y^2$
96. $x^2 + xy + y^2$ 97. $x^2 - xy + y^2$
98. $9x^2 - 7y^2$ 99. $3x^2 + 4y^2$
100. $x(3x + 2y)$ 101. $(7x - 2y)y$

Welche rationale Zahlen kann man für x setzen, daß nachfolgende Ausdrücke Quadrate werden:

102. $5x^2 - 7x + 4$ 103. $9x^2 - 5x + 7$
104. $(3x - 1)(x + 5)$ 105. $6x^2 - 13x + 6$
106. $2x^2 - 3x + 2$ 107. $3x^2 - 5x + 3$

Welche positive ganze Zahlen lassen sich für x und y setzen, daß nachfolgende Ausdrücke Quadrate werden:

108. $2x^2 - 7xy + y^2$ 109. $16x^2 - 11xy + 5y^2$
110. $(3x - 4y)(2x + 3y)$ 111. $2x^2 + 3xy - 2y^2$
112. $3x^2 - 2xy + 3y^2$ 113. $12xy - 3(x^2 + y^2)$

XXXI.

Arithmetische Reihen.

A. Erster Ordnung.

1. Was versteht man unter einer arithmetischen Reihe (erster Ordnung)?

2. Welche Reihen nennt man fallend, welche steigend?

3. Was versteht man unter Gliedern der Reihe?

4. Was versteht man unter der Differenz einer arithmetischen Reihe, und wie findet man sie?

5. Wie findet man aus irgend einem Gliede einer arithmetischen Reihe mit Hülfe der Differenz das folgende Glied?

6. Das erste Glied der Reihe sei 1, die Differenz 2, die Anzahl der Glieder 10. Wie heißt die Reihe, und wie groß ist die Summe aller Glieder?

7. Das erste Glied einer arithmetischen Reihe ist 0, die Differenz 5, das letzte Glied 30. Wie heißt die Reihe, und wie groß ist ihre Summe?

8. Das letzte Glied einer arithmetischen Reihe heißt 17, die

Differenz ist 3, das erste Glied — 10. Wie heißt die Reihe, wie groß ist die Anzahl der Glieder, und wie groß die Summe aller Glieder?

9. Wie viel und welche Größen kommen bei einer arithmetischen Reihe in Betracht?

10. Ist a das erste Glied, d die Differenz, n die Anzahl der Glieder, z das letzte oder n. Glied und s die Summe der Glieder, so gelten folgende Formeln:

$$z = a + (n - 1)\,d$$

$$s = \frac{(a + z)\,n}{2}$$

$$s = an + \frac{n\,(n - 1)}{1\,.\,2}\,d$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich alle Aufgaben lösen, welche über arithmetische Reihen (erster Ordnung) vorkommen. Beweise dieselben!

11. Wie viel Größen sind darnach nötig, um eine arithmetische Reihe vollständig zu bestimmen? (Grund!) Wie viele und welche einfache, zunächst liegende Aufgaben lassen sich hiernach zur vollständigen Bestimmung einer arithmetischen Reihe aufstellen?

12. Wie heißt das 20. Glied der Reihe 1, 3, 5 u. s. w., und wie groß ist die Summe der ersten 20 Glieder?

13. Wie heißt das 24. Glied der Reihe 2, 4, 6 u. s. w., und wie groß ist die Summe der ersten 24 Glieder?

14. Wie groß ist die Summe aller ganzen Zahlen von 1 bis 100?

15. Wie groß ist die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis 49?

16. Wie groß ist die Summe aller geraden Zahlen von 2 bis 88?

17. Wie heißt die Differenz und das letzte Glied einer arithmetischen Reihe, deren erstes Glied 1, deren Summe 9400 und deren Gliederzahl = 40 ist?

18. Die Anzahl der Glieder einer arithmetischen Reihe ist 22, die Differenz 4, die Summe 99. Wie heißt das erste und wie das letzte Glied?

19. Wie heißt das erste Glied und die Summe einer arithmetischen Reihe, wenn die Differenz = $1\frac{1}{4}$, die Anzahl der Glieder = 33 und das letzte Glied = 77 ist?

20. Das erste Glied einer arithmetischen Reihe ist 25, die Anzahl der Glieder ebenfalls 25, das letzte Glied — 35. Wie groß ist die Differenz und die Summe?

21. Das erste Glied ist 21, das letzte — 59, die Summe — 323. Wie groß ist die Differenz und die Anzahl der Glieder?

22. Das letzte Glied ist 23, die Summe 58, die Anzahl der Glieder 29. Wie groß ist das erste Glied und die Differenz?

23. Zwischen je zwei Gliedern der arithmetischen Reihe 1, 5, 9, 13 u. s. w. sollen 5 Glieder eingeschaltet werden, daß wieder eine arithmetische Reihe entsteht. Wie heißt die neue Reihe?

24. Zwischen je zwei Gliedern der Reihe 2, 14, 26 u. s. w. sollen 7 Glieder eingeschaltet werden, daß wieder eine arithmetische Reihe entsteht. Wie heißt dieselbe?

25. Zwischen a und b sollen n Größen eingeschaltet werden, daß dieselben eine arithmetische Reihe bilden. Wie heißt die Differenz der Reihe, wie die 4 ersten Glieder, und wie das $(n^2 + n + 1)$ te Glied?

26. Das 7. Glied einer arithmetischen Reihe heißt 10, das 17. Glied heißt 50. Wie heißt das erste Glied und die Differenz der Reihe?

27. Das 11. Glied einer arithmetischen Reihe heißt 47, das 19. Glied 75. Wie heißt das 283. Glied?

28. Die Summe des 4. und 7. Gliedes einer arithmetischen Reihe ist 100, die Summe des 17. und 29. Gliedes ist 800. Wie heißt die Reihe?

29. Die Summe der 37 ersten Glieder einer arithmetischen Reihe ist 888, die Differenz zwischen dem 13. und 31. Gliede 126. Wie heißt das erste Glied und die Differenz der Reihe?

30.*) Wie groß ist die Anzahl der Glieder und das letzte Glied einer arithmetischen Reihe, deren erstes Glied — 7, deren Differenz 3 und deren Summe 430 ist?

31. Das letzte Glied einer arithmetischen Reihe ist 97, die Differenz 3, die Summe 1612. Wie groß ist das erste Glied und die Anzahl der Glieder?

32. In einer arithmetischen Reihe von 20 Gliedern ist das Produkt der beiden mittleren Glieder 725, die Summe des 3. und 12. Gliedes = 30. Wie heißt das erste Glied und die Differenz der Reihe?

33. In einer arithmetischen Reihe ist die Differenz zwischen dem Quadrat des 15. und dem des 11. Gliedes = 400, die Summe des 9. und 12. Gliedes = 40. Wie heißt das erste Glied und die Differenz der Reihe?

34. In einer arithmetischen Reihe ist die Summe der Quadrate des 4. und 12. Gliedes = 1170, die Summe des 7. und 15. Gliedes = 60. Wie groß ist das erste Glied und die Differenz der Reihe?

35. In einer arithmetischen Reihe von 10 Gliedern ist die Summe aller Glieder = 65, die Summe ihrer Quadrate = 1165. Erstes Glied und die Differenz?

36. In einer arithmetischen Reihe von 8 Gliedern ist die Summe aller Glieder = 76, das Produkt aus der Summe der ersten 5 und der Summe der letzten 3 Glieder = 660. Erstes Glied und die Differenz?

37. In einer arithmetischen Reihe von 14 Gliedern ist das Produkt des ersten und letzten Gliedes = 276, das Produkt der beiden mittleren Glieder = 1326. Erstes Glied und die Differenz?

38. In einer arithmetischen Reihe von 4 Gliedern ist das Produkt aller Glieder = 3640, die Summe der beiden mittleren Glieder = 17. Wie heißen die 4 Glieder? (Vgl. S. 229, Nr. 65.)

39. In einer arithmetischen Reihe von 4 Gliedern ist das Produkt

---

*) Die Aufgaben 30.—45. führen auf quadratische Gleichungen.

aller Glieder = a, ihre Summe = b. Wie groß ist das erste Glied x und die Differenz y?

40. In einer arithmetischen Reihe von 4 Gliedern ist das Produkt aller Glieder = a, die Differenz der Quadrate der beiden mittleren Glieder = b. Wie groß ist das erste Glied x und die Differenz y? (Vgl. S. 233 Nr. 49.)

41. In einer arithmetischen Reihe von 4 Gliedern ist das Produkt aller Glieder = a, die Summe der Quadrate der mittleren Glieder = b. Wie groß ist das erste Glied x und die Differenz y?

42. In einer arithmetischen Reihe von 4 Gliedern ist das Produkt aller Glieder = a, die Summe ihrer Quadrate = b. Wie groß ist das erste Glied x und die Differenz y?

43. In einer arithmetischen Reihe von 5 Gliedern ist das Produkt aller Glieder = a, die Summe aller Glieder = 5b. Wie groß ist das erste Glied x und die Differenz y?

44. In einer arithmetischen Reihe von 100 Gliedern ist die Summe aller Glieder = 8200, das Produkt der beiden mittleren Glieder = 6723. Wie groß ist das erste Glied x und die Differenz y?

45. In einer arithmetischen Reihe von 50 Gliedern ist die Summe aller Glieder 3775, das Produkt aus dem 27. und dem 37. Gliede 8800. Wie groß ist das erste Glied x und die Differenz y?

---

46. Was versteht man unter Polygonalzahlen?

47. Was versteht man unter dem allgemeinen Gliede einer Reihe?

48. Bilde die ersten 10 Glieder der arithmetischen Reihen, deren allgemeine Glieder sind: 1) $n-1$, 2) n^2-1, 3) $\frac{n(n-1)}{1.2}$, 4) n^2-n+1, 5) $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$.

49. Was versteht man unter einer Summenreihe?

50. Bilde die Summenreihen von folgenden arithmetischen Reihen:

1) $-5, -1, 3, 7, 11, 15, 19, 23 \ldots$

2) $4, 1, 3, 10, 22, 39, 61, 88 \ldots$

3) $8, 1, -4, -7, -8, -7, -4, 1 \ldots$

4) $-1, 3, 4, 5, 9, 19, 38, 69 \ldots$

51. Was bedeuten die Glieder der Summenreihe in Bezug auf die Glieder einer gegebenen Reihe?

52. Was bedeutet demnach das 2., das 3., das 4., das n. Glied einer Summenreihe in Bezug auf eine gegebene Reihe, und was gilt von dem ersten Gliede der Summenreihe?

53. Bilde die Summenreihe der gewöhnlichen Zahlenreihe, deren Differenz 1 ist, stelle jedes der 5 ersten Glieder dieser neuen Reihe als

eine Summe von Punkten dar, welche ein (reguläres) Dreieck ausfüllen, und gieb das allgemeine Glied dieser Summenreihe an, welches die allgemeine Form für die Dreieckzahlen ist.

54. Bilde zu der Reihe 1, 3, 5, 7 u. s. w., deren Differenz 2 ist, die Summenreihe, stelle jedes der 5 ersten Glieder dieser Reihe als eine Summe von Punkten dar, welche ein Quadrat ausfüllen, und gieb das allgemeine Glied der Summenreihe an, welches die allgemeine Form für die viereckigen oder Quadratzahlen ist.

55. Bilde zu der Reihe 1, 4, 7, 10 u. s. w., deren Differenz 3 ist, die Summenreihe, stelle jedes der 5 ersten Glieder dieser Reihe als eine Summe von Punkten dar, die ein (reguläres) Fünfeck ausfüllen, und gieb das allgemeine Glied der Summenreihe an, welches die allgemeine Form für die Fünfeckzahlen ist.

56. Bilde zu der Reihe 1, 5, 9, 13 u. s. w., deren Differenz 4 ist, die Summenreihe, stelle jedes der 5 ersten Glieder als eine Summe von Punkten dar, die ein Sechseck ausfüllen, und gieb das allgemeine Glied der Summenreihe an, welches die allgemeine Form für die Sechseckzahlen ist.

57. Wie heißen die ersten 7 Siebeneckzahlen, und wie heißt die allgemeine Form der Siebeneckzahlen?

58. Wie heißen die ersten 7 Zehneckzahlen, und wie heißt die allgemeine Form der Zehneckzahlen?

59. Wie heißen die ersten 7 Zwanzigeckzahlen, und wie heißt die allgemeine Form derselben?

60. Welches ist die allgemeine Form der Hunderteckzahlen?

61. Welches ist die allgemeine Form der $x$eckzahlen?

---

62. Wie viel Schläge thut eine Uhr in 24 Stunden, vorausgesetzt, daß sie nur ganze Stunden schlägt?

63. Ein Beamter erhält 2550 Mk. Gehalt und soll nach Ablauf jeden Jahres 30 Mk. Zulage, d. h. 30 Mk. mehr als im verflossenen Jahr erhalten. Wie hoch beläuft sich sein Gehalt im 25. Jahre, und wie viel wird er in 25 Jahren überhaupt erhalten haben?

64. Ein Diener wird für einen Lohn von 120 Mk. gemietet, mit dem Bemerken, daß er jedes Jahr 9 Mk. Zulage erhalten soll, wenn sein Herr mit ihm zufrieden sei. Wie lange muß er bleiben, bis er jährlich 300 Mk. erhält, und wie viel hat er in der ganzen Zeit dann erhalten, das letzte Jahr mitgerechnet?

65. Es wird ein Brunnen gegraben, und es wird für den ersten Fuß 1 Mark gezahlt, für jeden folgenden immer 5 Pfennige mehr als für den vorhergehenden. Wie viel kostete die Ausgrabung des Brunnens, und wie viel der letzte Fuß, wenn der Brunnen 81 Fuß tief wurde?

66. Ein junger Mann hat ein Gehalt von 900 Mk. und erhält wegen guten Betragens jedes Jahr eine Zulage von 60 Mk. Zugleich wachsen aber auch seine Ausgaben. Er kam bis dahin mit 750 Mk. jährlich aus, er gebraucht von jetzt an jedes Jahr 75 Mk. mehr als im

vorhergehenden. In welchem Jahre wird seine Ausgabe sein ganzes Gehalt in Anspruch nehmen, und wie hoch beläuft sich dann beides?

67. Jemand legt ein kleines Kapital auf Zinsen und vermehrt dasselbe jährlich um 120 Mk. Nach Ablauf von 18 Jahren war dasselbe auf 3000 Mk. angewachsen. Mit welchem Kapital hatte er angefangen?

68. Jemand hat sich dadurch, daß er in jedem Jahre 6 Mk. mehr als im vorhergehenden zurücklegt, im ganzen 4050 Mk. erspart. Wie lange hat er schon gespart, wenn er im letzten Jahre 234 Mk. zurücklegt, und mit welcher Summe hat er angefangen?

69. Jemand setzt beim Spiel erst 1 Mk. und verliert, dann 2 Mk., 3 Mk., 4 Mk. u. s. w.. jedesmal 1 Mk. mehr. Beim wievielten Spiele erhielt er im Fall des Gewinnes all sein Geld wieder, wenn die Bank den 10fachen Satz auszahlt?

70. Unter 16 Personen sollen 1000 Mk. verteilt werden, daß die folgende immer 5 Mk. mehr erhält als die vorhergehende. Wie viel erhält die erste, und wie viel die letzte?

71. Ein Vater hat 11 Kinder, jedes folgende ist 2 Jahre jünger als das vorhergehende. Das Alter aller zusammen genommen beträgt noch 20 Jahre mehr als das Doppelte von dem Alter des Vaters. Wie alt sind die Kinder, und wie alt ist der Vater, wenn das 4. und 8. Kind zusammen 22 Jahre alt sind?

72. A macht mit B eine Wette. A will nach einem eine halbe Meile (12000 Fuß) entfernten Orte hin- und zurückgehen, bevor B 200 Äpfel in einen Korb gesammelt hat. Die Äpfel sollen alle in einer Reihe liegen, jeder von dem andern einen Schritt (= 2 Fuß) entfernt, und sollen einzeln herangeholt und einzeln in den Korb gelegt werden. Der Korb steht beim ersten Apfel. Wer gewinnt die Wette?

73. Ein Genesender will sich wieder an Bewegung und frische Luft gewöhnen. Er macht den ersten Tag 1000 Schritt und beabsichtigt, jeden Tag 250 Schritte mehr zu machen als am vorhergehenden Tage, bis er es auf eine Meile oder 12000 Schritt gebracht hat. An welchem Tage wird er zum ersten Mal eine Meile zurücklegen?

74. Jemand, der sich unwohl fühlt und lange keine anhaltende Bewegung gehabt hat, nimmt sich vor, eine große Fußreise zu machen und jeden Tag seine Tour zu vergrößern. Er war 37 Tage unterwegs, machte jeden folgenden Tag $\frac{1}{6}$ Meile mehr als am vorhergehenden Tage und legte im ganzen 222 Meilen zurück. Wie viel Meilen machte er am ersten Tage?

75. Zwei Freunde A und B, die 93 Meilen von einander entfernt wohnen, brechen zu gleicher Zeit auf und gehen einander entgegen. Jeder fängt mit täglich 5 Meilen an. Aber A ermüdet und macht jeden folgenden Tag $\frac{1}{4}$ Meile weniger als am vorhergehenden Tage. B gewinnt beim Gehen neue Kräfte, und die Sehnsucht den Freund zu sehen beschleunigt seine Schritte so, daß er jeden folgenden Tag $\frac{1}{3}$ Meile mehr macht als am vorhergehenden Tage. Wann treffen die Freunde zusammen, wie viel Meilen hat jeder im ganzen und wie viel Meilen jeder am letzten Tage zurückgelegt?

76. Zwei Personen A und B bewegen sich in derselben Richtung. Ihre anfängliche Entfernung beträgt 4 Meilen. A fängt mit täglich 6 Meilen an und macht jeden folgenden Tag $\frac{1}{10}$ Meilen weniger als am vorhergehenden Tage. B fängt mit 5 Meilen täglich an und macht jeden folgenden Tag $\frac{1}{15}$ Meilen mehr als am vorhergehenden Tage. Wann wird B den A einholen, wann wird ihre gegenseitige Entfernung am größten, und wie groß wird sie dann sein?

77. Ein Meteorolog findet unter seinen Beobachtungen die merkwürdige Erscheinung, daß vom 8. bis zum 19. Juni eines Jahres das Thermometer täglich um $\frac{1}{2}$ Grad stieg, und daß das arithmetische Mittel von diesen 12 verschiedenen Thermometerständen $18\frac{3}{4}$ Grad war. Wie viel Grad zeigte das Thermometer am 8. Juni?

78. Nach den Untersuchungen über die Eigenwärme der Erde nimmt die Wärme der Erde nach dem Innern alle 100 Fuß um einen Centesimalgrad zu. Wenn nun an der Oberfläche die Wärme 10 Grad beträgt, wie viel Grad sind in einer Tiefe von 1000 Fuß, von 10000 Fuß, von einer Meile (24000 Fuß), und wie viel im Mittelpunkt der Erde, den mittleren Radius der Erde zu 858 Meilen gerechnet, wenn dies Gesetz noch bis zu dieser Grenze seine Anwendung findet?

79. Bei welcher Tiefe wird nach den Voraussetzungen der vorigen Aufgabe das Wasser kochen (100^0), das Blei schmelzen (334^0), das Gußeisen (1200^0)?

80. Nach den Gesetzen der Physik fällt ein Körper im luftleeren Raum in der ersten Sekunde ungefähr 4,9*m*, in jeder folgenden immer 9,8*m* mehr als in der vorhergehenden. Welchen Raum durchfällt darnach ein Körper in 12 Sekunden, und wie viel Meter in der 12. Sekunde?*)

81. Wie viel Meter fällt nach der vorigen Aufgabe ein Körper in einer halben Minute und wie viel in der 30. Sekunde?

82. In wie viel Sekunden wird unter den in Nr. 80. angegebenen Bedingungen ein Körper einen Raum von 490*m* durchfallen?

83. In welcher Zeit wird unter denselben Voraussetzungen ein Körper von einem 140*m* hohen Turm fallen?

84. Ein senkrecht in die Höhe geschnellter Körper würde ohne den Widerstand der Luft in jeder Sekunde von seiner Geschwindigkeit $9{,}8^m$ verlieren. Wie lange wird darnach eine Kugel steigen, die senkrecht nach oben mit einer Geschwindigkeit von 300*m* in der Sekunde abgeschossen wird?

85. Wie hoch wird die Kugel in der vorigen Aufgabe steigen, da ein senkrecht nach oben sich bewegender Körper durch die Anziehung der Erde in seiner Bewegung ebenso viel verzögert, als ein nach unten sich

---

*) Bei dieser und allen folgenden Aufgaben dieser Art ist der Widerstand der Luft unberücksichtigt geblieben. Die Berücksichtigung desselben würde die Resultate wesentlich abändern.

bewegender Körper beschleunigt wird, und in welcher Zeit wird dieselbe wieder unten anlangen, von der Zeit des Abschusses an gerechnet?

86. Mit welcher Geschwindigkeit wurde eine Kugel senkrecht in die Höhe geschossen, die nach einer Minute wieder zur Erde fiel?

87. Wie lange und wie hoch würde eine Büchsenkugel steigen, die mit einer Geschwindigkeit von 490 *m* in der Sekunde abgeschossen wird, und wann würde sie wieder zur Erde fallen?

88. Wie hoch stieg eine senkrecht in die Höhe geschossene Kugel, welche nach 80 Sekunden wieder zur Erde fiel, und mit welcher Geschwindigkeit wurde sie abgeschossen?

89. Eine Kugel rollte eine schiefe Ebene hinab. Die Bewegung ist, wie der freie Fall, eine gleichförmig beschleunigte und geht nach denselben Gesetzen vor sich (Nr. 80.). Sie macht in der ersten Sekunde ein Meter. Welchen Weg macht sie in 5 Sekunden, und welchen in der letzten, der 5. Sekunde?

90. Welchen Weg muß eine Kugel auf einer schiefen Ebene in der ersten Sekunde zurücklegen, wenn sie in der 10. Sekunde einen Weg von $28\frac{1}{2}$ Meter zurücklegt?

91. Eine Kugel rollte eine schiefe Ebene von 54 Meter Länge in 6 Sekunden hinunter. Wie viel Meter legte sie in der ersten Sekunde zurück?

B. Arithmetische Reihen höherer Ordnung.

1. Was versteht man unter einer Differenzenreihe?

2. Wie viel Differenzenreihen hat eine gewöhnliche arithmetische Reihe?

3. Was versteht man unter einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung?

4. Was ist demnach eine arithmetische Reihe der 1., der 2., der 3., der 4., der n. Ordnung?

5. Von welcher Ordnung ist die Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen, und wie heißt das allgemeine Glied dieser Reihe?

6. Von welcher Ordnung ist die Reihe der Kuben der natürlichen Zahlen, und wie heißt das allgemeine Glied dieser Reihe?

7. Von welcher Ordnung ist die Reihe der Biquadrate der natürlichen Zahlen, und wie heißt das allgemeine Glied dieser Reihe?

8. Von welcher Ordnung ist die Reihe der 5. Potenzen der natürlichen Zahlen, und wie heißt das allgemeine Glied dieser Reihe?

9. Von welcher Ordnung sind folgende arithmetische Reihen, und wie heißen die nächsten 5 Glieder?

1) $-17, -8, +1, +10, +19 \ldots$

2) $1, 3, 8, 16, 27 \ldots$

3) $1, -5, -9, -5, +13 \ldots$

4) — 8, 10, 4, — 5, — 12 . .

5) 11, 8, 0, — 12, — 25, — 34 . .

10. Von welcher Ordnung sind die Reihen, deren allgemeines Glied An^2, An^3, An^4 ist? (Beweis!)

11. Von welcher Ordnung müssen die Reihen sein, deren allgemeines Glied $A + Bn + Cn^2$ und $A + Bn + Cn^2 + Dn^3$ ist? (Beweis!)

12. Von welcher Ordnung muß die Reihe sein, deren allgemeines Glied $A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4$ ist? (Beweis!)

13. Von welcher Form muß das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe 1. Ordnung, 2. Ordnung, 3. Ordnung, 4. Ordnung sein? (Beweis!)

14. Wie findet man demnach das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe von beliebiger Ordnung?

15. Von welcher Ordnung ist die arithmetische Reihe — 1, — 1, 1, 5, 11 u. s. w., und wie heißt das allgemeine Glied **t** derselben, und wie das 25. Glied?

16. Von welcher Ordnung ist die Reihe 3, 6, 13, 24, 39 u. s. w., wie heißt ihr allgemeines Glied t, und wie das 31. Glied?

17. Von welcher Ordnung ist die Reihe 0, 5, 20, 51, 104, 185, u. s. w., wie heißt ihr allgemeines Glied t, und wie ihr 27. Glied?

18. Von welcher Ordnung ist die Reihe — 2, — 3, 4, 25, 66 u. s. w., wie heißt das allgemeine Glied und wie das 19. Glied?

19. Wie heißen die allgemeinen Glieder der in Nr. 9. angegebenen Reihen, und wie das 20. Glied von jeder?

20. In welcher Beziehung steht eine Reihe zu ihrer Summenreihe? Weise dies nach an folgenden Reihen, indem du die Summenreihe bildest und zu der Summenreihe wieder die Differenzenreihe.

3, 8, 13, 18, 23, 28 . .

1, 0, 2, 7, 15, 26 . .

8, 1, — 2, — 1, 4, 13 . .

1, 7, 8, 11, 23, 51 . .

21. Wie viel Differenzenreihen muß eine Summenreihe haben?

22. Von welcher Art muß daher die Summenreihe einer arithmetischen Reihe sein?

23. Von welcher Ordnung muß die Summenreihe einer arithmetischen Reihe der 2. Ordnung, der 3. Ordnung, der 4. Ordnung, der n. Ordnung sein?

24. Welche Form muß das allgemeine Glied der Summenreihe von einer Reihe der 2. Ordnung, der 3. Ordnung, der 4. Ordnung haben?

25. Warum kann bei einer Summenreihe kein Glied ohne **n** vorkommen?

26. Bestimme die Größen A und B so, daß $s = An + Bn^2$ das allgemeine Glied für die Summenreihen der folgenden Reihen erster Ordnung wird*), und vergleiche dies allgemeine Glied mit der oben S. 254, Nr. 10. für die n ersten Glieder angegebenen Summenformel!

$$\begin{array}{rrrrl} 1, & 2, & 3, & 4, & 5\ldots \\ 1, & 3, & 5, & 7, & 9 \\ 1, & 4, & 7, & 10, & 13\ldots \\ -4, & 0, & 4, & 8, & 12\ldots \\ -11, & -6, & -1, & 4, & 9\ldots \end{array}$$

27. Die Quadrate der nat. Zahlen bilden eine Reihe der 2. Ordnung, das allgemeine Summenglied ist daher von der Form $An + Bn^2 + Cn^3$; bestimme A, B und C so, daß $An + Bn^2 + Cn^3$ die Summenformel für die Quadratzahlen wird, d. h. gieb die Summe der n ersten Quadratzahlen an.

28. Multipliziere die entsprechenden Glieder der beiden Reihen 1, 2, 3, 4, 5 . . und 1, 3, 5, 7, 9 . . . mit einander, untersuche die Ordnung der neuen Reihe, und gieb die Summe der n ersten Glieder an.

29. Multipliziere die entsprechenden Glieder der beiden Reihen 1, 3, 5, 7 . . . und 2, 4, 6, 8 . . ., bestimme die Ordnung der neuen Reihe, und gieb die Summe der n ersten Glieder an.

30. Addiere die entsprechenden Glieder der Reihen 1, 4, 9, 16, 25 . . . und 1, 3, 5, 7 . . ., bestimme die Ordnung der neuen Reihe, und suche die Summenformel für dieselbe.

31. Welches ist die Summe der n ersten Kubikzahlen?

32. Addiere die entsprechenden Glieder der Reihen für die Quadratzahlen und derjenigen für die Kubikzahlen, bestimme die Ordnung der neuen Reihe und gieb die Summe der n ersten Glieder derselben an.

33. Gieb die Summe der n ersten Biquadrate der natürlichen Zahlen an.

34. Zwischen je 2 Glieder der Reihe zweiter Ordnung 1, 4, 9, 16 . . sollen noch 2 neue Glieder eingeschoben werden, daß wieder eine Reihe zweiter Ordnung entsteht. Wie heißt die neue Reihe, wie ihr allgemeines Glied, und wie die Summe der n ersten Glieder?

35. Zwischen je 2 Gliedern der Reihe für die Kubikzahlen 1, 8, 27, 64 . . sollen noch 5 Glieder eingeschaltet werden, daß die Ordnung der Reihe nicht verändert wird. Wie heißt die neue Reihe, und wie das allgemeine Glied derselben?

36. Wie heißt die Reihe, deren allgemeines Glied $n^2 - n + 1$ ist? Wie heißt die Summe der n ersten Glieder, und wie die Summe der ersten 20?

37. Wie heißt die Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ ist, wie die Summe der n ersten Glieder, und wie die Summe der 19 ersten Glieder?

---

*) Man setze $n = 1$ und $n = 2$. Das giebt die Gleichungen $A + B = 1$, $2A + 4B = 3$.

38. Wie heißt die Reihe, deren allgemeines Glied $2n^2 - 3n + 2$ ist? Wie heißt die Summe der n ersten, und wie die der 15 ersten Glieder?

39. Wie heißt die Reihe, deren allgemeines Glied $n(n-1)(n-2)$ ist, wie die Summe der n ersten, und wie die Summe der 100 ersten Glieder?

40. Wie heißt die Reihe, deren allgemeines Glied $(n+1)(n^2+1)$ ist, wie heißt die Summe der n ersten, und wie die Summe der 40 ersten Glieder?

41. Wie heißt die Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$ ist, wie die Summe der n ersten, und wie die Summe der 30 ersten Glieder?

42. Wie heißt die Reihe, deren allgemeines Glied $n^3 - 2n^2 - 3n + 1$ ist, wie die Summe der n ersten, und wie die Summe der 37 ersten Glieder?

---

43. Was sind Pyramidalzahlen?

44. Was sind dreieckige Pyramidalzahlen, wie heißen die ersten 8, und wie heißt die allgemeine Formel für dieselben?

45. Was sind viereckige Pyramidalzahlen, wie heißen die ersten 8, und wie heißt die allgemeine Formel für dieselben?

46. Dasselbe für die fünfeckigen Pyramidalzahlen.

47. Desgleichen für die sechseckigen.

48. In einem Zeughause sind Kugeln in Form einer dreiseitigen Pyramide aufgeschichtet. In den Seiten der Dreiecke, welche die einzelnen Kugelschichten bilden, liegen der Reihe nach 1, 2, 3, 4 u. s. w. Kugeln, in der Seite der untersten Schicht n Kugeln. Wie viel Kugeln liegen in jeder einzelnen Schicht, wie viel in der untersten Schicht, wie viel der Reihe nach in den einzelnen oben abgeschnittenen Pyramiden, und wie viel in der ganzen Pyramide?

49. Wie viel Kugeln liegen in einer dreiseitigen Pyramide, deren unterste Schicht eine Seite von 10 Kugeln hat?

50. Ein Haufen von Kugeln bildet eine abgestumpfte dreiseitige Pyramide. In der Seite der obersten Schicht zählt man 4 Kugeln, in der Seite der untersten Schicht 20 Kugeln. Wie viel Kugeln liegen in dem ganzen Haufen?

51. Ein Kugelhaufen bildet eine vierseitige Pyramide, so daß die einzelnen Schichten lauter Quadrate sind. Wie viel Kugeln liegen in den einzelnen der Reihe nach oben abgeschnittenen Pyramiden, und wie viel in der ganzen Pyramide, wenn die Seite der unteren Schicht n Kugeln hat?

52. Wie viel Kugeln liegen in einer vierseitigen Pyramide, deren unterste Schicht eine Seite von 12 Kugeln hat?

53. Ein Kugelhaufen bildet eine abgestumpfte vierseitige Pyramide.

In der obersten Schicht liegen 16 Kugeln, die Seite der untersten Schicht enthält 10 Kugeln. Wie viel Kugeln liegen in dem ganzen Haufen?

54. Ein Kugelhaufen hat die Form eines Daches. Die oberste Schicht bildet eine Reihe von m Kugeln, die zweite Schicht 2 Reihen von je $m + 1$ Kugeln, die dritte 3 Reihen von je $m + 2$ Kugeln u. s. w. Wie viel Kugeln sind in dem Haufen, wenn 2, 3, 4 Schichten vorhanden sind, wie viel für n Schichten?

55. Wie viel Kugeln sind in einem Haufen, der wie in der vorigen Aufgabe gebildet ist, wenn die oberste Schicht 5 und in der untersten Schicht je eine Reihe 12 Kugeln enthält?

XXXII.

Geometrische Reihen.

1. Was versteht man unter einer geometrischen Reihe?

2. Was ist eine steigende, was eine fallende geometrische Reihe?

3. Das erste Glied einer geometrischen Reihe heißt 1, das zweite 2; wie heißen die 10 ersten Glieder der Reihe?

4. Das erste Glied einer geometrischen Reihe heißt 2, das folgende 6; wie heißen die 8 ersten Glieder der Reihe?

5. Das erste Glied einer geometrischen Reihe heißt 3, das folgende 4; wie heißen die 7 ersten Glieder der Reihe?

6. Was versteht man unter dem Quotienten einer geometrischen Reihe?

7. Wenn das erste Glied einer geometrischen Reihe a, der Quotient q ist, wie heißen dann die 10 ersten Glieder, und wie das n. Glied der Reihe?

8. Wie viele und welche Größen kommen überhaupt bei einer geometrischen Reihe in Betracht?

9. Ist a das erste Glied einer geometrischen Reihe, q der Quotient, n die Zahl der Glieder, z das letzte oder n. Glied und s die Summe aller Glieder, so gelten folgende Formeln:

$$z = a q^{n-1}$$

$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$s = \frac{qz - a}{q - 1}$$

Beweise dieselben.

10. Wie viel Größen müssen demnach gegeben sein, um alle bei einer geometrischen Reihe vorkommenden Größen bestimmen zu können? und wie viele und welche einfache Aufgaben kann man hiernach zur vollständigen Bestimmung einer geometrischen Reihe zunächst aufstellen?

11. Das erste Glied einer geometrischen Reihe ist 2, der Quotient 3; wie groß ist das 15. Glied, und wie groß die Summe der 15 ersten Glieder?

12. Das erste Glied einer geometrischen Reihe heißt 4, der Quotient 5; wie groß ist das 9. Glied, und wie groß die Summe der 9 ersten Glieder?

13. Das erste Glied einer geometrischen Reihe ist $\frac{1}{64}$, der Quotient 2; wie heißt das 13. Glied, und wie die Summe der 13 ersten Glieder?

14. Wie ist das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn das erste Glied 25600 und der Quotient $\frac{1}{2}$ ist?

15. Wie groß ist die Summe s und das letzte Glied z einer Reihe, wenn das erste Glied $a = 500$, der Quotient $q = \frac{3}{5}$ und die Anzahl der Glieder $n = 17$ ist?*)

16. Wie groß sind z und s, wenn $a = 100$, $q = \frac{7}{8}$ und $n = 31$ ist?

17. Desgleichen für $a = 10$, $q = \frac{131}{121}$ und $n = 41$?

18. Ebenso für $a = 7$, $q = \frac{2468}{1357}$, $n = 13$?

19. Ebenso für $a = 1$, $q = -2$, $n = 19$?

20. Ebenso für $a = 1$, $q = -2$, $n = 20$?

21. Wie groß ist die Summe der Reihe $a^{10} + a^9 b + a^8 b^2 + \ldots b^{10}$?

22. Desgleichen von $a^7 - a^6 b + a^5 b^2 - a^4 b^3 + \ldots - b^7$?

23. Desgleichen von $a^{20} - a^{19} b + a^{18} b^2 - a^{17} b^3 + \ldots + b^{20}$?

24. Ebenso von $a + \sqrt[5]{a^4 b} + \sqrt[5]{a^3 b^2} + \sqrt[5]{a^2 b^3} + \sqrt[5]{a b^4} + b$?

25. Ebenso von $a + \sqrt[7]{a^6 b} + \sqrt[7]{a^5 b^2} + \ldots b$, und von $\sqrt[8]{a^7} + \sqrt[8]{a^6 b} + \sqrt[8]{a^5 b^2} + \ldots \sqrt[8]{b^7}$?

26. Nach welchen Formeln berechnet man aus a, q und z die Größen n und s, und wie groß sind diese, wenn $a = 1$ ist, $q = 7$ und $z = 5764801$?

27. Nach welchen Formeln berechnet man z und n aus a, q und s, und wie groß sind z und n, wenn $a = 4$ ist, $q = 6$ und $s = 290237644$?

28. Nach welchen Formeln findet man q und s aus a, n und z, und wie groß sind q und s, wenn $a = 81$ ist, $n = 8$, $z = 370370\frac{10}{27}$?

29. Wie groß sind q und s, wenn $a = 2$ ist, $n = 20$ und $z = 100$, und wie groß ist das 12. Glied dieser Reihe?

30. Wie groß sind q und s, wenn $a = 1$ ist, $n = 25$ und $z = 1000$, und wie groß ist das 17. Glied dieser Reihe?

31. Nach welchen Formeln findet man q und n aus a, z und s, und wie groß sind q und n, wenn $a = 512$ ist, $z = 1953125$, $s = 3254861$?

32. Nach welchen Formeln findet man a und s aus q, n und z, und wie groß sind a und s, wenn $q = \frac{2}{3}$ ist, $n = 12$ und $z = 25\frac{23}{81}$?

33. Aus welchen Formeln findet man a und z aus q, n und s, und wie groß sind a und z, wenn $q = 1\frac{1}{2}$ ist, $n = 13$ und $s = 396532\frac{3}{4}$?

---

*) z ist logarithmisch zu berechnen. Dann folgt s aus a, q und z nach der 3. Formel in Nr. 9.

34. Nach welchen Formeln findet man a und n aus q, z und s, und wie groß sind a und n, wenn $q = 1\frac{1}{3}$, $z = 29127\frac{1}{9}$ und $s = 109947\frac{4}{9}$ ist?

35. Durch welche Gleichungen werden q und z bestimmt, wenn a, n und s gegeben sind?

36. Durch welche Gleichungen werden a und q bestimmt, wenn n, z und s gegeben sind?

37. Wenn der Quotient q kleiner als 1 und die Anzahl der Glieder unendlich groß ist, so wird sich die Summe aller Glieder der Reihe um so mehr der Grenze $\frac{a}{1-q}$ nähern, je mehr Glieder man nimmt. Wie findet man den Ausdruck $\frac{a}{1-q}$, und wie groß ist in diesem Falle das letzte Glied z zu nehmen?

38. Welches ist die Summe der geometrischen Reihe, deren erstes Glied 7 und deren Quotient $\frac{1}{2}$ ist, wenn die Anzahl der Glieder $= \infty$ genommen wird?

39. Wie groß ist die Summe der unendlichen Reihe $1 - \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 - (\frac{2}{3})^3 + (\frac{2}{3})^4 - (\frac{2}{3})^5 + \cdots$?

40. Desgleichen von $5 + \frac{5}{3} + \frac{5}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \cdots$?

41. Desgleichen von $14 - 14 . (\frac{2}{5}) + 14 . (\frac{2}{5})^2 - 14 . (\frac{2}{5})^3 + \cdots$?

42. Wie groß ist die Summe der unendlichen Reihe $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \cdots$, vorausgesetzt, daß $x < 1$ ist?

43. Wie groß ist die Summe der unendlichen Reihe $x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + x^5 + 3x^6 + \cdots$?*)

44. Desgl. von $x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 + 3x^5 + 2x^6 + \cdots$

45. Desgl. von $x + 3x^2 + 3x^3 + x^4 + x^5 + 3x^6 + 3x^7 + x^8 \cdots$

46. Desgl. von $a + bx + ax^2 + bx^3 + ax^4 + bx^5 + \cdots$

47. Wie heißt das allgemeine Glied und wie die Summe folgender unendlichen Reihen, deren Koefficienten arithmetische Reihen bilden.

$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$ $\quad$ $x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \cdots$

$1 + 5x + 9x^2 + 13x^3 + \cdots$ $\quad$ $2 + 4x + 6x^2 + 8x^3 + \cdots$

48. Desgl. folgender:

$x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots$ $\quad$ $x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + \cdots$

$x + 7x^2 + 18x^3 + 34x^4 + \cdots$ $\quad$ $1 + 5x + 12x^2 + 22x^3 + \cdots$

---

*) Bei dieser und den folgenden Aufgaben (bis 52.) kann von einer Summe der Reihe nach den sonstigen Begriffen einer Summe nur die Rede sein, wenn die Reihe konvergent ist, d. h. wenn sich die Summe der Glieder um so mehr einer bestimmten Grenze nähert, je mehr Glieder man hinzuzieht. Bei diesen Aufgaben ist daher x so groß zu denken, daß die Konvergenz stattfindet.

49. Desgl. folgender:

$x + 6x^2 + 18x^3 + 40x^4 + 75x^5 + 126x^6 + \cdot\cdot$

$x + 5x^2 + 15x^3 + 34x^4 + 65x^5 + 111x^6 + \cdot\cdot$

$1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + 65x^5 + \cdot\cdot$

50. Suche das allgemeine Glied der Reihen, welche bei der Entwickelung folgender Brüche nach steigenden Potenzen von x entstehen, für die vier letzten auch das 10. Glied (5 Decimalen). Die Brüche sind in Partialbrüche zu zerlegen und diese nach XI, 200 zu entwickeln.

$$\frac{x}{(1-2x)(1-x)},\quad \frac{3}{1+x-2x^2},\quad \frac{x}{1-5x+6x^2},\quad \frac{8}{3-10x+3x^2}$$

$$\frac{3}{2-5x+2x^2},\quad \frac{1}{2-3x+x^2},\quad \frac{5}{3-x-2x^2},\quad \frac{1}{6-5x+x^2}$$

51. Suche für folgende Brüche das allgemeine Glied der Entwickelung und für die zwei letzten auch das 8. Glied (5 Dec.).

$$\frac{4x-6x^2}{(1-3x)(1-2x)(1-x)} \qquad \frac{2}{(1-x)(2-x)(3-x)}$$

$$\frac{2(1+x-x^2)}{(1-x)(3-7x+2x^2)} \qquad \frac{3-10x+15x^2}{(1-5x)(1-4x+3x^2)}$$

$$\frac{5x-29}{(5-2x)(3-2x-x^2)} \qquad \frac{43-72x+24x^2}{(3-2x)(20+x-12x^2)}$$

52. Desgl. für folgende Brüche das allgemeine Glied und das 7. Glied:

$$\frac{4x^2-10x^3}{(1-5x+4x^2)(1-5x+6x^2} \qquad \frac{11+32x+x^2}{(2-5x-3x^2)(3+x-2x^2)}$$

---

53. Zwischen je zwei Gliedern der geometrischen Reihe 1, 2, 4, 8 u. s. w. noch ein Glied einzuschalten, daß wieder eine geometrische Reihe entsteht. Wie heißt die neue Reihe?

54. Zwischen 1 und 7 sollen 6 Zahlen eingeschaltet werden, daß eine geometrische Reihe von 8 Gliedern entsteht. Wie heißt der Quotient der Reihe?

55. Zwischen a^8 und b^8 sollen noch 7 Glieder eingeschaltet werden, daß eine geometrische Reihe entsteht. Wie heißt diese Reihe?

56. Zwischen a und b sollen noch 5 Glieder eingeschaltet werden, daß eine geometrische Reihe entsteht. Wie heißt diese Reihe?

57. Wenn zwischen 1 und 5 noch drei Glieder eingeschaltet werden, daß eine arithmetische Reihe entsteht, und ebenso drei Glieder, daß

eine geometrische Reihe entsteht, wie heißen diese beiden Reihen, und welche Glieder sind größer, die der arithmetischen oder die der geometrischen Reihe?

---

58. In einer geometrischen Reihe von 20 Gliedern ist die Summe der geraden Glieder = a, die Summe der ungeraden = b. Wie heißt das erste Glied x, und wie der Quotient y der Reihe?

59. In einer geometrischen Reihe von 40 Gliedern ist die Summe der ersten 20 Glieder = a, die Summe der letzten 20 = b. Wie groß ist das erste Glied x und der Quotient y?

60. In einer geometrischen Reihe von vier Gliedern ist die Summe des ersten und letzten Gliedes = a, die Summe der mittleren Glieder = b. Wie heißt das erste Glied x und der Quotient y?*)

61. In einer geometrischen Reihe von drei Gliedern ist die Summe aller Glieder = a, die Summe ihrer Quadrate = b. Wie heißt das erste Glied x und der Quotient y?

62. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe sein, wenn die Reihe aus vier Gliedern besteht?

63. In einer geometrischen Reihe ist die Summe aller Glieder = a, die Summe ihrer Quadrate = b, die Summe ihrer Kuben = c. Wie groß ist das erste Glied x, der Quotient y und die Anzahl der Glieder n?

64. In einer geometrischen Reihe ist die Summe aller Glieder = a, die Summe ihrer Quadrate = b, die Summe ihrer 4. Potenzen = c. Wie groß ist das erste Glied x, der Quotient y und die Anzahl der Glieder n?

65. In einer geometrischen Reihe ist die Summe aller Glieder = a, die Summe ihrer Quadrate = b, die Summe ihrer 5. Potenzen = c. Wie groß ist das erste Glied x, der Quotient y und die Anzahl der Glieder n?

---

66. Es hatte jemand 20 große Holzblöcke auf seinem Hofe liegen, welche zu Brennholz entzwei gemacht werden sollten. Ein guter Freund erbot sich zu dieser Arbeit, wenn jener ihm für den ersten Block 1 Pfennig, für den zweiten 2 Pfennig, für den dritten 4 Pfennig u. s. w., immer für jeden folgenden Block doppelt so viel als für den vorhergehenden geben wollte. Was hätte jener im ganzen zahlen müssen, und wie viel durchschnittlich für jeden Block?

---

*) Diese Aufgabe und die folgenden bis Nr. 65. führen auf quadratische Gleichungen.

67. In einer Stadt war eine große Feuersbrunst gewesen; es waren 22 Scheunen abgebrannt. Ein reicher Mann erbot sich, alle Scheunen recht gut wieder aufbauen zu lassen, wenn man ihm für die erste 1 Mk., für die zweite 2 Mk., für die dritte 4 Mk. und so für jede folgende doppelt so viel als für die vorhergehende geben wollte. Konnte man darauf eingehen? Was hätte man ihm im ganzen zahlen müssen, und wie viel für eine Scheune im Durchschnitt?

68. Als von den Verwüstungen die Rede war, welche der Krieg in einigen Städten angerichtet hatte, bemerkte jemand, er würde gern alle zerstörten Gebäude wieder aufführen lassen, wenn man ihm an jedem Orte für das erste Gebäude 10 Pf., für das zweite 20 Pf., für das dritte 40 Pf. und für jedes folgende Gebäude das Doppelte geben wolle. Wie viel hätte er an einem Orte wo 10 Gebäude, und wie viel an einem Orte erhalten, wo 40 Gebäude zerstört waren, und wie viel in jedem Fall durchschnittlich für ein Gebäude?

69. Jemand betheiligt sich an einem Hazardspiel. Er beschließt, jedes folgende Mal, wenn er verliert, um die Hälfte mehr zu setzen, als das vorhergehende Mal, halbe Pfennige für voll gerechnet, bis er gewinnt. Er fängt mit 10 Pf. an. Beim 16. Spiel gewann er. Wie viel setzt er bei diesem Spiel, und wie viel hatte er jetzt im ganzen gewonnen, wenn der Einsatz dreifach zurückgezahlt wurde?

70. Jemand erhielt 8 Körner von einer besondern Weizenart. Er säet die 8 Körner, benutzt die ganze Ernte wieder zur Aussaat und macht das ebenso in den folgenden Jahren. Wie lange muß er dies fortsetzen, wenn er über 500 Scheffel ernten will, bevor er von dem Weizen verkauft oder gebraucht, jedesmal das 10. Korn gerechnet und 800000 Körner auf einen Scheffel?

71. Ein Waldbestand vermehrt sich mehrere Jahre hindurch regelmäßig jährlich um 4 Prozent. Wie viel *cbm* Holz wird derselbe nach 12 Jahren liefern, wenn er jetzt zu 2 Millionen *cbm* veranschlagt wird?

72. Ein Waldbestand wird jetzt auf 100000 *cbm* veranschlagt. Wie stark war derselbe vor 10 Jahren, wenn er sich in diesen 10 Jahren regelmäßig jährlich um 3 Prozent vermehrt hat?

73. London hat jetzt 3125000 Einwohner. Wie viel hatte es vor 50 Jahren, wenn sich die Einwohnerzahl seit der Zeit jährlich um $2\frac{1}{2}$ Prozent vermehrt hat?

74. Wie viel Einwohner hatte Paris zur Zeit der Julirevolution, also vor 41 Jahren, wenn seine Bevölkerung seit der Zeit jährlich um 3 Prozent zugenommen hat, und wenn man es jetzt zu 1800000 E. annimmt?

75. Ein König von Indien, namens Scheran, verlangte nach dem Berichte des arabischen Schriftstellers Asaphad, daß Sessa, der Erfinder des Schachspiels, sich selbst eine Belohnung wählen sollte. Dieser erbat sich die Summe der Weizenkörner, welche herauskommt, wenn man auf das erste Feld des Schachbretts 1 Korn legt, auf das zweite 2, auf das dritte 4 u. s. w., auf jedes folgende der 64 Felder immer

doppelt so viel als auf das vorhergehende. Der König lachte über diese Forderung des Sessa, weil er sie für zu geringfügig hielt. Die Rechnung ergab aber bald zu seinem Erstaunen eine weit größere Menge Weizen, als er je herbeischaffen oder bezahlen konnte. Wie viel Scheffel, jeden zu 800000 Körner gerechnet?

76. Wie groß ist die Dichtigkeit in dem Recipienten einer Luftpumpe nach 20 Kolbenzügen, wenn der Recipient (nebst dem Verbindungskanal) 30 *cbdm*, der Stiefel, den Raum für den Kolben abgerechnet, 6 *cbdm* hält?

77. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn man statt der Zahlen 30, 6 und 20 die allgemeinen Zahlzeichen a, b u. n setzt?

78. Der Recipient einer Luftpumpe enthalte 40 *cbdm*, der Stiefel (ohne den Raum für den Kolben) 5 *cbdm*. Nach wie viel Kolbenzügen wird die Luft im Recipienten nur noch $\frac{1}{10}$ der ursprünglichen Dichtigkeit betragen?

79. In einem Gefäß sind 20 Liter Wein. Jemand füllt 1 Liter aus und gießt dafür 1 Liter Wasser hinzu, füllt wieder 1 Liter der Mischung aus und gießt dafür 1 Liter Wasser hinzu u. s. w. Wie viel Liter des ursprünglichen Weins sind noch in dem Gefäß, nachdem man die Manipulation 10mal gemacht hat?

80. In einem Gefäß sind 50 Liter 80prozentigen Spiritus. Man verfährt auch hier wie in der vorigen Aufgabe. Wie viel Liter reinen Spiritus sind noch in dem Gefäße, nachdem man 20mal 1 Liter der vorhandenen Flüssigkeit ausgeschöpft und dafür jedesmal 1 Liter Wasser hinzugegossen hat?

81. Es ist ein spitzer Winkel gegeben. Der eine Schenkel desselben ist a. Man fällt von dem Endpunkte von a ein Lot x auf den andern Schenkel, das von diesem ein Stück b abschneidet. Von dem Endpunkte von b fällt man ein zweites Lot x_1 auf a, von dem Fußpunkte dieses Lotes ein drittes Lot x_2 auf b u. s. w., immer wieder ein Lot von dem Fußpunkte des letzten Lotes auf den andern Schenkel. Wie groß ist die Summe aller Lote $x + x_1 + x_2 \ldots$, die sich in der angegebenen Weise bis in die Spitze des Winkels fällen lassen?

82. Wie würde das Resultat der vorigen Aufgabe sein, wenn die Lote in der angegebenen Weise gefällt wären, aber sonst nichts gesagt ist, als das erste Lot sei gleich c, das zweite c_1?

83. Es ist ein gleichschenkliges Dreieck gegeben. Jeder der Schenkel ist $= a$, die Basis $= b$. In dasselbe werden möglichst viele Kreise beschrieben, so daß der erste die Basis und die beiden Schenkel, jeder folgende den vorhergehenden und die beiden Schenkel berührt, bis in die Spitze. Wie groß ist die Summe der Radien aller dieser Kreise, wie groß die Summe ihrer Peripherieen und wie groß die Summe ihrer Inhalte?

84. Es ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a gegeben. In das Dreieck wird ein Kreis beschrieben, in den Kreis wieder ein gleichseitiges Dreieck, in das gleichseitige Dreieck wieder ein Kreis u. s. w. bis zum Mittelpunkt. Wie groß ist die Summe der Radien aller dieser

Kreise, wie groß die Summe ihrer Peripherieen, wie groß die Summe ihrer Inhalte?

85. Es ist ein gleichseitiges Dreieck gegeben. Man konstruiert aus den Höhen dieses Dreiecks ein zweites gleichseitiges Dreieck, aus den Höhen des zweiten ein drittes u. s. w. bis ins Unendliche fort. Wie groß ist die Summe aller so konstruierten Dreiecke, das gegebene mitgerechnet?

86. Wie ist das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn das gegebene Dreieck ungleichseitig, sein Flächeninhalt $= p$ und der Inhalt des nächsten aus seinen Höhen konstruierten Dreiecks $= q$ ist?

87. In einen Kreis, dessen Radius r ist, wird ein Quadrat beschrieben, in das Quadrat ein Kreis, in diesen Kreis wieder ein Quadrat u. s. w. bis zum Mittelpunkt fort. Wie groß ist die Summe aller konstruierten Kreise, den gegebenen nicht mitgerechnet, und wie groß ist die Summe aller Quadrate?

XXXIII.

Zinseszins- und Rentenrechnung.

$$\text{I.}\quad a q^n = b,\ q = \frac{100 + p}{100}$$

$$\text{II.}\quad a q^n \pm \frac{r(q^n - 1)}{q - 1} = b$$

$$\text{III.}\quad \frac{rq(q^n - 1)}{q - 1} = b$$

Die erste Formel giebt das Endkapital b an, welches aus dem Anfangskapital a zu p Prozent nach Verlauf von n Jahren entsteht.

Die zweite Formel giebt das Endkapital b an, welches aus dem Anfangskapital a bei p Prozent nach Verlauf von n Jahren entsteht, wenn das Kapital außer den Zinsen am Ende jedes Jahres um die Summe r vermehrt oder vermindert wird.

Die dritte Formel, welche leicht aus der zweiten folgt, giebt das Endkapital b an, welches nach Verlauf von n Jahren bei p Prozent entsteht, wenn man im Anfang jedes Jahres dieselbe Summe r auf Zinsen legt.

Die Größe q heißt Zinsfaktor. — Wie groß ist der Zinsfaktor für 4, 5, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{4}$, $4\frac{3}{4}$, $4\frac{2}{3}$, $5\frac{1}{3}$, $4\frac{5}{6}$, $5\frac{3}{7}$, 5,2, 5,3 Pzt.?

Wie groß sind umgekehrt die Prozente bei einem Zinsfaktor von 1,05, 1,06, 1,045, 1,0475, 1,0525, 1,04936, 1,05139, $1\frac{1}{20}$, $1\frac{1}{30}$, $1\frac{1}{24}$, $\frac{23}{22}$, $\frac{43}{41}$, $\frac{64}{61}$?

1. Ein Kapital von 1500 Mk. steht zu 4 Pzt. auf Zinsen. Zu welcher Summe wächst es mit den Zinsen und Zinseszinsen in 30 Jahren an?

2. Zu welcher Summe wächst ein Kapital von 3750 Mk. bei 5 Prozent in 20 Jahren an?

3. Was wird aus 4500 G. bei 4,3 Pzt. in 25 Jahren?

4. Am 1. Juli 1857 gab man 3377 Mk. zu $4\frac{3}{4}$ Pzt. auf Zinsen. Am 1. April 1875 sollte das Kapital mit den Zinsen und Zinseszinsen ausgezahlt werden. Wie groß war die Summe?*)

5. Zu welcher Summe waren 17091 Fr., welche am 22. Oct. 1859 auf Zinsen gegeben wurden, bis zum 7. März 1873, wo sie ausgezahlt wurden, bei $4\frac{2}{3}$ Pzt. angewachsen?

5_1. Desgl. bei $5\frac{1}{4}$ Pzt. 1433 G., eingezahlt am 2. Aug. 1862, ausgezahlt am 21. Mai 1874?

6. Wozu wäre ein bei Christi Geburt zu 4 Pzt. auf Zinseszins gegebener Pfennig am Ende des Jahres 1870 angewachsen, in Erdkugeln von reinem Golde berechnet? — Es gehen, das Kupfer nicht gerechnet, 1395 Mk. auf 1 Pfd. Gold; das specifische Gewicht des Goldes ist 19,32; der mittlere Erdradius beträgt 849 Meilen, die Meile zu 7500 m, und der Inhalt der Kugel ist durch die Formel $\frac{4}{3}r^3\pi$ bestimmt.

6_1. Zu welcher Summe wachsen 25300 Mk. in 10 Jahren an, die Zinsen halbjährlich zum Kapital und halbjährlich $2\frac{1}{2}$ Pzt. gerechnet?

6_2. Wie groß ist der Zuwachs von 1000 Mk. in 10 Jahren bei 6 Pzt. jährlich, 3 Pzt. halbjährlich, $1\frac{1}{2}$ Pzt. vierteljährlich, $\frac{1}{2}$ Pzt. monatlich, 1) wenn die Zinsen jährlich, 2) halbjährlich, 3) vierteljährlich, 4) monatlich zum Kapital gerechnet werden?

7. Ein Kapital, das zu 4 Prozent stand, wuchs in 22 Jahren zu 17000 G. an. Wie groß war dasselbe?

8. Welches Kapital wächst in 30 Jahren bei $4\frac{1}{2}$ Pzt. zu 30000 Mk. an?

9. Welches Kapital wächst bei $5\frac{1}{4}$ Pzt. in 100 Jahren zu einer Million Fr. an? [11.]

10. Ein am 1. Januar 1861 zu $5\frac{1}{3}$ Pzt. ausgeliehenes Kapital wird am 1. Juli 1872 mit 13296 Mk. zurückgezahlt. Wie groß war dasselbe ursprünglich?

11. Wie groß desgl. ein am 1. März 1859 eingezahltes und am 1. November 1874 mit 16957 Mk. ausgezahltes Kapital, die Zinsen zu $4\frac{1}{4}$ Pzt. gerechnet?

12. Jemand hatte am 4. Febr. 1873 eine Summe von 3517 G. zu zahlen, zahlte aber schon am 30. Juni 1866. Wie groß war die Barzahlung bei $4\frac{2}{3}$ Pzt.?

13. Welches Kapital wächst bei $4\frac{1}{2}$ Pzt. in 10 Jahren zu derselben Summe an, zu welcher 8549 Mk. bei 5 Pzt. in 7 Jahren anwachsen?

13_1. Ob man ein gewisses Kapital zu 4 Pzt. 11 Jahre oder zu

---

*) Das Jahr ist zu 12 Monaten oder bei einem andern Monatsbruch als $\frac{1}{2}$ zu 365 Tagen gerechnet. Im ersten Falle ist jeder Monat mit 30 Tagen, im letzten jeder mit der ihm zukommenden Anzahl von Tagen in Rechnung zu bringen.

5 Pzt. 9 Jahre ausstehen hat, macht im Endkapital einen Unterschied von 97 G. Wie groß war dasselbe?

13_2 Was bringt mehr, ob man ein Kapital 10 Jahre bei 4 Pzt. auf Zinsen hat, oder 4 Jahre bei 10 Pzt., und wie groß ist der Unterschied für 1000 Mk.?

13_3. Zwei Kapitalien, von denen das eine 392 Mk. größer ist als das andere, stehen auf Zinsen, das kleinere zu $5\frac{1}{4}$ Pzt., daß größere zu $3\frac{1}{4}$ Pzt. Wie groß ist jedes, wenn in 40 Jahren das kleinere gerade doppelt so groß wird als das größere?

13_4. Zwei Kapitalien stehen zu $4\frac{3}{4}$ Pzt. auf Zinsen und geben nach 20 Jahren einen Unterschied von 14660 Mk. Wie groß ist jedes, wenn ihre Summe ursprünglich 25795 Mk. beträgt?

13_5. Zwei Kapitalien, von denen das zweite um 1420 G. größer ist als das erste, wachsen in 16 Jahren zusammen zu 211084 G. an. Wie groß ist jedes, wenn sie bezw. zu 4 und 5 Pzt. stehen?

14. Zu wie viel Prozent steht ein Kapital a, das in n Jahren zu b Mk. angewachsen ist?

15. Zu wie viel Prozent muß man 15000 Mk. ausleihen, daß sie in 32 Jahren zu 60000 Mk. anwachsen?

16. Zu wie viel Prozent muß man 3333 G. ausleihen, daß sie in 24 Jahren eine Summe von 10000 G. ausmachen?

17. Zu wie viel Prozent müssen 4444 Fr. ausgeliehen werden, daß sie in 44 Jahren zu 44444 Fr. anwachsen?

17_1. Zwei Kapitalien, die sich wie 2 : 3 verhalten, wachsen in 22 Jahren zu gleichen Summen an. Zu wie viel Prozent stehen sie, wenn die Prozente sich wie 3 : 2 verhalten?

18. Ein am 18. August 1863 ausgeliehenes Kapital von 25000 G. wurde am 3. Januar 1870 mit 34121 G. zurückgezahlt. Wie viel Prozent rechnete man?

19. Ein am 15. Juli 1874 fälliges Kapital von 2590 Mk. wurde schon am 3. Mai 1861 mit 4729 Mk. bezahlt. Wie viel Prozent?

20. Zu wie viel Prozent steht ein Kapital, das sich in 20 Jahren verdreifacht?

21. Zu wie viel Prozent steht ein Kapital, das sich in 30 Jahren verfünffacht?

22. Ein Wucherer lieh an jemand 700 Mk. und ließ sich dafür einen Wechsel auf 1000 Mk., nach drei Jahren zahlbar, ausstellen. Wie viel Prozent nahm er, die Zinseszinsen mitgerechnet?

23. Zu wie viel Prozent müssen 16000 G. stehen, daß sie in 11 Jahren zu ebenso viel anwachsen, als 24000 G. bei 4 Prozent in 6 Jahren?

23_1. Zwei Kapitalien, von denen das zweite doppelt so groß ist als das erste, aber 2 Pzt. niedriger steht, wachsen in $36\frac{1}{2}$ Jahren zu gleichen Summen an. Zu wie viel Prozent steht jedes?

24. In wie viel Jahren wächst ein Kapital a bei p Prozent zu b Mk. an?

25. In wie viel Jahren wachsen 31720 Fr. bei $4\frac{1}{2}$ Prozent zu 50000 Fr. an?

26. In wie viel Jahren wachsen 8007 G. bei $4\frac{3}{4}$ Prozent zu 21218 G. an?

27. In wie viel Jahren verdoppelt sich ein Kapital, das zu 4 Prozent steht?

28. In wie viel Jahren desgleichen eins zu 5 Prozent?

29. In wie viel Jahren eins zu 6 Prozent?

30. In wie viel Jahren verzehnfacht sich ein Kapital, das zu 4 Prozent steht?

31. In wie viel Jahren desgleichen eins zu 5 Prozent?

32. In wie viel Jahren wachsen 4000 Mk. bei $5\frac{1}{2}$ Prozent zu derselben Summe an, zu der 10000 Mk. in dieser Zeit bei 4 Prozent anwachsen? Und zu welcher Summe wird in jenen Jahren, den Bruchteil für voll gerechnet, jedes der Kapitalien anwachsen?

33. In wie viel Jahren wachsen 17000 G. zu $4\frac{1}{2}$ Prozent zu ebenso viel an, als 7000 G. zu $5\frac{1}{2}$ Prozent in 20 Jahren?

33_1. Am 1. Juli 1850 wurden 1000 Mk. auf Zinsen gegeben zu $4\frac{1}{2}$ Pzt. Sie wurden zurückgezahlt, als sie zu 2222 Mk. angewachsen waren. Wann geschah das?

33_2. Desgl. 3700 G., am 1. Okt. 1855 auf Zinsen gegeben zu 5 Pzt. und mit 5000 G. zurückgezahlt.

33_3. Wann wurden 5000 Fr. auf Zinsen gegeben, die am 7. Mai 1873 mit 12000 Fr. zurückgezahlt wurden, $4\frac{2}{3}$ Pzt. gerechnet?

33_4. Desgl. 3000 Mk., die mit 10000 Mk. am 15. Dezember 1869 zurückgezahlt wurden, $4\frac{1}{4}$ Pzt. gerechnet?

34. Wie viel betragen die halbjährlichen Zinsen von 100 Mk., wenn jährlich 5 Prozent gerechnet und die Zinsen halbjährlich zum Kapital geschlagen werden?

35. Wie viel betragen bei 4 Prozent jährlich die vierteljährlichen Zinsen, die Zinsen vierteljährlich zum Kapital gerechnet?

36. Wie viel betragen bei $\frac{1}{2}$ Prozent monatlich die Zinsen jährlich, die Zinsen monatlich zum Kapital gerechnet?

37. Wie ist das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn monatlich p Prozent gerechnet werden?

38. Für ein Gut bietet A 600000 Mk. bar, B 696000 Mk. nach 3 Jahren ohne Zinsen zahlbar, C 729000 Mk. nach 4 Jahren ohne Zinsen zahlbar. Wer bot am meisten, wenn 5 Prozent und Zinseszinsen gerechnet werden, und wie viel bot er mehr als die beiden andern?

39. Für ein Gut bot A 150000 G. bar, B 185000 G. nach 4 Jahren ohne Zinsen zahlbar, C 215000 G. nach 7 Jahren ohne Zinsen zahlbar. Wer bot am meisten, Zinseszinsen zu $5\frac{1}{2}$ Prozent gerechnet, und wie viel bot er mehr, als die beiden andern?

39_1. Von einem Kapital, das zu 4 Prozent stand, gingen am Ende des 10. Jahres 14776 G. verloren. Wie groß war dasselbe ursprünglich, wenn es am Ende des 20. Jahres auf 73880 G. angewachsen war?

39_2. Es will jemand eine Summe Geldes 20 Jahre hindurch auf Zinsen geben, um sich nach Ablauf der Zeit durch die Zinsen des erlangten Kapitals eine gewisse Einnahme zu sichern. Er rechnet auf 5 Pzt. Um den wievielten Teil muß er die Summe vermehren, wenn er nur 4 Pzt. erhalten kann?

40. Ein Kapital a wächst bei 4 Pzt. in 15 Jahren zur Summe b an. Welches sind die kleinsten ganzen Zahlen für a und b, daß die Rechnung in den Logarithmen bis auf 7 Decimalen stimmt?

40_1. Dasselbe für 5 Pzt. und 8 Jahre.

40_2. Dasselbe für $4\frac{1}{2}$ Pzt. und 12 Jahre.

41. Zwei Kapitalien a und a_1, die bez. zu 4 und 5 Pzt. stehen, wachsen in 10 Jahren zu gleichen Summen an. Welches sind die kleinsten ganzen Zahlen für a und a_1, daß die Rechnung wie in 40. stimmt, und wie groß sind die zugehörigen Endkapitalien?

41_1. Dasselbe für die Endkapitalien b und b_1, zu denen zwei gleiche Kapitalien bei $4\frac{1}{2}$ und $5\frac{1}{2}$ Pzt. in 12 Jahren anwachsen, und wie groß sind die zugehörigen Anfangskapitalien?

42. Ob man ein Kapital n Jahre zu 4 Pzt. oder n_1 Jahre zu 5 Pzt. stehen hat, macht keinen Unterschied im Endkapital. Wie heißen für n und n_1 die kleinsten ganzen Zahlen unter 100, daß die Rechnung möglichst genau stimmt, und wie groß ist für die gefundenen Zahlen bei einem Kapital von 1000 Mk. der Unterschied in den Endkapitalien?

---

43. Ein Kapital von 1000 Mk. steht zu 5 Prozent und wird jährlich*) außer den Zinsen um 100 Mk. vermehrt. Wie groß ist die Summe nach 10 Jahren?

44. Was wird aus einem Kapital von 4500 G. in 12 Jahren, wenn es jährlich außer den Zinsen um 150 G. vermehrt wird, die Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ Prozent gerechnet?

45. Ein Kapital von 10000 Mk. steht zu $5\frac{1}{4}$ Prozent und wird jährlich außer den Zinsen um 300 Mk. vermehrt. Wie groß wird dasselbe nach 8 Jahren sein?

46. Ein Waldbestand, der auf 100000 *cbm* abgeschätzt wird, vermehrt sich in jedem Jahr um $4\frac{1}{3}$ Prozent. Wie viel wird nach 20 Jahren vorhanden sein, wenn jährlich 1500 *cbm* gehauen werden?

47. Was bleibt von einer Schuld von 40000 Mk, die zu 5 Pzt. steht, nach 10 Jahren übrig, wenn jährlich mit den Zinsen 5000 Mk. bezahlt werden?

48. Wie viel beträgt nach 8 Jahren der Rest einer Schuld von 4000 G., die zu $4\frac{1}{2}$ Prozent stehen, wenn jährlich mit den Zinsen 500 G. bezahlt werden?

48_1. Jemand versichert sein Leben, 30 Jahre alt, mit 40000 Mk.

*) d. h. am Ende jedes Jahres. Ähnliches gilt für halbjährlich, monatlich u. s. w. Die Zahlungen geschehen, wenn es nicht anders angegeben ist, am Ende des Zeitabschnittes.

und zahlt zu dem Zwecke zu Anfang jedes Jahres 900 Mk. bei einer Bank ein. Er stirbt 56 Jahre alt. Hat die Bank gewonnen oder verloren, und wie viel, $4\frac{1}{2}$ Pzt. gerechnet?

48_2. Jemand hinterläßt seinen 5 Kindern ein Vermögen von 50000 Mk., das zu 4 Pzt. auf Zinsen steht. Es werden 6 Jahre hindurch jährlich 3000 Mk. für die Erziehung der Kinder ausgegeben. Dann wurde das Vermögen unter die Kinder gleich geteilt. Wie viel kam auf jedes Kind?

48_3. Wie groß wird die Einwohnerzahl eines Staates, die jetzt 20 Millionen beträgt und vor 200 Jahren 8 Millionen betrug, nach 20 Jahren sein, wenn sie diese Zeit hindurch in derselben Weise zunimmt, aber jährlich 10000 Personen auswandern?

48_4. Es zahlt jemand 20 Jahre hindurch zu Anfang jedes Jahres 1012 Mk. bei einer Kasse ein, die $4\frac{1}{2}$ Prozent rechnet. Wie groß ist sein Vermögen nach Ablauf der angegebenen Zeit, wenn am Ende jedes Jahres für die Verwaltung $\frac{1}{2}$ Pzt. abgezogen wird?

48_5. Es hinterläßt jemand ein Vermögen von 100000 Fr. Davon sollen seine Kinder 10 Jahre hindurch jährlich 6810 Fr. haben. Dann sollen die Zinsen des noch vorhandenen Kapitals für die Schulen des Ortes verwendet werden. Wie viel macht das jährlich, $4\frac{2}{3}$ Pzt. gerechnet?

48_6. Es zahlt jemand 24 Jahre hindurch zu Anfang jedes Jahres 100 Mk. Prämie an eine Kasse. Nach seinem Tode erhielt seine Witwe 10 Jahre hindurch halbjährlich 200 Mk. Hatte die Kasse Vorteil oder Nachteil davon, und wie viel, wenn die erste Auszahlung $1\frac{1}{2}$ Jahr nach der letzten Einzahlung geschah, 4 Pzt. gerechnet?

48_7. Jemand will ein Kapital auf Zinsen legen, daß er nach Ablauf von 25 Jahren bei einem jährlichen Zuschuß von 300 Mk. ein Vermögen von 40000 Mk. hat. Mit welcher Summe muß er anfangen, zu $4\frac{1}{2}$ Pzt. gerechnet?

48_8. Dasselbe für 1209 Mk. jährlich, 30 Jahre hindurch, wenn das Endkapital 120000 Mk. sein soll, 5 Pzt. gerechnet?

49. Wie gestaltet sich die Formel III., wenn man am Ende jedes Jahres statt am Anfang die gleiche Summe r auf Zinsen legt?

49_1. A legt im Anfang jedes Jahres r Mk. auf Zinsen, B am Ende jedes Jahres, beide n Jahre hindurch. Wie viel mehr hat A schließlich nach n Jahren als B, und wie groß ist der Unterschied für 100 Mk. jährlich in 20 Jahren bei 4 Pzt?

49_2. Jemand legt jährlich von seinem Einkommen 200 G. zurück. Wie hoch wächst diese Summe in 20 Jahren an, die Zinsen zu $4\frac{1}{4}$ Pzt. gerechnet? [49.]

50. Ein anderer erspart von seinem Gehalte jährlich 150 Mk. und giebt diesen Überschuß auf Zinsen zu 4 Prozent. Wie groß wird sein Ersparnis sein, als er 30 Jahre im Amte ist?

51. Ein Pächter blieb von seiner Pacht jährlich 300 G. schuldig. Wie hoch belief sich seine Schuld nach 7 Jahren, die Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ Pzt. veranschlagt?

51_1. Wie viel muß jemand 28 Jahre hindurch 1) zu Anfang jedes Jahres, 2) am Ende jedes Jahres auf Zinsen legen, daß er nach Ablauf der genannten Zeit ein Kapital von 24684 Mk. hat, 4 Pzt. gerechnet?

51_2. Dasselbe für 32 Jahre und 45857 Mk. bei 5 Pzt.

52. Zwei Beamte A und B beziehen jährlich Gehalte von 2400 und 3000 Mk. Wie viel größer war die Gesamteinnahme des B als die des A, als sie 20 Jahre im Amte waren, die Zinsen jährlich zum Kapital gelegt und $4\frac{1}{2}$ Pzt. gerechnet?

53. A bezieht jährlich ein Gehalt von 2700 Mk., B von 3600 Mk. Jeder gebraucht jährlich zu seinem Unterhalte 2100 Mk. Wie viel mehr würde B nach 25 Jahren haben als A, wenn beide immer ihren Überschuß auf Zinsen gegeben hätten, diese zu 5 Prozent gerechnet?

54. Wie würde das Resultat der vorigen Aufgabe sein, wenn A und B ihr Gehalt vierteljährlich bezogen, also auch den Überschuß vierteljährlich auf Zinsen gegeben hätten, vierteljährlich 1 Prozent gerechnet?

55. Jemand hat ein Vermögen von 16000 G., reicht aber mit seinen Zinsen nicht aus, sondern braucht jährlich 1000 G. Nach wie viel Jahren wird er sein Kapital aufgezehrt haben, die Zinsen zu 4 Prozent gerechnet?

56. Jemand hat ein Kapital a ausstehen zu p Prozent. Er braucht jährlich r Mk. zu seinem Unterhalte. Nach wie viel Jahren wird er sein Kapital aufgezehrt haben, da ihm weiter keine Mittel zu Gebote stehen, als sein Kapital und die Zinsen?

57. Jemand hat eine Schuld von a Mk., die zu p Prozent steht, zu tilgen. Er zahlt jährlich r Mk. Nach wie viel Jahren ist die Schuld abgetragen, und wie viel hat er im letzten Jahre noch zu zahlen?

58. Jemand hat eine Schuld von 50000 Mk. zu tilgen, die zu 4 Prozent steht. Er zahlt alle Jahre 10000 Mk. ab, die Zinsen miteingerechnet. Nach wie viel Jahren hat er die Schuld getilgt, und wie viel hat er im letzten Jahre noch zu zahlen?

59. In wie viel Jahren kann jemand eine Schuld von 20000 G. tilgen, die zu $4\frac{1}{2}$ Prozent steht, wenn er jährlich 2500 G. bezahlt, und wie viel hat er im letzten Jahre noch zu zahlen?

60. Jemand erspart von seinem geringen Einkommen jährlich 50 G. und legt diese auf Zinsen. Nach wie viel Jahren wird er ein Vermögen von 5000 G. zusammen haben, die Zinsen zu $4\frac{3}{4}$ Prozent gerechnet?

61. Jemand hat ein Kapital von 8000 Fr. auf Zinsen und vermehrt dasselbe nach Ablauf jedes Jahres um 400 Fr. Nach wie viel Jahren ist dasselbe auf 50000 Fr. angewachsen, die Zinsen zu $5\frac{1}{4}$ Pzt. gerechnet?

62. Ein Kapital a, das zu p Prozent steht, wird jährlich um r vermehrt. Nach wie viel Jahren ist es zu A angewachsen?

63. Von einem Kapital A, das zu p Prozent steht, werden jährlich r Mk. bezogen. Nach wie viel Jahren wird sich das Kapital auf a Mk. vermindert haben?

64. Jemand, der eine Schuld von 20000 G. hat, die er zu $4\frac{1}{2}$ Pzt. verzinsen muß, will dieselbe in 8 Jahren abtragen. Wie viel hat er jährlich mit den Zinsen zu bezahlen?

65. Wie viel hat jemand jährlich zu bezahlen, die Zinsen mitgerechnet, der eine Schuld von 10000 Mk., die zu 5 Prozent steht, in 6 Jahren tilgen will?

66. Jemand will eine Summe a, die zu p Prozent steht, in n Jahren abtragen; wie viel hat er jährlich zu zahlen?

67. Ein Waldbestand, der jetzt zu 20000 *cbm* abgeschätzt und dessen Zuwachs jährlich auf 6 Prozent gerechnet wird, soll in der Art geschont werden, daß er nach 16 Jahren 30000 *cbm* beträgt. Wie viel kann man jährlich hauen?

67_1. Jemand hat 3000 Mk. auf Zinsen zu $5\frac{1}{4}$ Pzt. Wie viel muß er jährlich 24 Jahre hindurch zulegen, daß er nach Ablauf der Zeit 30000 Mk. Vermögen hat?

68. Jemand will sich bei einer Familie auf Leibrente geben. Er zahlt zu dem Zwecke 5100 Mk. Wie hoch rechnet er seinen Lebensunterhalt jährlich, wenn er noch 20 Jahre zu leben gedenkt, die Zinsen zu 5 Prozent angenommen?

69. Jemand will sein Leben versichern, daß seine Erben nach seinem Tode 30000 Mk. erhalten. Wie viel muß er nach Ablauf jedes Jahres zahlen, wenn er nach den Sterblichkeitstabellen noch 31 Jahre zu leben hat, die Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ Prozent gerechnet?

70. Wie groß ist der bare Wert einer Jahrrente von r Mk., die noch n Jahre hindurch fällig ist, die Zinsen zu p Prozent gerechnet?

71. A will sich bei B auf Leibrente geben. B berechnet den Unterhalt von A jährlich auf 750 Mk. Wie viel muß A zahlen, wenn er der Wahrscheinlichkeit nach noch 15 Jahre zu leben hat, die Zinsen zu 4 Prozent gerechnet?

72. Wie groß ist der bare Wert einer Jahrrente von 1200 Mk. auf 16 Jahre, die Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ Prozent gerechnet?

73. Wie groß ist der bare Wert einer Jahrrente von 1000 G., die noch 22 Jahre zu laufen hat, die Zinsen zu 4,7 Prozent gerechnet?

74. Wie viel kann man für eine Jahrrente von 900 Mk. zahlen, die 10 Jahre lang fällig ist, die Zinsen zu $4\frac{3}{4}$ Prozent gerechnet?

74_1. Jemand zahlte für ein Haus 6 Jahre hindurch zu Anfang jedes Jahres 7950 Mk. Wie groß war der Wert des Hauses, 4 Pzt. angenommen?

74_2. Wie ist das Resultat der Aufgabe, wenn die Zahlungen am Ende jedes Jahres geschehen?

74_3. Für ein Haus bietet A 30000 Mk. bar, B 35000 Mk. nach 3 Jahren, C 33000 Mk. in drei jährlichen Terminen, jedesmal 11000 Mk. zu Anfang jedes Jahres. Wer bot am meisten, wie viel bot er, und wie viel mehr als die beiden anderen, 5 Pzt. gerechnet?

75. Jemand will von seinem Grundstück einen Kanon ablösen, der jährlich 450 Mk. beträgt und noch 50 Jahre auf demselben haftet. Wie viel muß er dafür zahlen, die Zinsen zu 4 Prozent gerechnet?

76. A hat von seinem Grundstück infolge eines alten Herkommens an B jährlich 30 Schafkäse, 200 Eier und 10 Mettwürste zu liefern. Er will diese Abgabe, die auf jährlich 30 Mk. veranschlagt wird, ablösen. Wie viel muß er dafür an B zahlen, die Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ Pzt. gerechnet?

76_1. Zum Bau eines Badehauses in einem See sind 1000 (a) Mk. erforderlich. Die Unterhaltungskosten belaufen sich jährlich auf 100 (r) Mk. Wegen des Wellenschlages und Eisganges hat man alle 10 (n) Jahre auf einen Neubau zu rechnen. Ein wie großes Kapital ist nötig, eine solche Badeeinrichtung für immer zu erhalten, die Zinsen zu 4 (p) Pzt. gerechnet?

77. Wie viel Jahre hat eine Jahrrente r noch zu laufen, die a Mk. wert ist, die Zinsen zu p Prozent gerechnet?

78. Wie viel Jahre hat eine Jahrrente von 1800 Mk. zu laufen. die einen Wert von 24000 Mk. hat, die Zinsen zu $5\frac{1}{4}$ Pzt. gerechnet?

79. Wie viel Jahre hat eine Rente zu laufen, die jährlich 2250 Mk. beträgt und einen baren Wert von 30000 Mk. hat, die Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ Prozent gerechnet?

80. Jemand bestimmt in seinem Testamente, daß seine Erben seinem treuen Diener bis an sein Ende jährlich 240 Mk. auszahlen sollen. Die Erben wollen sich dieser Verpflichtung gern entledigen und werden mit dem Diener auf 3000 Mk. einig. Wie viel Jahre mußte der Diener noch leben, wenn er weder Schaden noch Vorteil von dem Übereinkommen haben sollte, die Zinsen zu 5 Prozent gerechnet?

80_1. A hat 100000 Mk. auf Zinsen und nimmt jährlich 7000 Mk. fort. B hat 10000 Mk. auf Zinsen und legt jährlich außer den Zinsen 700 Mk. hinzu. Nach wie viel Jahren haben beide gleich viel, $4\frac{5}{8}$ Pzt. gerechnet, und wie viel hat dann jeder?

80_2. A hat 1000 Mk. auf Zinsen und vermehrt sein Kapital außer den Zinsen jährlich um 400 Mk. B hat 4000 Mk. auf Zinsen und vermehrt sein Kapital jährlich um 100 Mk. Nach wie viel Jahren haben beide gleich viel, 5 Prozent gerechnet, und wie viel hat dann jeder?

81. Jemand hat n Jahre hindurch jährlich a Mk. zu zahlen. Er wird mit dem Gläubiger einig, die ganze Schuld an Mk. auf einmal zu zahlen. Wann muß dies geschehen, wenn keiner im Nachteil sein soll, p Prozent angenommen?

81_1. Wie ist das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn die Zahlungen zu Anfang jedes Jahres gemacht werden sollten?

82. Jemand hat 25 Jahre hindurch jedes Jahr 1000 Mk. zu zahlen. Nach wie viel Jahren kann er die ganze Summe 25000 Mk. auf einmal bezahlen, die Zinsen zu 5 Prozent gerechnet, 1) wenn die 1000 Mk. am Ende jedes Jahres, 2) wenn sie am Anfang jedes Jahres gezahlt werden sollten?

83. Jemand schätzt seine Arbeitskraft noch ausreichend auf 20 Jahre. Er will in dieser Zeit jährlich 900 Mk. auf Zinsen geben. Eine wie große Jahrrente wird er nach Ablauf von 20 Jahren beziehen können, wenn er dann noch 15 Jahre zu leben gedenkt, die Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ Pzt. gerechnet?

84. Wie viel muß jemand 30 Jahre hindurch jährlich auf Zinsen legen, daß er nach Ablauf der 30 Jahre noch 20 Jahre hindurch eine Jahrrente von 1500 Mk. genießen kann, die Zinsen zu 5 Prozent gerechnet?

84_1. Bei der Geburt eines Knaben legen die Eltern, nach deren Wunsch derselbe später studieren soll, so viel Geld auf Zinsen, daß der Sohn, 20 Jahre alt, von der Summe 4 Jahre hindurch zu Anfang jedes halben Jahres 500 Mk. erhalten kann. Wie groß war die Summe, 4 Prozent gerechnet?

84_2. Wenn die Eltern nach der vorigen Aufgabe 1500 Mk. auf Zinsen legten, wie viel konnte alsdann der junge Mann die 4 Jahre hindurch im Maximum erhalten 1) am Anfange jedes halben Jahres, 2) am Ende, $4\frac{3}{4}$ Pzt. gerechnet?

85. Jemand hält sich noch auf n Jahre für arbeitsfähig. Wie viel muß er in dieser Zeit jährlich auf Zinsen legen, wenn er nach Ablauf der n Jahre noch m Jahre hindurch eine Jahrrente von r Mk. genießen will, zu p Prozent gerechnet?

85_1. Wie lange muß ein Kapital von 10000 Mk. auf Zinsen stehen, daß es dann 22 Jahre hindurch eine Jahrrente von 2000 Mk. liefert, 5 Pzt. gerechnet?

86. Jemand glaubt, seine Arbeitskraft reiche noch auf 20 Jahre aus. Er spart in dieser Zeit jährlich 600 Mk. und legt sie auf Zinsen. Wie lange kann er nach Ablauf der 20 Jahre noch eine Jahrrente von 2400 Mk. genießen, die Zinsen zu 5 Prozent gerechnet?

86_1. Wie viel Jahre muß jemand 1) zu Anfang jedes Jahres, 2) am Ende jedes Jahres 400 Mk. auf Zinsen legen, daß er ein Kapital hat, von dem er 16 Jahre hindurch halbjährlich eine Rente von 1200 Mk. beziehen kann, 5 Pzt. gerechnet?

86_2. Jemand will so viel auf Zinsen legen, daß er nach 25 Jahren, wenn er halbjährlich 100 Mk. hinzufügt, so viel hat, wovon er 10 Jahre hindurch eine Jahrrente von 2000 Mk. beziehen kann. Wie groß mußte jene Summe sein, 4 Pzt. gerechnet?

86_3. Jemand will 10000 Mk., die er auf Zinsen hat, 20 Jahre hindurch jährlich um r vermehren, daß er nach 20 Jahren noch 20 Jahre hindurch eine Jahrrente von 3000 Mk. beziehen kann. Wie groß ist r, $4\frac{1}{2}$ Pzt. gerechnet?

86_4. Jemand, der 10000 Mk. auf Zinsen hat, hofft noch 40 Jahre zu leben. Er will sein Kapital so lange jährlich um 400 Mk. vermehren, daß er den Rest seines Lebens eine Jahrrente von 2000 Mk. hat. Wie viel Jahre muß er sparen, 5 Pzt. gerechnet, und wie groß wurde in dieser Zeit das Kapital?

87. Eine Rente von 1050 Mk., die noch 16 Jahre läuft, soll in eine andere verwandelt werden, die 20 Jahre läuft. Wie hoch kommt die neue, die Zinsen zu $5\frac{1}{2}$ Prozent gerechnet?

88. Wie hoch ist eine Rente, die m Jahre läuft, wenn ihr barer Wert gleich einer Rente r ist, die n Jahre läuft, die Zinsen in beiden Fällen zu p Prozent gerechnet?

89. Eine Rente r, die n Jahre läuft, zu p Prozent, soll in eine andere verwandelt werden, die n_1 Jahre läuft zu p_1 Prozent. Wie hoch wird die letztere sein?

90. Jemand will eine Rente von 1200 Mk., die 20 Jahre hindurch nach Ablauf jedes Jahres gezahlt wird, monatlich ausgezahlt haben. Wie viel wird er da erhalten, die Zinsen jährlich zu 5, monatlich zu $\frac{1}{2}$ Prozent gerechnet?

91. Eine Jahrrente von 709 G., die 25 Jahre zu laufen hat, soll in eine andere verwandelt werden, die 30 Jahre hindurch vierteljährlich gezahlt wird. Wie groß wird diese sein, die Zinsen im ersten Fall jährlich zu 5, im zweiten Fall vierteljährlich zu 1 Pzt. gerechnet?

92. Jemand bezieht auf 25 Jahre eine Jahrrente von 1500 Mk., er reicht aber damit nicht aus; er wünscht jährlich 1800 Mk. zu haben. Wie lange wird man ihm diese auszahlen können, die Zinsen zu $4\frac{3}{4}$ Prozent gerechnet?

93. Eine Jahrrente r hat noch n Jahre zu laufen. Sie soll in eine andere r_1 verwandelt werden. Wie viel Jahre wird diese laufen, zu p Prozent gerechnet?

94. Eine Jahrrente r, die noch n Jahre zu laufen hat, zu p Prozent gerechnet, soll in eine andere r_1 zu p_1 Prozent verwandelt werden. Wie lange wird die neue Rente zu laufen haben?

95. Wie groß ist der bare Wert einer Jahrrente, die n Jahre hindurch fällig ist und in geometrischer Progression wächst, r, er, e^2r, u. s. w., p Prozent angenommen?

96. Wie groß ist der bare Wert einer Jahrrente, die n Jahre zu laufen hat und das erste Jahr r Mk. beträgt, in jedem folgenden Jahre aber e Prozent mehr als im vorhergehenden, p Prozent gerechnet?

97. Eine Jahrrente ist n Jahre hindurch fällig und steigt in arithmetischer Progression r, 2r, 3r u. s. w. Wie groß ist der bare Wert derselben, die Zinsen zu q Prozent gerechnet?

XXXIV.

Permutationen, Kombinationen, Variationen.

A. Permutationen.

1. Was heißt permutieren?
2. Wie nennt man die zu permutierenden Größen?
3. Was versteht man unter einer Komplexion?
4. Welches sind die beiden wichtigsten Aufgaben, welche bei den Permutationen vorkommen?

5. Welche beiden Fälle von Permutationen hat man ferner in Bezug auf die Elemente zu unterscheiden?

6. Stelle die verschiedenen Permutationen für zwei Elemente ab, für drei Elemente abc und für vier Elemente abcd dar, lexikographisch geordnet.

7. Bilde die Permutationen von ab, und leite aus diesen auf die einfachste Weise die Permutationen für abc ab.

8. Bilde die Permutationen für drei Elemente abc und leite aus denselben auf die einfachste Weise die Permutationen für vier Elemente abcd ab.

9. Wie kann man daher allgemein aus den Permutationen von n Elementen auf die einfachste Weise die Permutationen von $n+1$ Elementen ableiten? Was ist jedoch über die Ordnung der Permutationen im letzten Falle zu bemerken, wenn sie im ersten Falle lexikographisch geordnet waren?

10. Bilde für fünf Elemente abcde lexikographisch 1) die Permutationen, welche mit a anfangen; 2) die, welche mit c anfangen; 3) die, welche mit dc anfangen.

11. Bilde für sechs Elemente mnopqr lexikographisch 1) die Permutationen, welche mit po anfangen, 2) welche mit rn anfangen.

12. Wie groß ist die Anzahl der Permutationen für 2 Elemente, für 3, für 4, für 5, für 6 Elemente, endlich allgemein für n Elemente?

13. Stelle die Permutationen für drei Elemente aab dar, unter denen zwei gleiche sind.

14. Ebenso für vier Elemente aaab, aabc, aabb.

15. Ebenso für fünf Elemente aaabb, aaabc, aabbc.

16. Desgleichen für sechs Elemente aaaabc, aaabbc, aaabcd, aabbcd, aabcde?

17. Desgleichen für sieben Elemente aaaaabb, aaaabbb, aaabbcc, aaabbcd?

18. Wie groß ist allgemein die Anzahl der Permutationen für n Elemente, wenn unter denselben r, p und q gleiche vorkommen?

19. Gieb die Anzahl der Permutationen für die Faktoren folgender Produkte an: a^2b^5, $a^2b^2c^2$, ab^3c^5, $a^2b^4c^6$.

20. Ebenso für $a^3b^3c^3$, $m^4n^4p^4$, $x^5y^5z^5$.

21. Desgleichen für $a^3b^4c^5d^6$, $a^1b^3c^5d^7$, $a^2b^4c^6d^8$.

22. Desgleichen für $a^1b^2c^3d^4e^5$, $a^2b^2c^2d^2e^2$, $a^3b^3c^3d^3e^3$.

23. Desgleichen für $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$, $a^{m-4}b^4$.

24. Wie groß die Anzahl der Permutationen von abcdefgh, welche 1) mit a oder f anfangen, 2) mit ab oder he, 3) mit abc oder geh?

25. Wie viel Permutationen giebt es von abcdefgh, in welchen 1) hbfc in derselben Reihenfolge zusammenbleiben, 2) in welchen hbfc zwar zusammenbleiben, aber ihre Reihenfolge auch beliebig ändern können?

26. Die wievielte Permutation von abcd ist cadb, wenn die Permutationen lexikographisch geordnet sind?

27. Die wievielten Permutationen sind ebenso cfadbe und ebdacf von abcdef?

28. Desgleichen gcdahebf und fbehadcg von abcdefgh?

29. Wie heißt die 100. Permutation von abcde, die 333. von mnopqr, immer vorausgesetzt, daß die Permutationen lexikographisch geordnet sind.

30. Wie heißt ebenso die 1000. Permutation von abcdefg, die 5555. von mnopqxyz?

31. Wie viel Permutationen von $a^2b^3c^4$ giebt es, welche 1) mit a anfangen, 2) mit bba, 3) mit cba?

32. Wie viel Permutationen von a^2b^3c giebt es, in denen 1) an der dritten Stelle ein a steht, 2) abc einmal zusammen in dieser Reihenfolge vorkommen?

33. Die wievielte Permutation ist ababa von aaabb, baccab von aabbcc?

34. Ebenso cababa und babaca von aaabbc?

35. Welches sind die 111., die 999. und die 1111. Permutation von aaaabbbccd?

B. Kombinationen.

1. Was versteht man unter Kombinationen?

2. Was heißt daher in dieser Beziehung kombinieren? was heißt sonst im allgemeinen kombinieren?

3. Was versteht man unter Kombinationen der 1., der 2., der 3., der 4. Klasse?

4. Wie nennt man die Kombinationen der 1. Klasse auch sonst? die der 2., der 3., der 4. Klasse?

5. Welche beiden Arten von Kombinationen unterscheidet man?

6. Was sind Kombinationen mit Wiederholung, was Kombinationen ohne Wiederholung?

7. Welche beiden Hauptaufgaben kommen auch hier vor?

8. Bilde die Unionen, Amben, Ternen und Quaternen für drei Elemente abc 1) ohne Wiederholung, 2) mit Wiederholung.

9. Bilde ebenso die Kombinationen der fünf ersten Klassen für vier Elemente abcd 1) ohne Wiederholung, 2) mit Wiederholung.

10. Bilde ebenso für fünf Elemente abcde die Kombinationen der drei ersten Klassen 1) ohne Wiederholung, 2) mit Wiederholung.

11. Wie viel Amben sind in 3, 4, 5, 6 Elementen enthalten 1) ohne Wiederholung, 2) mit Wiederholung?

12. Desgleichen wie viel Ternen?

13. Desgleichen wie viel Quaternen?

14. Wie groß ist für n Elemente die Zahl der Kombinationen der 3. Klasse, der 4. Klasse, der 5. Klasse, der r. Klasse 1) ohne Wiederholung, 2) mit Wiederholung?

15. Wie viel Elemente muß man haben, die mit Wiederholung kom-

biniert für irgend eine Klasse ebenso viel Kombinationen geben als 10 Elemente ohne Wiederholung kombiniert für dieselbe Klasse?

16. Wie viel Elemente muß man haben, die ohne Wiederholung kombiniert ebenso viel Kombinationen geben, als 12 Elemente mit Wiederholung kombiniert?

17. Die wievielte Ambe, Terne oder Quaterne von abdemnr ist am, er, dem, der, aber, ader (ohne Wiederholung)?

18. Die wievielte Ambe, Terne oder Quaterne (mit Wiederholung) von ablort ist ab, aal, aar, all, ort, boot?

19. Wie heißt die 20. Ambe, die 30. Terne, die 40. Quaterne für die Elemente abcdefgh (ohne Wiederholung)?

20. Wie heißt die 22. Ambe, die 44. Terne, die 150. Quaterne für die Elemente abcdefgh (mit Wiederholung)?

C. Variationen.

1. Was sind Variationen?

2. Was heißt daher in dieser Beziehung variieren?

3. Was sind Variationen 1. Klasse, 2. Klasse, 3. Klasse, n. Klasse?

4. Welche Arten von Variationen hat man zu unterscheiden?

5. Welches sind auch für die Variationen die beiden Hauptaufgaben?

6. Stelle die Variationen der 2. Klasse ohne Wiederholung dar für ab, abc, abcd, abcde.

7. Stelle die Variationen der 3. Klasse ohne Wiederholung dar für abc, abcd, abcde.

8. Ebenso die Variationen der 4. Klasse ohne Wiederholung für abcd und die ersten 20 für abcde.

9. Wie groß ist die Anzahl der Variationen der 2. Klasse ohne Wiederholung für 5, 7, 10, n Elemente?

10. Wie groß ist die Anzahl der Variationen 3. Klasse für dieselbe Anzahl von Elementen?

11. Desgleichen die der 4. Klasse?

12. Stelle die Variationen 2. Klasse mit Wiederholung dar für ab, abc, abcd und abcde.

13. Stelle die Variationen 3. Klasse mit Wiederholung dar für ab, abc, abcd.

14. Desgleichen diejenigen der 4. Klasse für ab und abc.

15. Wie groß ist die Anzahl der Variationen 2. Klasse mit Wiederholung für 2, 3, 5, 7, n Elemente?

16. Desgleichen die der 3. Klasse für dieselbe Anzahl von Elementen?

17. Wie groß ist die Anzahl der Variationen 4., 5., und 6. Klasse mit Wiederholung für n Elemente?

18. Die wievielten Variationen der 3. Klasse ohne Wiederholung von ehinr sind ein, her, ihr, nie?

19. Desgleichen 4. Klasse von denselben Elementen mit Wiederholung heer, hehr, hier, nein, rein?

20. Desgleichen 5. Klasse von denselben Elementen mit Wiederholung einer, innen, rinne?

21. Desgleichen 6. Klasse mit Wiederholung herein, hierin, reiner?

22. Die wievielte Variation 6. Klasse (mit Wiederholung) der Elemente en ist nennen?

23. Wie heißt die 5. und die 10. Variation 3. Klasse ohne Wiederholung von a f l t u?

24. Wie heißen die 29. und die 54. Variation 4. Klasse ohne Wiederholung von a f l t u?

25. Wie heißen die 17. und die 22. Variation 3. Klasse mit Wiederholung von d n u?

26. Wie heißen die 75. und die 199. Variation 4. Klasse mit Wiederholung von e h l m?

27. Desgleichen die 8790., die 11380. und 40146. Variation 6. Klasse mit Wiederholung von e h i l m n?

28. Wie viel Zahlen kann man bilden aus den Ziffern 012; 1) einziffrige, 2) zweiziffrige, 3) dreiziffrige, 4) vierziffrige, die links stehenden Nullen nicht gerechnet?

D. Anwendungen.

1. Es wollten 10 Personen, die bei einem Wirte täglich zu Mittag und zu Abend aßen, ihn überreden, ihnen so lange zu kreditieren, als sie ihre Plätze wechseln könnten. Wie viel Jahre hätte er noch auf Zahlung warten müssen?

2. Wie würde das Resultat der vorigen Aufgabe bei 7 Personen sein?

3. Die wievielte Permutation von hort ist roth, und die wievielte thor?

4. Die wievielte Permutation von blau ist laub?

5. Die wievielte Permutation von name ist amen?

6. Ebenso ernst von stern, abend von baden?

7. Die wievielte Permutation von radius ist darius?

8. Wie heißt die 10. und wie die 24. Permutation von amor?

9. Die wievielte Permutation muß man von heidelberg bilden, um auf geld herbei zu kommen?

10. Wie viel Wortversetzungen läßt der Hexameter von Horaz zu: Vilius argentum est auro, virtutibus aurum? Gieb einige von den Versetzungen an, welche wieder richtige Hexameter bilden.

11. Wie groß ist die Summe aller Ziffern, welche in allen Permutationen der Zahl 23357 enthalten sind, und wie groß die Summe aller dieser Permutationen, jede als eine Zahl gerechnet?

12. Wie sind die Resultate der vorigen Aufgabe für die Zahl 122578?

13. Wie viel dreiziffrige Zahlen, in denen keine Ziffer zweimal vorkommt, kann man mit den Ziffern 123456789 schreiben?

14. Wie viel gerade Linien giebt es, die je zwei von 5, von 6, von n Punkten verbinden?

15. Wie viel Diagonalen hat ein 5-Eck, ein 7-Eck, ein n-Eck?

16. In wie viel Punkten können sich 3, 4, 5, 6, n gerade Linien höchstens schneiden?

17. Wie viel Amben können in einem Lottospiel von 90 Nummern enthalten sein? Desgleichen wie viel Ternen und Quaternen?

18. Auf wie viel Arten lassen sich 7 Karten unter 2 Personen verteilen, daß die eine 3, die andere 4 erhält?

19. Auf wie viel Arten lassen sich 9 Karten unter 3 Personen so verteilen, daß die erste 2, die zweite 3, die dritte 4 erhält?

20. Auf wie viel Arten lassen sich 6 Karten unter 3 Personen so verteilen, daß jede 2 erhält?

21. Auf wie viel Arten läßt sich das Produkt abcdf in 3 andere zerlegen, jedes zu 2 Faktoren?

22. Auf wievielfache Weise lassen sich 12 Karten unter 4 Personen verteilen, daß jede 3 erhält?

23. Auf wie viel Arten läßt sich ein Produkt aus 12 ungleichen Faktoren abcde ... in 4 andere zerlegen, jedes zu 3 Faktoren?

24. Auf wie viel Arten lassen sich 32 Karten unter 4 Spieler so verteilen, daß jeder 8 Karten erhält?

25. Auf wie viel Arten kann dasselbe mit 52 Karten geschehen, für jeden Spieler 13 Karten?

26. Auf wie viel Arten läßt sich ein Produkt aus 2n Faktoren in n andere zerlegen, jedes zu 2 Faktoren?

27. Auf wie vielfache Weise läßt sich ein Produkt aus 2n Faktoren in 2 andere zerlegen, jedes zu n Faktoren?

28. Auf wie viel Arten läßt sich ein Produkt aus 3n Faktoren in n andere zerlegen, jedes zu 3 Faktoren?

29. Auf wie viel Arten läßt sich ein Produkt aus 3n Faktoren in 3 andere zerlegen, jedes zu n Faktoren?

30. Auf wie viel Arten lassen sich 20 Karten unter 4 Personen verteilen, daß die erste 3, die zweite 4, die dritte 6, die vierte 7 Karten erhält?

31. Jemand hat zwei Kasten und 17 verschiedene Kugeln. Er wirft in den einen Kasten 8, in den andern 9. Auf wie vielfache Weise kann das geschehen?

32. Jemand hat 3 Kasten und 19 verschiedene Kugeln. Er wirft in den ersten 4, in den zweiten 6, in den dritten 9. Auf wie viel Arten kann das geschehen?

33. Wie viel einsilbige Wörter giebt es, die aus zwei Konsonanten bestehen und einem Vokal, der zwischen jenen steht, wenn man 20 Konsonanten und mit den Umlauten 8 Vokale rechnet?

34. Wie viel Wörter giebt es demnach, die mit 2 Vokalen und 4 Konsonanten geschrieben werden, vorausgesetzt, daß die beiden Vokale die 2. und die 4. Stelle im Worte einnehmen?

35. Wie viel Würfe lassen sich mit zwei Würfeln werfen?

36. Wie viel Würfe lassen sich mit zwei Würfeln werfen, wo beide Würfel ungleiche Augen haben?

37. Wie viel Würfe lassen sich mit 3, mit 4 Würfeln werfen?

38. Wie viel Würfe lassen sich mit 3 Würfeln werfen, wo alle Würfel verschiedene Augen zeigen?

39. Wie viel Würfe lassen sich mit 3 Würfeln thun, wo 2 Würfel (aber nur 2) gleiche Augen haben?

40. Wie viel Würfe lassen sich mit 4 Würfeln thun, 1) wo 2 (nur 2) Würfel gleiche Augen haben, 2) wo 2 und 2 Würfel gleiche Augen haben (aber nicht alle 4), 3) wo 3 (nur 3) Würfel gleiche Augen haben?

XXXV.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Das Maß der (mathematischen) Wahrscheinlichkeit w für das Eintreten eines Ereignisses ist der Quotient, welchen die Anzahl aller günstigen durch die Anzahl aller möglichen Fälle giebt. Dieser Quotient heißt daher auch kurz die Wahrscheinlichkeit. Ist die Wahrscheinlichkeit $= 1$, so tritt das Ereignis gewiß ein; ist sie $= 0$, so tritt das Ereignis gewiß nicht ein. Der Quotient, welchen die Anzahl aller ungünstigen Fälle durch die Anzahl aller möglichen Fälle giebt, ist das Maß der Unwahrscheinlichkeit u für das Eintreten eines Ereignisses oder die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreten desselben und heißt kurz die Unwahrscheinlichkeit.

Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit sind folgende Formeln zu merken:

I. $w + u = 1, \quad 1 - w = u, \quad 1 - u = w$

II. $w_1 + w_2 = w$

III. $w_1 . w_2 = w$

Die erste Formel folgt aus der Definition. — Die zweite Formel giebt für zwei fragliche Fälle (einer Ursache) die Wahrscheinlichkeit, daß einer der beiden Fälle eintritt (beide können nicht eintreten), wenn die Wahrscheinlichkeit für den ersten Fall w_1 und die für den zweiten Fall w_2 ist. — Die dritte Formel giebt für zwei fragliche Fälle (zweier Ursachen) die Wahrscheinlichkeit, daß beide eintreten. Die Ermittelung der Wahrscheinlichkeit, daß nur ein Fall eintritt, mindestens ein Fall eintritt u. s. w., bedarf bei zwei und mehreren Ursachen einer besonderen Erwägung.

Wenn u_1, u_2 und u_3 die Unwahrscheinlichkeiten für das Eintreten dreier Ereignisse A, B und C sind, entsprechend den Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2 und w_3, wofür geben dann nachstehende Formeln die Wahrscheinlichkeiten an:

1. $u_1 + u_2$, $w_1 + u_2$, $w_2 + u_1$, $w_1 + w_2 + w_3$
2. $u_1 u_2$, $1 - w_1 w_2$, $1 - u_1 u_2$, $w_1 w_2 w_3$
3. $w_1 u_2 + w_2 u_1 + w_1 w_2 = 1 - u_1 u_2$, $w_1 u_2 + w_2 u_1$
4. $w_1 u_2 + w_2 u_1 + u_1 u_2 = 1 - w_1 w_2$, $1 - w_1 w_2 w_3$, $1 - u_1 u_2 u_3$
5. $w_1 w_2 u_3 + w_1 w_3 u_2 + w_2 w_3 u_1$, $w_1 u_2 u_3 + w_2 u_1 u_3 + w_3 u_1 u_2$
6. $w_1 w_2 w_3 + u_1 u_2 u_3$, $1 - (w_1 w_2 w_3 + u_1 u_2 u_3)$

---

1. Wie groß ist beim Herausziehen einer Kugel aus einem Kästchen, das 8 weiße und 12 schwarze Kugeln enthält, 1) die Wahrscheinlichkeit eine weiße zu treffen, 2) eine schwarze, 3) eine rote?

2. In einem Kästchen liegen 4 rote, 8 schwarze und 12 weiße Kugeln. Wie groß ist beim Herausziehen einer Kugel 1) die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu treffen, 2) eine weiße, 3) eine schwarze oder eine weiße, 4) keine schwarze?

3. In früheren Zeiten ließen grausame Feldherren die Mannschaft wegen schlechter Haltung decimieren. Wie groß war für den einzelnen die Wahrscheinlichkeit dem Tode zu entgehn?

4. Wie groß ist bei einem Wurfe mit einem Würfel 1) die Wahrscheinlichkeit 6 zu werfen, 2) 3 oder 4, 3) weder 3 noch 4?

5. Wie groß ist beim Aufwerfen einer Münze die Wahrscheinlichkeit Kopf zu werfen?

6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei Ziehung eines Loses von 100 zu gewinnen, wenn man 4 Lose hat?

7. Wie groß ist beim Herausziehen einer Karte aus einem Spiele von 52 Karten 1) die Wahrscheinlichkeit ein Aß zu treffen, 2) eine Karte von bestimmter Farbe, z. B. Coeur, 3) eine rote Karte, 4) ein Bild oder kein Bild?

8. Wie groß desgl. 1) die Wahrscheinlichkeit eine Karte zu treffen, welche 2, 3, 4, 5 oder 6 Augen hat, 2) keine solche Karte zu treffen?

9. Wie groß ist beim Herausziehen zweier Karten aus einem Spiel von 52 Karten 1) die Wahrscheinlichkeit eine rote und eine schwarze zu treffen, 2) zwei rote Karten, 3) zwei Coeurs, 4) zwei Bilder, 5) kein Bild, 6) ein Bild und eine andere Karte, 7) zwei Karten von gleicher Farbe, 8) zwei Karten von ungleichem Range?

10. A wettet mit B, daß er beim Herausziehen zweier Karten zwei Bilder oder kein Bild trifft. A setzt 50 Pf. und B 30. Wer hat Aussicht auf Gewinn, und wie viel durfte B höchstens wagen?

11. A und B wetten. A will beim Herausziehen zweier Karten nur rote oder nur schwarze ziehen. Wer hat Aussicht auf Gewinn?

12. A wettet mit B, beim Herausziehen zweier Karten eine rote und eine schwarze zu treffen. B setzt eine Mark. Wie viel kann A dagegen wagen?

13. Wie groß ist beim Herausziehen dreier Karten aus einem Spiele von 52 Karten 1) die Wahrscheinlichkeit nur rote zu treffen,

2) nur rote oder nur schwarze, 3) nur Coeurs, 4) nur Karten von einer Farbe, gleich viel welcher Art?

14. Desgl. die Wahrscheinlichkeiten: 1) drei Karten von verschiedener Farbe zu treffen, 2) zwei rote und eine schwarze, 3) zwei rote und eine schwarze oder zwei schwarze und eine rote, 4) nur Bilder oder kein Bild, 5) drei Karten von ungleichem Range?

15. A wettet mit B 50 Pf., beim Herausziehen dreier Karten aus einem Spiel nicht drei Karten von verschiedener Farbe zu treffen. Wie viel kann B höchstens dagegen setzen, wenn er Aussicht auf Gewinn behalten will?

16. Wie groß ist beim Herausziehen von vier Karten 1) die Wahrscheinlichkeit nur rote zu treffen, 2) nur Coeurs, 3) nur Bilder, 4) zwei rote und zwei schwarze, 5) drei rote und eine schwarze, 6) vier Karten von verschiedener Farbe, 7) vier Karten von ungleichem Range?

17. A und B wetten. A will drei Karten von verschiedener Farbe ziehen; B will vier Karten ziehen, von denen zwei rot und zwei schwarz sind. A setzt 53 Pf. Wie viel kann B dagegen setzen?

18. Wie groß ist bei einem Wurfe mit zwei Würfeln 1) die Wahrscheinlichkeit 7 zu werfen, 2) 8, 3) einen Pasch?

19. Wie groß ist bei einem Wurfe mit drei Würfeln 1) die Wahrscheinlichkeit drei gleiche Augen zu werfen, 2) zwei (nur zwei) gleiche Augen?

20. Wie groß ist bei einem Wurfe mit drei Würfeln 1) die Wahrscheinlichkeit 13 zu werfen, 2) 10, 3) 11?

21. Desgl. 1) drei ungleiche Augen, 2) drei auf einander folgende Zahlen zwischen 1 und 6?

22. Desgl. bei einem Wurfe mit vier Würfeln 1) drei (nur drei) gleiche Augen zu werfen, 2) zwei (nur zwei) gleiche Augen, 3) vier ungleiche Augen, 4) vier auf einander folgende Zahlen zwischen 1 u. 6?

23. Wie groß ist 1) die Wahrscheinlichkeit von 5 Kugeln eine gerade Anzahl zu wählen, 2) eine ungerade Anzahl?

24. Dasselbe für 6, 7, n Kugeln?

25. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit Gerade oder Ungerade zu raten, wenn alle ganzen Zahlen zur Auswahl stehen?

26. In einer Urne sind 12 weiße und 8 schwarze Kugeln. Wie groß ist beim Herausnehmen zweier Kugeln 1) die Wahrscheinlichkeit eine weiße und eine schwarze zu treffen, 2) zwei weiße, 3) zwei schwarze?

27. In einer Urne sind 18 weiße, 12 schwarze und 6 rote Kugeln. Wie groß ist beim Herausnehmen von drei Kugeln 1) die Wahrscheinlichkeit nur weiße zu treffen, 2) nur schwarze, 3) nur rote, 4) drei Kugeln von verschiedener Farbe?

28. In einer Urne sind 10 weiße und 10 schwarze Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Herausziehen von Kugeln eine gleiche Anzahl weißer und schwarzer zu treffen?

29. Wie groß ist ebenso bei einer Urne mit 12 weißen und 8 schwarzen Kugeln 1) die Wahrscheinlichkeit eine gleiche Anzahl von jeder Art zu fassen, 2) drei weiße und zwei schwarze, und wie groß

würde 3) im letzten Falle die Wahrscheinlichkeit sein, wenn das Erfassen von 5 Kugeln vorausgesetzt wäre?

30. Wie viel weiße und wie viel schwarze Kugeln wird man nach der vorigen Aufgabe am wahrscheinlichsten erfassen und wie groß ist hierfür die Wahrscheinlichkeit?

31. Eine Münze wird zweimal aufgeworfen. Wie groß ist 1) die Wahrscheinlichkeit einmal (nicht öfter) Kopf zu werfen, 2) mindestens einmal Kopf, 3) zweimal Kopf?

32. Eine Münze wird dreimal aufgeworfen. Wie groß ist 1) die Wahrscheinlichkeit einmal (nicht öfter) Kopf zu werfen, 2) mindestens einmal Kopf, 3) dreimal Kopf, 4) mindestens zweimal Kopf?

33. Wie groß ist ebenso bei 2, 3, 4, n Würfen 1) die Wahrscheinlichkeit jedesmal Kopf zu werfen, 2) einmal (nicht öfter) Kopf, 3) mindestens einmal Kopf?

34. In einer Lotterie von 90 Nummern werden 5 Treffer gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine besetzte Zahl gewinnt?

35. Desgl. die Wahrscheinlichkeit, daß von 2, 3, 12 besetzten Zahlen eine gewinnt, aber gerade nur eine?

36. Desgl. die Wahrscheinlichkeit, daß von 12 besetzten Zahlen 2, 3, 4, 5 gewinnen, gerade nur so viele?

37. Wie viel Zahlen muß man in einer Lotterie von 90 Nummern bei 5 Treffern mindestens besetzen, damit es wahrscheinlich ist ($w > \frac{1}{2}$), daß 1) gerade eine gewinnt, 2) gerade zwei, 3) gerade drei gewinnen?

38. Wie vielmal müßte ein Bankhalter in Aufgabe 34. den Einsatz auszahlen 1) auf eine einzelne Zahl, 2) auf eine Ambe, 3) auf eine Terne, wenn er sich in betreff der Aussicht auf Gewinn dem Spieler gleich stellt?

39. Wenn ich aus einem Spiel zwei Karten habe, deren Augenzahl in Summe 14, 15, 16 oder 17 beträgt, und mir noch eine dazu geben lasse, ist es wahrscheinlich, daß dann die Augenzahl der drei Karten über 21 steigt oder nicht, alle Bilder für 10 gerechnet, die Asse für 1?

---

40. Wie groß ist beim Herausziehen einer Karte aus einem Spiel die Wahrscheinlichkeit, ein Aß oder ein Bild zu treffen?

41. Man will in einem Wurfe mit zwei Würfeln 5 oder 6 Augen werfen; wie groß ist 1) die Wahrscheinlichkeit, daß ein Wurf gelingt, 2) daß kein Wurf gelingt?

42. A will mit B 10 Pf. wetten, in einem Wurfe mit zwei Würfeln 5 oder 6 oder 7 zu werfen. Wie viel kann B dagegen wagen?

43. A wettet mit B, in einem Wurfe mit zwei Würfeln weder 2, 3, 4 noch 10, 11, 12 zu werfen. Wer hat Aussicht die Wette zu gewinnen?

44. Jemand will in zwei Würfen mit zwei Würfeln das erste Mal 7 und das zweite Mal 9 werfen. Wie groß ist 1) die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein Wurf gelingt, 2) daß beide Würfe

gelingen, 3) daß nur der erste Wurf gelingt, 4) daß beide Würfe mißlingen, 5) daß ein Wurf (nicht mehr) gelingt?

45. Wie groß ist bei zwei Würfen mit zwei Würfeln 1) die Wahrscheinlichkeit einmal 5 und einmal 10 zu werfen, 2) entweder einmal 5 oder einmal 10, 3) weder 5 noch 10?

46. Wie groß ist desgl. bei drei Würfen 1) die Wahrscheinlichkeit dreimal hinter einander 7 zu werfen, 2) der Reihe nach 7, 9, 10, 3) überhaupt in einem der drei Würfe 7, in einem 9, in einem 10?

47. Jemand will mit drei Würfeln in drei Würfen das erste Mal 8 oder 10, das zweite Mal 7 oder 13, das dritte Mal 11 oder 14 werfen. Wie groß ist 1) die Wahrscheinlichkeit, daß kein Wurf gelingt, 2) daß mindestens einer gelingt, 3) nur einer, 4) daß die beiden ersten gelingen, der dritte nicht, 5) daß zwei gelingen, einer nicht, 6) daß zwei gelingen oder einer?

48. Aus einer Lotterie von 90 Losen, von denen 5 Treffer gezogen werden, hat A 4, B 5 Lose. Wie groß ist 1) die Wahrscheinlichkeit, daß beide gewinnen, 2) A allein, 3) B allein, 4) entweder A oder B, 5) weder A noch B, 6) mindestens einer?

49. Aus einer Lotterie von 90 Losen hat A 3, B 4, C 5 Lose. Es werden 5 Treffer gezogen. Wie groß ist 1) die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens einer gewinnt, 2) daß alle drei gewinnen, 3) nur zwei, 4) nur einer, 5) daß alle drei gewinnen oder alle drei verlieren, 6) daß nur zwei gewinnen oder nur einer?

50. Jemand will aus einem Spiel von 52 Karten zwei Karten ziehen, das erste Mal eine rote, das zweite Mal eine schwarze. Die zuerst gezogene Karte wird wieder eingemischt. Wie groß ist 1) die Wahrscheinlichkeit, daß beide Versuche gelingen, 2) mindestens ein Versuch, 3) nur ein Versuch, 4) daß beide Versuche mißlingen?

51. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten der vorigen Aufgabe, wenn die Reihenfolge gleichgültig ist?

52. Wie gestalten sich die Resultate der Aufgabe 50., wenn Coeur und Treffle statt Rot und Schwarz gewünscht wird?

53. Wie werden die Resultate der Aufgaben 9., 13., 14. und 16., wenn die gezogene Karte jedesmal wieder eingemischt wird, bevor man die folgende zieht?

54. In welchem Verhältnis wächst 1) die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Würfe mit zwei Würfeln einen Pasch zu werfen, wenn es in den vorhergehenden nicht geschehen ist; 2) in 2, 3, 4, 5, 6 Würfen mindestens einen Pasch zu werfen; 3) in diesen Würfen gerade einen Pasch zu werfen?

55. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß im 11. Wurfe das Wappen oben kommt, wenn man vorher 10mal hinter einander Kopf geworfen hat?

56. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei Gerade und Ungerade, wo alle Zahlen zu Gebote stehen, das 6. Mal richtig zu raten, wenn man vorher 5mal verkehrt geraten hat?

XXXVI.

Der binomische Satz.

1. Was versteht man unter einem Binom? was unter einem Polynom?

2. Schreibe 10 möglichst verschiedene Binome auf.

3. Warum ist die Betrachtung eines Binoms von besonderer Wichtigkeit, wichtiger als die eines Trinoms oder eines Polynoms?

4. Sind sonst schon Operationen mit Binomen vorgekommen und welche? Suche Beispiele im Buche auf, wo Binome vorkommen.

5. Was für einen Satz versteht man unter dem binomischen Satz?

6. Wie weit sind die Formeln für den binomischen Satz schon dagewesen?

7. Entwickele durch Multipl. die Produkte $(x+a)(x+b)(x+c)$ und $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$, und gieb das Gesetz an, wie die Koefficienten der Potenzen von x gebildet sind.

8. Gieb darnach ohne Rechnung die Entwickelung des Produkts $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)$ an.

9. Wie werden die Entwickelungen von $(x-a)(x-b)(x-c)$ und $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ heißen?

10. Wie heißen sie von $(x+a)(x-b)(x-c)$ und von $(x-a)(x+b)(x-c)(x+d)$?

11. Entwickele nach dem aufgefundenen Gesetze direkt ohne Multiplikation $(x+1)(x+2)(x+3)$, $(x+2)(x+4)(x+6)$, $(x-1)(x-5)(x-9)$.

12. Entwickele ebenso $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ und $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$.

13. Führe ohne Rechnung aus $(x-1)(x-2)(x+3)$ und $(x+1)(x+4)(x-5)$.

14. Was giebt desgleichen $(x-1)(x+2)(x+3)(x-4)$ und $(x+1)(x-3)(x-5)(x+8)$?

15. Entwickele durch Multiplikation $(ax+1)(bx+1)(cx+1)$ und $(ax+1)(bx+1)(cx+1)(dx+1)$, und gieb das Gesetz für die Bildung der Koeffizienten an.

16. Entwickele darnach ohne Multipl. $(3x+1)(2x+1)(5x+1)$ und $(7x+1)(4x-1)(3x-1)$.

17. Was wird aus d. Prod. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ und seiner Entwickelung, wenn $a=b=c=d$ wird?

18. Was aus $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)(x+f)$, wenn $a=b=c$ u. s. w. ist?

19. Der binomische Satz heißt, wenn n eine ganze Zahl ist,

$$(a+b)^n$$

$$=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3+\ldots b^n$$

Wie läßt sich dieser Satz nach dem Obigen beweisen?

20. Welches Gesetz findet statt für die Exponenten der Potenzen von a und b in der Entwickelung von $(a+b)^n$ hinsichtlich ihres Abnehmens und Wachsens, und wie groß muß ihre Summe in jedem Gliede stets sein?

21. Wenn daher $N a^p b^q$ ein Glied der Entwickelung von $(a+b)^n$ ist, welcher Bedingung müssen p und q dann stets genügen, und wie groß muß q sein, wenn z. B. $p = 7$ ist?

22. Wie viel Glieder hat die Entwickelung von $(a+b)^{20}$, von $(a+b)^{35}$, von $(a+b)^{2n-1}$?

23. Entwickele nach dem binomischen Satze $(x+a)^6$, $(y+b)^8$, $(p+q)^{10}$.

24. Desgleichen $(r+t)^5$, $(x+y)^7$, $(u+v)^9$.

25. Wie heißt die Entwickelung für $(a-b)^n$, und wie unterscheidet sich diese von derjenigen für $(a+b)^n$?

26. Was ist demnach $(a-x)^5$, was $(t-x)^7$?

27. Was ist $(1+x)^6$, $(1-x)^7$, $(1+t)^8$, $(t-1)^9$?

28. Was ist $(a+x)^6+(a-x)^6$, $(1+t)^6-(1-t)^6$?

29. Welche Glieder müssen in der Summe und Differenz von $(a+b)^n$ und $(a-b)^n$ bei der Entwickelung fortfallen und welche sich verdoppeln?

30. Schreibe hiernach die Summen $(1+x)^7+(1-x)^7$, $(x+1)^7+(x-1)^7$, $(1+x)^8+(1-x)^8$, $(x+1)^8+(x-1)^8$ hin, ohne die ganze Entwickelung zu machen.

31. Desgleichen die Differenzen $(1+x)^7-(1-x)^7$, $(x+1)^9-(x-1)^9$, $(1+x)^8-(1-x)^8$, $(x+1)^{10}-(x-1)^{10}$.

32. Wie heißt das 7. Glied der Entwickelung von $(a+b)^{10}$, das 11. Glied von $(x-y)^{15}$, das 8. Glied von $(p-q)^{20}$?

33. Was versteht man unter Binominalkoefficienten? Wie heißen der 4. und der 7. Binominalkoefficient (1 nicht gerechnet) in der Entwickelung von $(a+b)^n$?

34. Wie heißt der 6. und wie der 10. Binominalkoefficient in der 14. Potenz eines Binoms? wie der 8. und der 18. Koefficient der 20. Potenz?

35. Wie heißt der r. Koefficient in den Entwickelungen von $(a+b)^n$, $(a-b)^n$, $(a-b)^{2r}$, $(a-b)^{2r-1}$?

36. Wie heißen die Koefficienten von a^4b^5 und von a^2b^7 in der Entwickelung von $(a+b)^9$?

37. Wie die von $a^{10}b^5$ und a^3b^{12} für $(a-b)^{15}$?

38. Wie die von a^7b^3, a^5b^5 und a^2b^8 für $(a+b)^{10}$? wie die von x^5y^6 und x^6y^5 für $(x-y)^{11}$?

39. Die Koefficienten der Entwickelung von $(a+b)^n$ müssen nach rechts und links symmetrisch sein. Weshalb?

40. Welche Glieder haben in der Entwickelung von $(a+b)^n$ dieselben Koefficienten wie das 5., das 7. und das r. Glied, und wie heißen diese Glieder?

41. Welche Glieder haben in der 31. Potenz eines Binoms dieselben Koefficienten wie das 7., das 12., das 27. Glied und wie heißen sie?

42. Welche Potenzenprodukte haben in der Entwickelung von $(a+b)^9$ gleiche Koefficienten mit a^2b^7 und a^4b^5? welche in der Entwickelung von $(a+b)^{16}$ mit a^5b^{11}, a^7b^9 und a^8b^8, und wie heißen die zugehörigen Koefficienten?

43. Welche Potenz von x hat in der Entwickelung von $(1+x)^{12}$ mit x^4 und welche mit x^6 gleichen Koefficienten? welche in $(1+x)^{17}$ mit x^5 und mit x^8, und wie heißen die zugehörigen Koefficienten?

44. Wenn A der 9. Binomialkoefficient der Entwickelung von $(a+b)^n$ ist, wie heißt dann der 10. Koefficient?

45. Wenn A, B, C, D bezüglich der 7te, der 13te, der 20ste, der 29ste Koefficient der 16ten, der 20sten, der 50sten, der 58sten Potenz eines Binoms sind, wie heißt dann in jedem Falle der nächstfolgende Koefficient?

46. Welches Gesetz gilt für die Koefficienten in der Entwickelung der nten Potenz eines Binoms, so lange n eine positive ganze Zahl?

47. Bei einer ungeraden Potenz des Binoms kommen alle Koefficienten paarweise vor, bei einer geraden Potenz der mittlere nur einmal. Weshalb?

48. Die wievielten Koefficienten sind die beiden größten in den Entwickelungen von $(a+b)^9$ und $(a+b)^{13}$, und wie heißen dieselben?

49. Die wievielten Koefficienten sind in den Entwickelungen von $(a+b)^{10}$ und $(a+b)^{14}$ die größten, und wie heißen dieselben?

50. Die wievielten Koefficienten sind die mittleren in den Entwickelungen von $(a+b)^{2n-1}$, $(a+b)^{2n+1}$, $(a+b)^{2n}$ und $(a+b)^{2n-2}$, und wie heißen dieselben?

51. Wenn n_1, n_2, n_3 u. s. w. die Binomialkoefficienten für die nte Potenz eines Binoms sind, so ist immer bei einer ähnlichen Bezeichnung für die $(n+1)$te Potenz: $n_r + n_{r-1} = (n+1)_r$. Wie heißt dieser Satz in Worten, und wie wird er bewiesen?

52. Wie groß ist demnach die Summe des 7. und 8. Binomialkoefficienten der 13. Potenz und wie groß ist die des 5. und 6. der 16. Potenz?

53. Wie groß ist die Summe aller Koefficienten in den Entwickelungen von $(a+b)^7$, $(a+b)^{10}$, $(a+b)^n$?

54. Desgleichen von $(a-b)^8$, $(a-b)^{11}$, $(a-b)^n$?

54_1. Was folgt aus 53. und 54. für die Summe der geraden und die der ungeraden Binomialkoefficienten irgend einer Potenz, und wie groß ist darnach die Summe aller geraden und die aller ungeraden Kombinationen für n Elemente?

55. Entwickele $(x-2y)^7$, $(3x+y)^8$. $(2x+3y)^5$, $(5-2t)^6$.

56. Desgleichen $(1+x^2)^6$, $(1-x^3)^7$, $(1+x^2)^5$, $(x^2-y^3)^6$

57. Desgleichen $\left(\frac{1}{2}x+2\right)^5$, $\left(\frac{1}{3}x-3y\right)^6$, $\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}x\right)^7$,

58. Desgleichen $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$, $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^7$, $\left(\frac{2a}{3b}-\frac{3b}{2c}\right)^6$.

59. Wie heißt das 7. Glied in der Entwickelung von $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$, das 10. Glied in der von $\left(\frac{m}{2n} - \frac{2x}{m}\right)^{15}$?

60. Wie heißt das 5. Glied in der Entwickelung von $\left(\frac{x^2}{4} - \frac{2a}{x^3}\right)^9$, wie das 9. Glied in der Entwickelung von $\left(\frac{2a^2}{3x} - \frac{3x^2}{2a}\right)^{14}$, und welche Glieder haben in jedem Falle denselben Koefficienten, wie die verlangten und wie heißen sie?

61. Wie heißt der Koefficient von x^4 in der Entwickelung von $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{11}$, die Glieder mit x und x^{16} in $\left(\frac{a}{2x^2} - \frac{2x^3}{a}\right)^{12}$, das Glied mit x in $\left(\frac{x}{2m} - \frac{2a}{x}\right)^{13}$?

62. Wie heißt das Glied mit a^{-2} in $\left(\frac{a}{x} - \frac{x}{a^2}\right)^7$, das Glied mit x^{-5} in $\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x^3}\right)^{11}$?

Entwickele und berechne (auf 6 Decimalstellen) folgende Ausdrücke mit Hilfe des binomischen Satzes:

63. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^6 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^6$, $(1 + \sqrt{x})^7 - (1 - \sqrt{x})^7$
64. $(a + bi)^5 + (a - bi)^5$, $(a + bi)^6 - (a - bi)^6$
65. $(1 + i)^8 + (1 - i)^8$, $(1 + i)^9 + (1 - i)^9$
66. $(1 + i)^{10} - (1 - i)^{10}$, $(1 + i)^{11} - (1 - i)^{11}$
67. $(3 + i\sqrt{5})^7 + (3 - i\sqrt{5})^7$, $(3 + i\sqrt{5})^7 - (3 - i\sqrt{5})^7$
68. $(1 + i\sqrt{3})^9 + (1 - i\sqrt{3})^9$, $(1 + i\sqrt{3})^9 - (1 - i\sqrt{3})^9$
69. $(2 + 3i)^6 + (2 - 3i)^6$, $(2i + 3)^6 + (2 + 3i)^6$
70. $(3 + 2i)^7 + (3 - 2i)^7$, $(3 + 2i)^7 - (3 - 2i)^7$
71. $(4 + 3i)^8 + (4 - 3i)^8$, $(4 + 3i)^8 - (4 - 3i)^8$
72. $1{,}1^{10}$ $1{,}02^{20}$ $1{,}003^{22}$ $1{,}0007^{27}$
73. $0{,}9^9$ $0{,}98^{15}$ $0{,}997^{24}$ $0{,}9995^{30}$
74. $\left(\frac{91}{90}\right)^{10}$ $\left(\frac{79}{80}\right)^{11}$ $\left(\frac{51}{50}\right)^{12}$ $\left(\frac{29}{30}\right)^{13}$
75. $\left(\frac{48}{47}\right)^6$ $\left(\frac{83}{84}\right)^7$ $\left(\frac{565}{563}\right)^8$ $\left(\frac{872}{875}\right)^9$

---

76. Beweise, daß der binomische Satz auch für $(1 + x)^0$ gilt.

77. Desgleichen für $(1 + x)^{-1}$ und $(1 + x)^{-2}$.

78. Wie unterscheiden sich diese Entwickelungen wesentlich von den vorhergehenden?

79. Wie beweist man allgemein, daß der binomische Satz auch für ganze negative Exponenten anwendbar ist?

80. Wie gestaltet sich der binomische Satz in der Entwickelung von $(a+b)^{-n}$, und wie in der von $(a-b)^{-n}$?

81. Welches Gesetz gilt hier für die Koefficienten hinsichtlich ihrer Größe und ihrer Wiederholung?

82. Was haben die Koefficienten in der Entwickelung von $(a+b)^{-n}$ zu bedeuten und wie ist diese Bedeutung zu erklären?

83. Welches Gesetz gilt auch in der Entwickelung von $(a+b)^{-n}$ für die Exponenten der Potenzen von a und b?

84. Was muß bei der Entwickelung von $(a+b)^{-n}$ vorausgesetzt werden, wenn die Entwickelung Anwendung finden soll? Gieb die Bedingung für die Konvergenz an.

85. Entwickele $(a+b)^{-3}$, $(a-b)^{-5}$, $(1+x)^{-6}$, $(1+x^2)^{-4}$.

86. Desgleichen $\left(\frac{1}{2}x-2y\right)^{-7}$, $\left(\frac{3a^2}{x}-\frac{x^2}{3}\right)^{-8}$.

87. Wie heißt das 5. Glied der Entwickelung von $\left(\frac{2a^2}{b}-\frac{x}{6a^2}\right)^{-3}$, das 6. Glied von $\left(\frac{2x^2}{3y}-\frac{3y^2}{2x}\right)^{-4}$?

88. Wie heißt das r. Glied in der Entwickelung von $(a-b)^{-2r}$, von $(a+b)^{1-2r}$, von $(a-b)^{2-2r}$?

89. Wie heißt der 4. und wie der 7. Koefficient in der Entwickelung von $(a-b)^{-5}$?

90. Wie heißt der 6. Koefficient in der Entwickelung von $(a-b)^{5-n}$?

91. Wie heißt der r. Koefficient in der Entwickelung von $(a+b)^{r-n}$?

92. Wie heißt in der Entwickelung von $(a+b)^{7-n}$ der Faktor von $a^{-n}b^7$? wie der von x^{20} in $\left(\frac{2a^2}{x}-\frac{x^2}{2a}\right)^{-5}$?

---

93. Wenn p_1, p_2, p_3 u. s. w. die Binomialkoefficienten der p. Potenz, q_1, q_2, q_3 u. s. w. die der q. Potenz, $(p+q)_1$, $(p+q)_2$, $(p+q)_3$ u. s. w. die der $(p+q)$ten Potenz sind, so ist, was auch p und q für Zahlen sein mögen, immer

$$p_2 + p_1 q_1 + q_2 = (p+q)_2$$
$$p_3 + p_2 q_1 + p_1 q_2 + q_3 = (p+q)_3$$
$$p_4 + p_3 q_1 + p_2 q_2 + p_1 q_3 + q_4 = (p+q)_4.$$

Beweise das.

94. Beweise, daß allgemein für jedes p und q immer sein muß:

$$p_r + p_{r-1} q + p_{r-2} q_2 + p_{r-3} q_3 + \cdots + q_r = (p+q)_r$$

Dies geschieht durch den Schluß von r auf r + 1. Man setzt in der Reihe für $(p+q)_r$ erst p — 1 statt q, dann q — 1 statt q, multipliziert die so erhaltenen Reihen bezüglich mit p und mit q, addiert sie und dividiert ihre Summe durch r + 1.

95. Beweise hieraus: Das Produkt zweier Binomialreihen für die Exponenten p und q giebt stets wieder eine Binomialreihe für den Exponenten p + q.

96. Wie folgt daraus: Die n. Potenz einer Binomialreihe für den Exponenten p giebt eine Binomialreihe für den Exponenten np?

97. Wie folgt hieraus der allgemeine Beweis des binomischen Satzes auch für Bruchexponenten?

Entwickele und berechne (6 Decimalen) folgende Ausdrücke mit Hülfe des binomischen Satzes:

98.	$\sqrt{1+x}$	$\sqrt{1-x}$	$\sqrt{a^2+1}$	$\sqrt{x^2+y^2}$
99.	$\sqrt[3]{1+x}$	$\sqrt[3]{1-x}$	$\sqrt[3]{a^3+1}$	$\sqrt[3]{a^3+b^3}$
100.	$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$	$\frac{1}{\sqrt[5]{1+x}}$	$\frac{1}{\sqrt[6]{1-x}}$
101.	$\sqrt{1{,}0001}$	$\sqrt{1{,}001}$	$\sqrt{1{,}01}$	$\sqrt{1{,}1}$
102.	$\sqrt{0{,}9999}$	$\sqrt{0{,}999}$	$\sqrt{0{,}99}$	$\sqrt{0{,}9}$
103.	$\sqrt[3]{1{,}0004}$	$\sqrt[3]{1{,}003}$	$\sqrt[3]{1{,}02}$	$\sqrt[3]{1{,}1}$
104.	$\sqrt[3]{0{,}9996}$	$\sqrt[3]{0{,}997}$	$\sqrt[3]{0{,}98}$	$\sqrt[3]{0{,}9}$
105.	$\sqrt{10}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{102}$	$\sqrt{905}$
106.	$\sqrt{8}$	$\sqrt{143}$	$\sqrt{253}$	$\sqrt{959}$
107.	$\sqrt[3]{65}$	$\sqrt[3]{511}$	$\sqrt[3]{731}$	$\sqrt[3]{1003}$
108.	$\sqrt{2}$*)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$
109.	$\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{14}$	$\sqrt{19}$
110.	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{5}$
111.	$\sqrt[5]{244}$	$\sqrt[6]{727}$	$\sqrt[7]{131}$	$\sqrt[7]{2190}$

112. Welches ist in der Entwickeluug von $(1-x^2)\sqrt{1+x^2}$ der Koefficient von x^6 für $x < 1$ und der von x^{-5} für $x > 1$?

113. Welches ist der Koefficient von x^5 in der Entwickelung von $(1+x^2)^{-1}\sqrt[3]{1-x}$ für $x < 1$?

114. Wie heißen die Faktoren von x^7 und x^{-7} in der Entwickelung von $(a-x)^{-1}\sqrt[3]{a^3+x^3}$, wenn bezüglich $x < a$ und $x > a$ ist?

---

*) Von 108.—111. sind die Radikanden erst umzuformen, ehe man entwickelt. Man hat z. B. $\sqrt{2} = \frac{1}{5}\sqrt{25 \cdot 2} = \frac{7}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}}$; $\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{16 \cdot 3} = \frac{7}{4}\sqrt{1-\frac{1}{49}}$; $\sqrt[3]{2} = \frac{1}{8}\sqrt[3]{512 \cdot 2} = \frac{1}{8}\sqrt[3]{1024} = \frac{5}{4}\sqrt[3]{1{,}024}$ u. s. w.

Setze in folgenden Ausdrücken $x + h$ statt x, entwickele nach h und gieb den Faktor von h an.

115. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ $\qquad x^{10} - x^9 + x^8 - x^7$

116. $ax^n + bx^p$ $\qquad ax^{n+1} - bx^{n-1}$

117. $\frac{4}{7}x^7 - \frac{3}{4}x^8 - \frac{1}{5}x^{10}$ $\qquad \frac{3}{5}x^5 - \frac{7}{8}x^8 + \frac{5}{6}x^{12}$

118. $\frac{3}{5x^5} - \frac{4}{3x^6} - \frac{5}{6x^{12}}$ $\qquad \frac{7}{3x^9} - \frac{8}{5x^{10}} - \frac{3}{4x^{12}}$

119. $\frac{m}{nx^n} - \frac{n}{mx^m}$ $\qquad \frac{ax^{n+1}}{n+1} - \frac{b}{(m-1)x^{m-1}}$

120. $(a + x)^5 - (b - x)^7$ $\qquad (ax + 1)^m - (a - x)^n$

121. $(3 - 2x)^5$ $\qquad (a - bx)^{n+1}$

122. $\frac{5}{7 - 3x}$ $\qquad \frac{1}{(3 - 4x)^5}$

123. $\frac{1 + x}{1 - x}$ $\qquad \frac{5 + 3x}{5 - 3x}$

124. $\frac{3 - 2x + x^2}{1 - 2x + 3x^2}$ $\qquad \frac{(x^3 + 2)^2}{6(3 - 5x^2)^3}$

125. $\sqrt[5]{1 - x^3}$ $\qquad \sqrt[7]{1 - x + x^2}$

Ausdrücke, welche x enthalten, erscheinen bisweilen für einen Wert von x unter der Form $\frac{0}{0}$. Dieser Quotient ist unbestimmt. Um den wahren Wert desselben zu ermitteln, setzt man, wenn a der fragliche Wert von x ist, $a + h$ statt x, entwickelt Zähler und Nenner nach Potenzen von h und läßt die Glieder mit h^2 fort. Folgende Quotienten erscheinen für den in Klammern beigesetzten Wert von x in unbestimmter Form; suche auf dem angegebenen Wege den wahren Wert derselben.

126. $\frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$ [1] $\qquad \frac{x^6 - 64}{x^5 - 32}$ [2]

127. $\frac{a^5 - x^5}{a^3 - x^3}$ [a] $\qquad \frac{x^5 - x^4}{x^6 - 1}$ [1]

128. $\frac{2x^3 - x + 1}{3x^3 - x + 2}$ [— 1] $\qquad \frac{x^5 - 4x^3 + 3x - 6}{3x^5 - 6x^4 + x^2 - 4}$ [2]

129. $\frac{a^7 - (a - x)^7}{b^7 - (b - x)^7}$ [0] $\qquad \frac{(a + x)^8 - (a + b)^8}{(a - b)^6 - (a - x)^6}$ [b]

130. $\frac{x^4 - \sqrt[4]{x}}{x^2 - \sqrt[8]{x}}$ [1] $\qquad \frac{\sqrt{5x + 3} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{1 - x}}$ [1]

131. $\frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{3}}{\sqrt{3 + x} - \sqrt{5}}$ [2] $\qquad \frac{\sqrt[5]{3 - x} - 1}{\sqrt[6]{3 - x} - 1}$ [2]

Wenn man in einem von x abhängigen Ausdruck $x + h$ für x substituiert, nach Potenzen von h entwickelt, den Koefficienten von $h = 0$ setzt, aus der so erhaltenen Gleichung den Wert von x bestimmt, so wird für diesen der gegebene Ausdruck ein Maximum oder Minimum. Was von beiden eintritt, übersieht man in den meisten Fällen leicht.*) — Gieb hiernach an, für welche Werte von x die folgenden Ausdrücke ein Maximum oder ein Minimum werden, was von beiden eintritt, und wie groß das Maximum oder Minimum des gegebenen Ausdruckes für den gefundenen Wert von x wird.

132. $x^4 - 108x + 244$ 133. $x^6 - 6a^5x + 4a^6$

134. $(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)$ 135. $(a - x^3)(b - x^3)$

136. $5 + 12x - x^3$ 137. $x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

138. $\frac{4}{x} + \frac{x}{4}$ 139. $\frac{7-x}{x-3} + \frac{x-3}{7-x}$

140. $x + \sqrt{1 - x}$ 141. $x - \sqrt{3x - 2}$

XXXVII.

Von den Gleichungen höheren Grades im allgemeinen.

1. Welches ist die allgemeine Form einer Gleichung des 3. Grades?
2. Welches ist die allgemeine Form einer Gleichung des 4. Grades?
3. Welches ist die allgemeine Form einer Gleichung des n. Grades?
4. Wonach ist der Grad einer Gleichung zu beurteilen?
5. Schreibe sechs möglichst verschiedene Gleichungen des 3. Grades auf.
6. Desgleichen acht möglichst verschiedene Gleichungen des 4. Grades.
7. Wie nennt man die Werte der Unbekannten, welche der Gleichung genügen?
8. Welchen Faktor muß die linke Seite einer geordneten auf 0 gebrachten Gleichung haben, wenn m eine Wurzel der Gleichung ist? (Beweis!)
9. Wie muß demnach eine Gleichung in ihrer einfachsten Form heißen, welche die Wurzeln m, n und p hat?
10. Wie heißen die Gleichungen, welche folgende Wurzeln haben?

1) 1, 2, 3 2) 1, 1, −2

3) 2, 3, −5 4) 3, −4, −7

5) $7, +\sqrt{5}, -\sqrt{5}$ 6) $2, +\sqrt{-3}, -\sqrt{-3}$

---

*) Will man das durch Rechnung darthun, so muß man auch den Koefficienten von h^2 suchen. Ist dieser für den gefundenen Wert von x negativ, so wird der Ausdruck ein Maximum, ist er positiv, ein Minimum. Verschwindet der Koefficient von h^2 ebenfalls, so muß auch der von h^3 verschwinden und es kommt auf das Zeichen des Koefficienten von h^4 an.

7) $-8,\ 0{,}36,\ 0{,}75$ 8) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ -0{,}75$

9) $7,\ -3\frac{1}{2},\ -4\frac{1}{4}$ 10) $3\frac{3}{4},\ -\frac{2}{3},\ -1{,}5$

11) $3,\ 1+i,\ 1-i$ 12) $-5,\ 2+\sqrt{5},\ 2-\sqrt{5}$

13) $3,\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ 14) $-1,\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

11. Wie heißen die Gleichungen, welche folgende Wurzeln haben:

1) $1,\ 2,\ 3,\ 4$ 2) $1,\ 2,\ -1,\ -2$

3) $-1,\ +2,\ +3,\ -4$ 4) $\pm 2,\ \pm\sqrt{3}$

5) $\sqrt{\pm 5},\ \pm i\sqrt{7}$ 6) $1,\ 2,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}$

7) $2,\ 3,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$ 8) $2\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{3},\ -1\frac{1}{2},\ -2\frac{1}{3}$

9) $-0{,}2,\ -0{,}5,\ 2{,}2,\ 3{,}3$ 10) $3\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ -1{,}8,\ 2{,}5$

11) $-4,\ -3,\ 3\pm\sqrt{5}$ 12) $1\pm\sqrt{2},\ \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-1})$

13) $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3}),\ \pm\sqrt{5}$ 14) $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

12. Von welchem Grade muß eine Gleichung sein, welche drei Wurzeln hat? — Von welchem Grade eine solche, welche vier Wurzeln hat? — Desgleichen, welche n Wurzeln hat?

13. Welche Beziehung haben die Koefficienten der auf 0 gebrachten geordneten kubischen Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ zu den Wurzeln dieser Gleichung?

14. Wie gestaltet sich diese Beziehung für die Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$?

15. Welche Beziehung haben die Koefficienten der auf 0 gebrachten geordneten Gleichung des 4. Grades $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ zu den Wurzeln dieser Gleichung?

16. Untersuche die Bedeutung der Koefficienten für die Gleichung des 5. Grades $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

17. Wie läßt sich der Grad einer Gleichung vermindern, wenn man eine Wurzel derselben weiß?

18. Wie viel Wurzeln muß demnach eine kubische Gleichung haben, vorausgesetzt, daß sie überhaupt eine hat? — Wie viele eine Gleichung des 4. Grades? — Wie viele eine Gleichung des n. Grades?

19. Von der Gleichung $x^3 - 7x + 6 = 0$ ist $x = 2$ eine Wurzel, von $2x^3 = 5x^2 + 9$ ebenso $x = 3$; welche Gleichungen hat man weiter zu lösen, um auch die andern Wurzeln zu finden?

20. Von der Gleichung $x^4 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ ist $x = 1$ eine Wurzel, von der Gleichung $3x^4 - x^3 = 5x^2 - x - 2$ ebenso $x = -1$; welche Gleichungen hat man demnach weiter zu lösen, wenn man auch die andern Wurzeln finden will?

21. Wenn $x = \alpha$ der kubischen Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ genügt, wie findet man dann sehr einfach mit Hilfe der Bedeutung der Koefficienten die quadratische Gleichung $x^2 + mx + n = 0$, welche

man weiter zu lösen hat, um auch die andern Wurzeln der kubischen Gleichung zu erhalten?

22. Wenn $x = \alpha$ der kubischen Gleichung $x^3 = px + q$ genügt, so bleibt nach Ausscheidung der bekannten Wurzel α noch die Gleichung $x^2 + \alpha x + \frac{q}{\alpha} = 0$ oder $x^2 + \alpha x + \alpha^2 - p = 0$ zu lösen übrig. Dann müssen die Wurzeln dieser Gleichung und somit die beiden andern Wurzeln der kubischen Gleichung sein:

$$\tfrac{1}{2}\left(-\alpha + \sqrt{p - \frac{3q}{\alpha}}\right) \text{ und } \tfrac{1}{2}\left(-\alpha - \sqrt{p - \frac{3q}{\alpha}}\right)$$

Wie läßt sich das beweisen?

23. Wie bringt man heraus, zwischen welchen Grenzen die reellen Wurzeln einer auf 0 gebrachten Gleichung liegen?

24. Gieb in ganzen Zahlen die engsten Grenzen an, zwischen welchen die reellen Wurzeln der Gleichung $x^3 - 3x + 7 = 0$ liegen.

25. Dasselbe für die Gleichungen:

1) $x^3 - 2x^2 - 10 = 0$ 2) $x^3 = 17x - 100$
3) $x^3 - 9x + 5 = 0$ 4) $2x^3 - 3x^2 = 7x - 5$
5) $5x^3 - 7x^2 + 3x + 9 = 0$

26. Dasselbe für die Gleichungen des 4. Grades:

1) $x^4 - 19x + 11 = 0$ 2) $x^4 - 3x^2 = 9x + 31$
3) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 20x - 47 = 0$
4) $x^4 + 8x^3 - 30x^2 - 210x + 241 = 0$
5) $x^4 - 7x^3 + 33x^2 - 55x + 80 = 0$

27. Weshalb muß eine kubische Gleichung, wie überhaupt jede Gleichung von einem ungeraden Grade immer wenigstens eine reelle Wurzel haben?

28. Welches Zeichen muß eine reelle Wurzel der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ haben, wenn c positiv ist; welches, wenn c negativ ist?

29. Weshalb muß eine Gleichung des 4. Grades, wie überhaupt jede Gleichung von einem geraden Grade, wenn das letzte Glied negativ ist, immer wenigstens zwei reelle Wurzeln haben, und zwar eine positive und eine negative?

30. Weshalb müssen in einer Gleichung mit reellen Koefficienten die imaginären Wurzeln immer paarweise vorkommen; oder weshalb muß, wenn $x = p + qi$ einer Gleichung genügt, derselben auch $x = p - qi$ genügen? Weise dies speciell an den Gleichungen $x^2 + ax + b = 0$ und $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ durch Rechnung nach.

31. Wie viel imaginäre Wurzeln kann demnach eine Gleichung des 3., des 4., des 5. Grades haben?

32. Wie viel reelle Wurzeln kann demnach eine kubische Gleichung haben; wie viel eine Gleichung des 4. Grades, wie viel eine des 5. Grades?

33. Wie verwandelt man eine Gleichung, in welcher das 1. Glied einen Koefficienten hat, in eine solche, in welcher das erste Glied frei ist von einem Koefficienten, ohne jedoch auf Brüche zu kommen? Führe dies für die Gleichung $ax^3 + bx = c$ aus.

34. Transformiere die folgenden Gleichungen so, daß das erste Glied keinen Koefficienten hat:

1) $2x^3 - 7x = 5$ 2) $9x^3 + 6x^2 = 25$

3) $8x^3 - 6x^2 - 7x + 25 = 0$ 4) $18x^3 - 5x = 29$

35. Eine kubische Gleichung, in welcher kein Glied mit x^2 vorkommt, nennt man eine reduzierte kubische Gleichung. Um die vollständige kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ in eine reduzierte zu verwandeln, hat man $x = y - \frac{1}{3}a$ zu setzen. Will man jedoch die Brüche vermeiden, so muß man, wenn a nicht durch 3 teilbar ist $x = \frac{y - a}{3}$ setzen. Ebenso hat man für $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ zu setzen $x = \frac{1}{a}(y - \frac{1}{3}b)$ oder $x = \frac{y - b}{3a}$, je nachdem b durch 3 teilbar ist oder nicht. Wie heißen demnach die reduzierten Gleichungen von:

1) $x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0$ 2) $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$

3) $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ 4) $ax^3 - bx^2 + cx - d = 0$

36. Verwandle ebenso folgende Gleichungen in reduzierte kubische Gleichungen:

1) $x^3 - 3x^2 + 5x - 7 = 0$ 2) $2x^3 - 12x^2 + 8x - 19 = 0$

3) $x^3 + 5x^2 - 3x - 16 = 0$ 4) $5x^3 - 7x^2 + 3x - 8 = 0$

5) $7x^3 + 3x^2 + 10 = 0$*) 6) $19x^3 - 10x^2 + 8 = 0$

36_1. Um eine vollständige biquadratische Gleichung in eine reduzierte zu verwandeln, verfährt man ganz so, wie in 35. angegeben; nur statt der 3 ist eine 4 zu setzen. Heißen die beiden ersten Glieder $ax^4 + 2bx^3$, so genügt $x = \frac{y - b}{2a}$. Verwandle hiernach die biquadratischen Gleichungen XXXIX zweite Reihe Nr. 1—4., letzte Reihe 11—13. in reduzierte Gleichungen. Koefficienten beim ersten Gliede und Brüche sollen nicht vorkommen.

---

*) Um eine Gleichung von der Form $ax^3 + bx^2 + c = 0$ in eine reduzierte zu verwandeln, kann man einfach $x = \frac{1}{y}$ setzen, oder, wenn die höchste Potenz keinen Koefficienten haben soll, $x = \frac{c}{y}$. Man kommt aber auch mit $x = \frac{y - b}{3a}$ zum Ziele. Diese Umformung ist dann zweckmäßiger, wenn die Gleichung eine reelle irrationale Wurzel hat und außer dieser auch noch die imaginären gesucht werden sollen; jene Umformung ist zweckmäßig, wenn die Gleichung drei reelle irrationale Wurzeln hat.

37. Verwandle die Gleichung $x^3 + 2x^2 + 5 = 0$ in eine andere, deren Wurzeln um 1 größer sind, als die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

38. Verwandle die Gleichung $x^3 - 15x^2 + 7x + 125 = 0$ in eine andere, deren Wurzeln um 5 kleiner sind.

39. Verwandle die Gleichung $x^3 - 3{,}5x^2 + 7{,}5x - 1{,}25 = 0$ in eine andere, deren Wurzeln doppelt so groß sind.

40. Transformiere die Gleichung $x^3 - 12x^2 - 18x + 135 = 0$ in eine andere, deren Wurzeln dreimal so klein sind.

41. Transformiere die Gleichung $x^3 - ax^2 - bx + c = 0$ in eine solche, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

42. Transformiere die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ in eine andere, deren Wurzeln die Quadratwurzeln der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

43. Wenn eine geordnete Gleichung, deren erstes Glied keinen Koefficienten hat und in welcher die Koefficienten der andern Glieder ganze Zahlen sind, eine rationale Wurzel hat, wie findet man diese? (Grund!)

44. Wenn in einer geordneten Gleichung kein Glied ohne x vorkommt, welcher Wert von x genügt dann immer der Gleichung, oder welche Wurzel muß dann die Gleichung immer haben?

45. Folgende Gleichungen haben mindestens eine rationale Wurzel. Suche dieselbe auf und gieb die Gleichung an, welche nach Ausscheidung der gefundenen Wurzel noch zu lösen bleibt.

1) $x^3 - 5x = 12$ 2) $x^3 - 7x^2 + 50 = 0$

3) $x^3 - 8x^2 + 13x - 6 = 0$ 4) $x^4 - 3x^3 = 5x - 18$

5) $x^4 - 13x^2 - 7x = 20$ 6) $x^4 - 19x = 3x^3 + 7x^2$

46. Folgende Gleichungen haben mindestens eine rationale Wurzel. Schaffe den Koefficienten des ersten Gliedes fort, ohne jedoch auf Brüche zu kommen, suche eine rationale Wurzel der neuen Gleichung und gieb darnach an, wie die entsprechende Wurzel der ursprünglichen Gleichung heißen muß, und welche Gleichung nach Ausscheidung der gefundenen Wurzel noch weiter zu lösen ist.

1) $3x^3 - 11x^2 + 21x - 10 = 0$ 2) $4x^3 - 24x^2 + 37x - 5 = 0$

3) $18x^3 - 57x^2 + 38x - 7 = 0$ 4) $2x^4 - x^3 - 6x^2 + 11x - 4 = 0$

47. Wenn eine geordnete Gleichung, deren erstes Glied keinen Koefficienten hat und deren Koefficienten sonst lauter ganze Zahlen sind, nicht in ganzen Zahlen lösbar ist, so kann sie es auch nicht in Brüchen sein. Hat sie reelle Wurzeln, so sind diese weder ganze Zahlen noch Brüche, sondern irrational. Beweise das!

48. Wie heißen die Wurzeln der kubischen Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, wenn dieselbe zwei Wurzeln hat, deren Summe $= 0$ ist, und welcher Bedingung müssen in diesem Falle die Koefficienten der Gleichung genügen?

49. Wie heißen die Wurzeln der kubischen Gleichung $x^3 - 3ax^2 + 3bx - c = 0$, wenn dieselbe zwei gleiche Wurzeln hat, und welcher Bedingung müssen in diesem Falle die Koefficienten der Gleichung genügen?

50. Welche Wurzeln hat die kubische Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, wenn man weiß, daß eine Wurzel gleich der Summe der beiden andern ist, und welcher Bedingung müssen in diesem Falle die Koefficienten der Gleichung genügen?

51. Wie heißen die Wurzeln der kubischen Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, wenn zwei Wurzeln reziprok sind, und welcher Bedingung müssen in diesem Falle die Koefficienten der Gleichung genügen?

52. Wie heißen die Wurzeln der Gleichung des 4ten Grades $x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d = 0$, wenn die Summe zweier Wurzeln gleich der Summe der beiden andern ist, und welcher Bedingung müssen in diesem Falle die Koefficienten der Gleichung genügen?

53. Welchen Bedingungen müssen die Koefficienten der Gleichung des 4. Grades $x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d = 0$ genügen, wenn zwei Wurzeln die reziproken Werte der beiden andern sind, und wie heißen in diesem Falle die Wurzeln?

XXXVIII.

Kubische Gleichungen.

Reine kubische Gleichungen, in welchen die Unbekannte nur in der dritten Potenz vorkommt, welche also von der Form $x^3 = a$ sind, kubische Gleichungen mit einer ausgezeichneten Wurzel, insonderheit solche mit einer Wurzel 0, und die symmetrischen kubischen Gleichungen von der Form $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ sind schon oben im 25. Abschnitt behandelt worden. Die Auflösung dieser Arten von kubischen Gleichungen erforderte keine besonderen Hilfsmittel.

Auch die kubischen Gleichungen mit einer rationalen Wurzel lassen sich nach dem vorigen Abschnitt leicht lösen. Die folgenden Gleichungen haben wenigstens eine rationale Wurzel. Es sollen alle Wurzeln derselben angegeben werden.

1) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

2) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

3) $x^3 + 8x^2 + 5x - 50 = 0$

4) $x^3 + 2x^2 - 23x + 6 = 0$

5) $x^3 - 4x^2 - 15x - 42 = 0$

6) $x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0$

7) $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$

8) $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{9}x + \frac{5}{6} = 0$

9) $x^5 - 2\frac{5}{6}x^2 + 2\frac{3}{4}x - 1 = 0$

10) $6x^3 - 29x^2 = 45 - 53x$

11) $70 + 71x = 47x^2 - 6x^3$

Gehört eine kubische Gleichung nicht unter die oben angegebenen Arten und hat sie keine rationale Wurzel, so sind andere Betrachtungen zur Auflösung nötig. Man geht in diesem Falle immer von der reduzierten kubischen Gleichung aus. Hat eine gegebene kubische Gleichung die reduzierte Form nicht, so muß man derselben erst diese Form geben. Hat das erste Glied einen Koefficienten, so dividiert man die Gleichung durch denselben. Ob die Koefficienten sonst ganze Zahlen oder Brüche sind, ist gleichgültig. Man nimmt an, daß die kubische Gleichung auf die Form

$$x^3 = px + q$$

gebracht ist, wo p und q beliebige reelle Zahlen sind, ganze oder gebrochene, positive oder negative.

A. Cardanische Lösung.

Ist die kubische Gleichung

(1) $$x^3 = px + q$$

gegeben, so ist die Cardanische Lösung

(2) $$x = \sqrt[3]{\frac{q+r}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q-r}{2}} \quad \text{für } r = \sqrt{q^2 - \frac{4}{27}p^3}$$

Um auf diesem Wege alle drei Wurzeln der gegebenen Gleichung zu finden, hat man, wenn die reellen Werte der Kubikwurzeln

(3) $$\sqrt[3]{\frac{q+r}{2}} = u \qquad \sqrt[3]{\frac{q-r}{2}} = v$$

gesetzt werden,

(4) $$x_1 = u + v, \qquad x_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\sqrt{-3}, \qquad x_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\sqrt{-3}$$

Ist r^2, d. h. $q^2 - \frac{4}{27}p^3$ positiv, was immer der Fall ist, wenn p in der Gleichung (1) negativ ist, also in der Gleichung $x^3 + px \pm q = 0$, so hat die Gleichung eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln*). — Ist $r^2 = 0$, so erhält man drei reelle Wurzeln, von denen zwei ein-

---

*) Die Cardanische Lösung hat den Übelstand, daß sie die rationale Wurzel, wenn die Gleichung eine solche hat, nur selten in rationaler Form liefert. Damit dies geschieht, muß nach den Ermittelungen von E. Liebrecht die kubische Gleichung die Form $x^3 = 3mnx + m^3 + n^3$ haben, wo m und n beliebige rationale Größen sein können. Die Cardanische Formel liefert dann $x = m + n$.

ander gleich sind. Eine der gleichen Wurzeln muß dann dem absoluten Werte nach halb so groß sein als die ungleiche, aber das entgegengesetzte Zeichen haben. — Ist r^2 negativ, also r selbst imaginär, so erscheinen alle drei Wurzeln nach der Cardanischen Lösung in imaginärer Form, obwohl gerade in diesem Falle alle drei Wurzeln reell sind. Diesen Fall nennt man den irreduciblen Fall, weil man bis jetzt kein Mittel gefunden hat, algebraisch die imaginäre Form auf eine reelle zu reduzieren.

Die folgenden Gleichungen haben wenigstens eine rationale Wurzel und sind der Art, daß die Cardanische Lösung diese Wurzel auch in rationaler Form liefert. Es sollen alle drei Wurzeln mit Hilfe der Cardanischen Lösung aufgesucht werden.

1) $x^3 = 3x + 2$ 2) $x^3 = 36x + 91$

3) $x^3 = 9x - 28$ 4) $x^3 + 9x + 26 = 0$

5) $x^3 - 18x = 35$ 6) $x^3 - 72x - 280 = 0$

Die folgenden Gleichungen haben eine reelle rationale oder irrationale Wurzel. Die Cardanische Lösung liefert jedoch auch die rationale Wurzel in irrationaler Form. In diesem Falle müssen die Quadrat- und Kubikwurzeln ordentlich berechnet werden, da man sich oft lange vergeblich abmühen kann, die irrationale Form auf eine rationale zu bringen.

7) $x^3 = 2x + 3$ 8) $x^3 = x - 7$

9) $x^3 + 5x - 4 = 0$ 10) $x^3 = 4x + 15$

11) $x^3 + 7x - 8 = 0$ 12) $x^3 = 26x + 60$

Die folgenden Gleichungen haben ebenfalls eine reelle rationale oder irrationale Wurzel, müssen aber erst mehr oder weniger umgeformt werden, um die Cardanische Lösung auf sie anwenden zu können.

13) $4x^3 - 5x - 6 = 0$ 14) $7x^3 + 3x - 100 = 0$

15) $15x^3 + 13x^2 - 2 = 0$ 16) $111x^3 = 5x^2 + 4$

17) $x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0$ 18) $5x^3 + 10x^2 + 7x - 2 = 0$

19) $3x^3 + 13x^2 + 11x - 14 = 0$

20) $28x^3 - 126x^2 + 195x - 139 = 0$

B. Die trigonometrische Lösung.

Die trigonometrische Lösung tritt ein im irreduciblen Fall, wenn also $q^2 - \frac{4}{27}p^3$ negativ ist. Ist die kubische Gleichung

$$x^3 = px + q \tag{1}$$

gegeben, so bestimmt man den Winkel φ aus

$$\sin 3\varphi = \frac{3q}{p\sqrt{\frac{4}{3}p}}, \tag{2}$$

was in diesem Falle immer möglich ist, da $q^2 - \frac{4}{27}p^3 < 0$, mithin $\frac{3q}{p\sqrt{\frac{4}{3}p}} < 1$ ist. Ist φ gefunden, so sind die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$(3) \qquad x_1 = -\sqrt{\tfrac{4}{3}p} \,.\, \sin\varphi, \qquad x_2 = -\sqrt{\tfrac{4}{3}p} \,.\, \sin(60 - \varphi),$$
$$x_3 = +\sqrt{\tfrac{4}{3}p} \,.\, \sin(60 + \varphi)$$

Für die Gleichung $x^3 = px - q$ erhalten die drei Wurzeln die entgegengesetzten Zeichen. — Aus der Lösung ist zu ersehen, daß die Gleichung in diesem Falle drei reelle Wurzeln hat. — Der Fall $x^3 = -px \pm q$ gehört nicht hierher, gehört zur Cardanischen Lösung.

Folgende kubische Gleichungen haben drei reelle Wurzeln, teils rationale, teils irrationale. Die Wurzeln sollen nach der trigonometrischen Lösung aufgesucht werden. Ist die Gleichung nicht in der reduzierten Form gegeben, so muß sie erst auf diese Form gebracht werden.

1) $x^3 - 7x - 6 = 0$ 2) $x^3 = 12x + 14$
3) $x^3 - 19x + 30 = 0$ 4) $x^3 = 7x - 5$
5) $4x^3 - 13x + 6 = 0$ 6) $30x^3 - 61x^2 + 36 = 0$
7) $8x^3 + 12x^2 - 4x - 1 = 0$ 8) $2x^3 - 5x^2 - 13x + 30 = 0$
9) $27x^3 - 54x^2 + 25x + 1 = 0$

C. Kubische Gleichungen mit verschiedener Lösung.

Um eine kubische Gleichung, deren Auflösung nicht nach dem 25. Abschnitt leicht in die Augen fällt, zu lösen, wird man erst untersuchen, ob sie eine rationale Wurzel hat, wo dann die Auflösung weiter keine Schwierigkeiten macht. Hat sie keine rationale Wurzel, so muß man sie auf die reduzierte Form $x^3 = px + q$ bringen, wenn sie diese nicht schon hat. Darnach ist das Zeichen von $q^2 - \frac{4}{27}p^3$ zu bestimmen. Ist es +, so hat man die Cardanische Lösung anzuwenden; ist es —, die trigonometrische.

Um eine rationale Wurzel leichter aufzufinden, ist es meistens zweckmäßig, nach S. 301, 23 erst die Grenzen festzustellen, zwischen welchen die reelle Wurzel liegt. Hat die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ zwischen m und n eine reelle Wurzel, liegt aber zwischen m und n kein Faktor von c, so kann die Wurzel, welche zwischen m und n liegt, nur irrational sein. Durch Einsetzen von $+\infty$, 10, 1, 0, —1, —10, $-\infty$ für x, erkennt man auch leicht, ob die Gleichung nur eine reelle Wurzel hat, oder drei

1. $x^3 = 37x + 84$ 2. $x^3 = 45x - 152$
3. $x^3 + 41x = 1000$ 4. $x^3 - 61x + 180 = 0$
5. $x^3 = 30x - 20$ 6. $x^3 = 90x + 341$

7. $x^3 = 31x - 19$
8. $x^3 = 75x - 250$
9. $x^3 + 10x - 13 = 0$
10. $x^3 = 126x + 559$
11. $x^3 = 144x + 728$
12. $x^3 - 126x + 1241 = 0$
13. $7x^3 = 9x + 5$
14. $9x^3 - 16x + 15 = 0$
15. $9x^3 - 73x - 60 = 0$
16. $17x^3 - 33x^2 + 11 = 0$
17. $6x^3 + 5x^2 - 2 = 0$
18. $10x^3 - 8x^2 + 5 = 0$
19. $x^3 + 9x^2 + 27x + 26 = 0$
20. $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$
21. $x^3 - 8x^2 + 19x - 20 = 0$
22. $x^3 - 9x^2 - 2x + 101 = 0$
23. $8x^3 - 18x^2 + 17x - 6 = 0$
24. $3x^3 + 18x^2 + 67x = 914$
25. $10x^3 - 26x^2 + 13x + 10 = 0$
26. $9x^3 - 45x^2 + 34x + 37 = 0$
27. $2x^3 - 21x^2 + 74x - 85 = 0$
28. $18x^3 - 36x^2 + 9x + 8 = 0$
29. $12x^3 - 52x^2 + 23x + 42 = 0$
30. $20x^3 - 90x^2 + 126x - 53 = 0$
31. $4x^3 - 60x^2 + 309x + 500 = 0$.

XXXIX.

Gleichungen des vierten Grades.

Die Gleichungen des vierten Grades, welche sich als quadratische Gleichungen lösen lassen, sind schon im 25. Abschnitt in großer Anzahl vorgekommen. Ihre Auflösung hat keine Schwierigkeit.

Gleichungen des vierten Grades, welche eine rationale Wurzel haben, lassen nach Ausscheidung dieser Wurzel, die nach dem 37. Abschnitt leicht aufzufinden ist, noch eine kubische Gleichung übrig. Diese hat man dann weiter nach dem vorigen Abschnitt zu lösen, um auch die drei andern Wurzeln der Gleichung des vierten Grades zu erhalten. — Hat die Gleichung des vierten Grades zwei rationale Wurzeln, so scheidet man diese aus, und es bleibt nur noch eine quadratische Gleichung zu lösen übrig. — In beiden Fällen sind keine besonderen Betrachtungen nötig; das im 37. und 38. Abschnitt Gesagte genügt vollständig zur Auflösung.

Die folgenden Gleichungen 1.—22. sind von der genannten Art. Sie haben mindestens entweder eine, oder zwei rationale Wurzeln.

Diese sind nach dem 37. Abschnitt zu ermitteln und darnach auch die übrigen Wurzeln aufzusuchen.

1. $x^4 - 3x^3 - 34x^2 + 18x + 168 = 0$
2. $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 24x - 72 = 0$
3. $x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x + 90 = 0$
4. $x^4 - 13x^2 + 48x - 60 = 0$
5. $x^4 - 6x^3 + 24x - 16 = 0$
6. $x^4 + 3x^3 - 52x - 60x + 288 = 0$
7. $x^4 + 7x^3 - 13x^2 - 175x - 300 = 0$
8. $x^4 - 17x^3 + 95x^2 - 199x + 120 = 0$
9. $x^4 + 19x^3 + 123x^2 + 305x + 200 = 0$
10. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 19x - 10 = 0$
11. $x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 52x - 40 = 0$
12. $x^4 - 9x^3 + 20x^2 - 13x + 6 = 0$
13. $x^4 - 17x^2 + x + 20 = 0$
14. $2x^4 - 13x^3 + 16x^2 - 9x + 20 = 0$
15. $3x^4 - 8x^3 - 36x^2 + 25 = 0$
16. $6x^4 - x^3 - 8x^2 - 14x + 12 = 0$
17. $6x^4 - 13x^3 + 20x^2 - 37x + 24 = 0$
18. $6x^4 - x^3 - 49x^2 + 55x - 50 = 0$
19. $10x^4 + 17x^3 - 16x^2 + 2x - 20 = 0$
20. $12x^4 + 5x^3 - 23x^2 - 5x + 6 = 0$
21. $26x^4 - 108x^3 + 323x^2 - 241x + 60 = 0$
22. $36x^4 - 72x^3 - 31x^2 + 67x + 30 = 0$

Um eine Gleichung des vierten Grades allgemein aufzulösen, muß man sie auf eine kubische Gleichung zurückführen. Mit Hilfe der Wurzeln dieser Gleichung, welche man die Resolvente der gegebenen Gleichung nennt, hat man dann die Wurzeln der gegebenen Gleichung zu bestimmen.

Ist die Gleichung des vierten Grades

$$(1) \qquad ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

gegeben, so löst man die reduzierte kubische Gleichung

$$(2) \quad 4t^3 - (ae - 4bd + 3c^2)t + ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3 = 0$$

nach t auf. Mittels der Wurzeln dieser Gleichung, welche t_1, t_2 und t_3 heißen mögen, bestimmt man

$$(3) \quad N_1 = \sqrt{b^2 - ac + at_1} \quad N_2 = \sqrt{b^2 - ac + at_2} \quad N_3 = \sqrt{b^2 - ac + at_3}$$

Dann hat man als die gesuchten Wurzeln der gegebenen Gleichung des 4 Grades (1)

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a}(-b + N_1 + N_2 + N_3)\\
x_2 &= \frac{1}{a}(-b + N_1 - N_2 - N_3)\\
x_3 &= \frac{1}{a}(-b - N_1 + N_2 - N_3)\\
x_4 &= \frac{1}{a}(-b - N_1 - N_2 + N_3)
\end{aligned}
$$

Erster Fall. Die kubische Resolvente (2) hat drei reelle Wurzeln. Dann hat die Gleichung des 4. Grades entweder vier reelle Wurzeln, oder vier imaginäre, oder zwei imaginäre und zwei gleiche reelle. Da die t reell sind, so sind die N entweder reell oder rein imaginär, je nachdem der Radikand positiv oder negativ wird. Ein N muß immer reell sein. Sind alle drei N reell, so hat die Gleichung des 4. Grades, wie man aus (4) ersieht, vier reelle Wurzeln. Ist ein N reell und zwei N rein imaginär und ungleich, oder sind zwei N reell und ein N rein imaginär, so hat die Gleichung des 4. Grades vier imaginäre Wurzeln, wie man aus den Lösungen (4) ebenfalls leicht ersieht. Ist aber ein N reell und sind zwei N rein imaginär und gleich, wo also die kubische Resolvente (2) unter den drei reellen Wurzeln zwei gleiche haben muß, so hat die Gleichung des 4. Grades zwei imaginäre Wurzeln und zwei gleiche reelle. — Die Rechnung hat in diesem Falle gar keine Schwierigkeiten. Bei der kubischen Gleichung (2) wird, wenn nicht wenigstens eine Wurzel rational ist, die trigonometrische Lösung anzuwenden sein.

Zweiter Fall. Die kubische Resolvente hat eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Dann hat die Gleichung des 4. Grades zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Es ist bei der kubischen Gleichung, falls die eine Wurzel nicht rational ist, die Cardanische Lösung anzuwenden. Diese Wurzeln werden also die Form haben

$$t_1 = u + v,\ t_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\sqrt{-3},\ t_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\sqrt{-3}$$

Da ein N reell sein muß, so muß es nach dieser Bezeichnung N_1 sein. Dann müssen N_2 und N_3 von der Form sein

$$N_2 = \sqrt{A + B\sqrt{-3}} \qquad N_2 = \sqrt{A - B\sqrt{-3}}$$

Hier haben die imaginären Größen unter der Wurzel ihr Unangenehmes. Es muß der imaginäre Teil vom reellen gesondert werden. Indem man die Summe der Quadrate und das Produkt von N_2 und N_3 bildet, erhält man aus der Kombination dieser Größen

$$N_2 + N_3 = \sqrt{2\,(A + \sqrt{A^2 + 3B^2})}$$

$$N_2 - N_3 = \sqrt{2\,(A - \sqrt{A^2 + 3B^2})}$$

Damit sind die Größen $N_2 + N_3$ und $N_2 - N_3$ gefunden, welche in den Formeln (4) für die Wurzeln vorkommen; $N_2 + N_3$ ist reell, $N_2 - N_3$ rein imaginär. Setzt man $N_2 + N_3 = P$, $N_2 - N_3 = Qi$, wo P und Q reell sind, so sind die vier Wurzeln

$$(5)\quad \frac{1}{a}(-b + N_1 \pm P), \quad \frac{1}{a}(-b - N_1 \pm Qi).$$

Die Berechnung von P und Q geschieht am einfachsten direkt mit Hilfe der Logarithmen. Man berechnet logarithmisch 1) $3\left(\frac{B}{A}\right)^2 = y$, 2) $A\sqrt{1+y} = z$. Dann ist $N_2 + N_3 = \sqrt{2(A+z)}$, $N_2 - N_3 = \sqrt{2(A-z)}$. — Will man Trigonometrie anwenden, so ist ϑ zu bestimmen aus $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{B\sqrt{3}}{A}$. Dann ist

$$(6)\quad N_2 + N_3 = 2\cos\frac{1}{2}\vartheta\sqrt{\frac{A}{\cos\vartheta}}, \quad N_2 - N_3 = 2i\sin\frac{1}{2}\vartheta\sqrt{\frac{A}{\cos\vartheta}}.$$

Ist A negativ, so ist $\vartheta > 90^0$, also auch $\cos\vartheta$ negativ, mithin $\frac{A}{\cos\vartheta}$ positiv.

Da die N Quadratwurzeln sind, so können sie auch ebenso gut das entgegengesetzte Zeichen haben. Man muß untersuchen, ob die Bedingung $x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{e}{a}$ erfüllt wird. Wird diese nicht erfüllt, so muß man ein N oder alle drei (zwei hat keinen Einfluß) mit dem entgegengesetzten Zeichen nehmen. Ist b in (1) gleich Null, so ist das Kriterium $x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{e}{a}$ für die Zeichen der N bedeutungslos; es muß $(x_1 + x_2) x_3 x_4 + (x_3 + x_4) x_1 x_2 = -\frac{4d}{a}$ stimmen, wo für imaginäre Wurzeln x_1 und x_2, wie x_3 und x_4 als konjugiert anzusehen sind.

Um das oben Gesagte zu beweisen, zerlegt man die gegebene Gleichung des 4. Grades in die Differenz zweier Quadrate. Man multipliziert die Gleichung (1) mit a und zerlegt

$$(7)\quad a^2x^4 + 4abx^3 + 6acx^2 + 4adx + ae = 0 \text{ in}$$

$$(8)\quad (ax^2 + 2bx + c + 2t)^2 - (2Nx + M)^2 = 0,$$

wo die Größen t, N und M vorläufig noch unbestimmt sind. Aus der Vergleichung der Koefficienten von (7) und (8) ergiebt sich

$$(9)\quad N = \sqrt{b^2 - a(c-t)} \qquad (10)\quad M = \sqrt{(c+2t)^2 - ae}$$

$$(11)\quad MN = b(c+2t) - ad$$

Die Gleichung für t wird demnach:

$$[b^2 - a(c-t)(c+2t)^2 - ae] = [b(c+2t) - ad]^2$$

Entwickelt man, so erhält man die oben in (2) angegebene kubische Gleichung. Sie erscheint in reduzierter Form. — Ist t bestimmt, und somit auch N und M wie aus (9) und (10) folgt, so läßt sich die linke Seite der Gleichung (8) in zwei Faktoren zerlegen:

$$(ax^2 + 2bx + c + 2t) - (2Nx + M) \text{ und}$$

$$(ax^2 + 2bx + c + 2t) + (2Nx + M)$$

Mithin zerfällt die gegebene Gleichung des 4. Grades in die zwei quadratischen

$$(12) \qquad ax^2 + 2(b - N)x + c + 2t - M = 0$$

$$(13) \qquad ax^2 + 2(b + N)x + c + 2t + M = 0$$

Sind x_1 und x_2 die Wurzeln von (12), und x_3 und x_4 die von (13), so hat man infolge der Bedeutung der Koefficienten

$$(14) \quad x_1 + x_2 = -\frac{2}{a}(b - N), \quad x_3 + x_4 = -\frac{2}{a}(b + N)$$

Da aber N drei Werte hat, welche den drei Werten von t entsprechen, so schließen die Gleichungen (14) drei Paare von Gleichungen ein:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{a}(b - N_1) \qquad x_3 + x_4 = -\frac{2}{a}(b + N_1)$$

$$x_1 + x_3 = -\frac{2}{a}(b - N_2) \qquad x_2 + x_4 = -\frac{2}{a}(b + N_2)$$

$$x_1 + x_4 = -\frac{2}{a}(b - N_3) \qquad x_2 + x_3 = -\frac{2}{a}(b + N_3)$$

Aus der Kombination dieser 6 Gleichungen ergeben sich leicht die oben in (4) angegebenen Formeln für die Wurzeln x_1, x_2, x_3 und x_4.

Die Gleichung des 4. Grades kann 4 reelle, 2 reelle und 2 imaginäre, oder 4 imaginäre Wurzeln haben. In jedem dieser Fälle muß sich die linke Seite mindestens auf eine Art in zwei quadratische Faktoren mit reellen Koefficienten zerlegen lassen. — Hat die Gleichung des 4. Grades 4 reelle Wurzeln, so muß sie sich auf dreifache Weise in zwei quadratische Faktoren mit reellen Koefficienten zerlegen lassen. Es muß drei N und drei t, und folglich auch drei M geben, wie aus (11) folgt, durch welche die Zerlegung (12) und (13) bewerkstelligt werden kann. Die kubische Resolvente hat drei reelle Wurzeln, und ihnen entsprechend sind N_1, N_2 und N_3 ebenfalls reell. — Hat die Gleichung des 4. Grades 4 imaginäre Wurzeln, oder 2 reelle und 2 imaginäre, so ist nur eine Zerlegung derselben in zwei quadratische mit reellen Koefficienten denkbar, diese aber muß immer möglich sein und kann nur wegen (12) und (13) durch ein reelles t und ein dem entsprechendes relles N und M bewirkt werden. — Hat daher die kubische Resolvente drei reelle Wurzeln, so muß unter diesen immer eine sein, welche ein reelles N und wegen (11) auch ein reelles M liefert. Hat die kubische Resolvente nur eine reelle Wurzel, so muß dieser reellen Wurzel auch ein reelles N entsprechen; denn nur so kann eine Zerlegung in zwei quadratische Faktoren mit reellen Koefficienten entstehen.

Hat man eine reduzierte Gleichung des 4. Grades, für welche also $b = 0$ ist, so wird die kubische Resolvente

$$(c - t)(ae - (c + 2t)^2) = ad^2 \text{ und}$$

$$N = \sqrt{a(t - c)}$$

Ist der Koefficient von x^3 durch 4 teilbar und die Koefficienten der Gleichung klein, so thut man meistens ebenso gut, die gegebene Gleichung in eine reduzierte zu verwandeln und diese zunächst zu lösen.

Die folgenden Gleichungen des 4. Grades 1.—38. lassen mindestens eine rationale Zerlegung in zwei quadratische Faktoren zu. Die kubische Resolvente hat daher wenigstens eine rationale Wurzel, läßt sich also auf einfache Weise lösen; die Darstellung der N geschieht ohne besondere Hilfsmittel, und die Auffindung der Wurzeln der gegebenen Gleichung verursacht daher keine erheblichen Schwierigkeiten. Wenn sich auch manche von den Gleichungen ohne die oben erörterte Methode lösen lassen (wenn sie eine rationale Wurzel haben), so soll dieselbe doch der Übung wegen bei allen Gleichungen angewendet werden.

1. $x^4 - 4x^3 + 20x - 25 = 0$
2. $x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0$
3. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 12x - 15 = 0$
4. $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = 0$
5. $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$
6. $x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 8x + 14 = 0$
7. $x^4 - 12x^3 + 51x^2 - 88x + 48 = 0$
8. $x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 24x - 21 = 0$
9. $x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 40x - 32 = 0$
10. $x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 72x + 36 = 0$
11. $x^4 - 16x^3 + 70x^2 - 60x - 88 = 0$
12. $x^4 - 37x^2 - 24x + 180 = 0$
13. $x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x + 18 = 0$
14. $x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 34x + 20 = 0$
15. $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 20x + 12 = 0$
16. $x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 50x + 48 = 0$
17. $x^4 - 12x^3 + 43x^2 - 42x + 10 = 0$
18. $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 30x + 40 = 0$
19. $x^4 + x^3 - 14x^2 - 2x + 24 = 0$
20. $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 29x - 30 = 0$
21. $x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24 = 0$
22. $x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 6x + 45 = 0$
23. $x^4 + 11x^3 + 35x^2 + 13x - 60 = 0$
24. $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 29x - 30 = 0$
25. $x^4 - 11x^3 + 47x^2 - 97x + 84 = 0$

26. $x^4 - 9x^3 - 5x^2 + 153x - 140 = 0$
27. $x^4 - 13x^3 + 11x^2 + 337x - 840 = 0$
28. $4x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 8x + 1 = 0$
29. $4x^4 - 12x^3 + 31x^2 - 60x + 55 = 0$
30. $4x^4 - 16x^3 + 15x^2 + 5x - 7 = 0$
31. $9x^4 + 15x^3 - 143x^2 + 41x + 30 = 0$
32. $16x^4 - 48x^3 + 80x^2 - 60x + 27 = 0$
33. $16x^4 - 80x^3 + 136x^2 - 108x + 45 = 0$
34. $16x^4 - 32x^3 - 32x^2 + 40x + 15 = 0$
35. $16x^4 - 96x^3 + 184x^2 - 152x + 45 = 0$
36. $36x^4 - 72x^3 + 23x^2 + 8x - 3 = 0$
37. $36x^4 - 36x^3 - 73x^2 + 81x - 18 = 0$
38. $36x^4 - 348x^3 + 1231x^2 - 1886x + 1058 = 0$

Die folgenden Gleichungen lassen keine rationale Zerlegung in quadratische Faktoren zu, liefern mithin eine kubische Resolvente, welche keine rationale Wurzeln hat. Die kubische Gleichung muß nach der Cardanischen Formel oder trigonometrisch gelöst werden. Die Darstellung der N ist dann in der oben angegebenen Weise zu beschaffen.

1. $x^4 - 4x^3 + 12 = 0$
2. $x^4 - 24x + 37 = 0$
3. $3x^4 - 5x^3 = 31$
4. $4x^4 + 7x + 100 = 0$
5. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8 = 0$
6. $x^4 - 8x^3 + 4x - 7 = 0$
7. $x^4 - 12x^2 - 16x + 41 = 0$
8. $3x^4 - 2x^3 - 7x + 20 = 0$
9. $2x^4 = 7x^3 + 5x^2 + 30$
10. $5x^4 = 3x^2 - 14x - 100$
11. $7x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 4x + 37 = 0$
12. $3x^4 - 2x^3 - 21x^2 - 4x + 11 = 0$
13. $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 8x + 21 = 0$
14. $5x^4 - 7x^3 - 30x^2 + 8x + 28 = 0$
15. $7x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 5x - 16 = 0$
16. $11x^4 + 7x^3 - 44x^2 - 8x + 23 = 0$
17. $8x^4 - 62x^3 + 162x^2 - 172x + 63 = 0$

XL.

Auflösung der Gleichungen durch Näherung.

Gleichungen, welche über den 4. Grad hinausgehen, lassen sich nicht mehr allgemein auflösen. Um die Wurzeln solcher Gleichungen zu ermitteln, muß man, falls die Wurzeln nicht rational sind, Näherungsmethoden anwenden. Auch bei Gleichungen des 3. und 4. Grades sind diese Methoden sehr gut anwendbar und führen in manchen Fällen leichter zum Ziele als die allgemeinen Methoden. Mit Hilfe der Näherungsmethoden können die Wurzeln bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit berechnet werden. Es ist dabei vorausgesetzt, daß die Koefficienten der Gleichung in reinen Zahlen, nicht in Buchstaben gegeben sind. Die gewöhnlichsten Methoden, welche man hier anwendet, um die reellen Wurzeln zu finden, sind die allgemeine Näherungsmethode, die Newtonsche Näherungsmethode und die Näherungsmethode mittels der Kettenbrüche.

Die allgemeine Näherungsmethode besteht darin, daß man zunächst in ganzen Zahlen die Grenzen aufsucht, zwischen welchen die zu bestimmende reelle Wurzel liegen muß, wenn die Gleichung überhaupt eine solche hat. Hat man so die Wurzel bis auf die Einer genau festgestellt, so schreitet man in derselben Weise zur Feststellung der Zehntel. Liegt z. B. die Wurzel zwischen 2 und 3, so findet man aus dem Grade der Annäherung für die Werte 2 und 3 leicht, zwischen welchen Zehnteln die Wurzel liegen muß: 2,1, 2,2, 2,3, 2,4 u. s. w. Findet man, daß die Wurzel zwischen 2,6 und 2,7 liegt, so schreitet man in derselben Weise zur Feststellung der Hundertstel: 2,61, 2,62, 2,63, 2,64 u. s. w. Dies Verfahren wird fortgesetzt, bis der gewünschte Grad der Annäherung erreicht ist. Hat man die Wurzel bis auf die Hundertstel, vielleicht gar bis auf die Tausendstel richtig, so kann man durch eine einfache Proportion nach der Regula Falsi die Wurzel leicht auf eine oder mehrere der folgenden Stellen genau erhalten. Giebt $x = a$ für eine auf 0 gebrachte Gleichung einen Fehler $-\alpha$ und $x = b$ einen Fehler $+\beta$, wo b um eine Decimaleinheit größer ist als a, so giebt $a + \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ den folgenden Näherungswert, wo der Bruch in Einheiten der letzten Decimalstelle zu nehmen ist. — Diese Methode läßt nie im Stich, führt nie irre, und ist ebenso gut auf transcendente als auf algebraische Gleichungen anwendbar. Wenn die Rechnung weiter vorgerückt ist, so werden die Logarithmen und die abgekürzte Multiplikation gute Dienste thun.

Die Newtonsche Näherungsmethode besteht in der Bestimmung des Fehlers, den man bei der Annahme eines Wertes für x macht, und beruht darauf, daß dieser Fehler in Bezug auf die sonst vorkommenden Größen schon bis zu der Kleinheit gebracht ist, daß die Quadrate und höheren Potenzen desselben als der Null nahe kommend angesehen und die betreffenden Glieder vernachlässigt werden können. Da sich das aber nicht immer übersehen läßt, so thut man gut, die

Methode erst anzuwenden, wenn die Wurzel nach der vorigen Methode bis auf die Zehntel oder Hundertstel genau festgestellt ist, sonst kann man sich nach dieser Methode von der Wurzel leicht entfernen, anstatt sich ihr zu nähern. Ist u ein Näherungswert von x für die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

so ist der Fehler in der Bestimmung der Wurzel oder die Korrektion genähert

$$h = -\frac{u^3 + au^2 + bu + c}{3u^2 + 2au + b}$$

und $u + h = u_1$ der folgende Näherungswert von x. Für u_1 ist dann die Korrektion weiter zu suchen, wie für u u. s. w., bis sie eine gewisse Grenze nicht überschreitet.

Für die Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

würde die Korrektion, wenn $x = u$ ein Näherungswert ist,

$$h = -\frac{u^4 + au^3 + bu^2 + cu + d}{4u^3 + 3au^2 + 2bu + c}$$

und $u + h = u_1$ der zweite Näherungswert sein. Der Schüler wird leicht herausbringen, wie die Korrektion sein muß für die Gleichungen des 5. und 6. Grades

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0.$$

Die Methode der Kettenbrüche beruht darauf, daß man die Wurzel einer Gleichung als einen Kettenbruch darzustellen sucht, so daß man sich dem wahren Werte der Wurzel um so mehr nähert, je weiter man den Kettenbruch entwickelt. Ist u die ganze Zahl, welche der Wurzel zunächst liegt, so setzt man $x = u + \frac{1}{x_1}$ in der Gleichung, sucht für x_1 wieder die am nächsten kommende ganze Zahl u_1, setzt $x_1 = u_1 + \frac{1}{x_2}$ u. s. w., daß man schließlich erhält

$$x = u + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{u_3 + \ldots}}}$$

Die Glieder des Kettenbruchs geben die Näherungswerte für x. — Diese Methode läßt sich auch bei transcendenten Gleichungen sehr gut anwenden; doch kommt man nach der ersten Methode meistens leichter zum Ziel.

Alle drei Näherungsmethoden geben zur Zeit natürlich nur eine reelle Wurzel der Gleichung. Um die andern reellen Wurzeln, wenn solche vorhanden sind, ebenfalls zu bestimmen, muß man, falls man sie

nicht durch Absonderung der schon gefundenen aufsuchen will, in derselben Weise verfahren.

Für folgende Gleichungen sollen die reellen Wurzeln nach einer der hier angegebenen Näherungsmethoden aufgesucht werden.

1. $x^3 + x = 20$ 2. $x^3 - x = 33$

3. $x^3 + x^2 = 100$ 4. $x^3 - x^2 = 10$

5. $x^3 + x^2 + x = 99$ 6. $x^3 - x^2 + x = 44$

7. $x^3 = 8(x + 3)$ 8. $28x^3 + 3x = 50$

9. $x^3 + 35x + 50 = 10x^2$

10. $x^3 - 6x^2 + 5x + 11 = 0$

11. $x^3 + 3x^2 = 2x + 1$

12. $x^3 - 3x^2 + 3{,}09x + 1 = 0$

13. $x^3 - 6x^2 + 4\frac{1}{2}x + 12 = 0$

14. $x^4 + x = 100$ 15. $x^4 - x = 66$

16. $x^4 + x^3 = 1000$ 17. $x^4 - x^3 = 555$

18. $x^4 + x^3 + x^2 = 88$

19. $x^4 + x^2 + x = 111$

20. $x^4 - 10x^2 + x = 61$

21. $2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1 = 0$

22. $x^4 - 3x^2 - 2x + 2\frac{9}{16} = 0$

23. $3x^4 - 2x^3 - 21x^2 - 4x + 11 = 0$

24. $10x^4 - 7x^3 - 15x^2 + 2x + 3\frac{1}{2} = 0$

---

25. $x + \log x = 5$ 26. $x - \log x = 2$

27. $x = 20 \log x$ 28. $x \log x = 7$

29. $x^x = 100$ 30. $\sqrt[x]{x} = \frac{1}{2}$

Anhang 1.

Verkürzte Multiplikation und Division der Decimalbrüche.

A. Multiplikation.

Erhebe zum Quadrat:

1. 3,1622776	2. 1,7320508	3. 5,0990195
4. 8,0622577	5. 8,3666002	6. 8,7749644
7. 9,9498744	8. 10,2474387	9. 21,9772611
10. 1,6124512	11. 3,8078866	12. 0,9486833

Erhebe zum Kubus:

13. 1,58740	14. 2,15443	15. 2,28943
16. 0,793701	17. 0,386403	18. 0,170998
19. 1,75765	20. 3,78675	21. 8,15830

Berechne folgende Produkte:

22. 1,390907 . 2,552473 . 3,943382
23. 7,447662 . 4,539647 . 2,987305
24. 2,948829 . 2,166012 . 0,782816
25. $2,229990 . (1,114995^2 + 3 . 0,847454^2)$
26. $1,148505 . (0,574252^2 + 3 . 1,913922^2)$
27. 3,011050 . 1,604996 . 1,079490 . 1,073436
28. 9.240242 . 2,135349 . 1,619022 . 0,719985
29. $7,950648 . 1,075910 . (0,562631^2 + 0,708350^2)$
30. $3,647587 . 1,372071 . (2,509829^2 + 1,375855^2)$
31. $(1,582346^2 + 1,667420^2)(3,164692^2 + 2,984860^2)$

B. Division.

1. 189,35 : 19,455076
2. 140,256 : 264,8169179
3. 39,6666 . . . : 10,90871212
4. 7,0128 : 16,7484925
5. 21,4285714 : 1,732050807
6. 8,3333 . . . : 22,3606798
7. 0,4616161 . . . : 2,4494898
8. 99 : 4,9749372
9. 18,125 : 12,04159495
10. 11 : 4,69041576
11. (0,2784 : 0,452740) : 0,452740
12. (0,007572 : 0,155857) : 0,155857
13. (0,024333 . . . : 0,417934) : 0,417934
14. (0,1111 . . . : 0,822071) : 0,822071

Anhang 2.

Verkürzte Ausziehung der Quadratwurzel.

Man kann bei der Ausziehung der Quadratwurzel ein ähnliches Verfahren anwenden, wie bei der verkürzten Division. Das Quadrat der neu gefundenen Ziffer hat auf eine gewisse Anzahl der folgenden Ziffern keinen Einfluß, bleibt also unberücksichtigt. Das Verfahren ist aus folgendem Schema ersichtlich:

$$\sqrt{260} = 16,1245155$$

```
        1
    2 | 160
      | 156
   32 | 400
      | 321
  322 | 7900
      | 6444
 3224 | 145600
      | 128976
32248 | 16624
      | 16124
           500
           322
           178
           161
            17
            16
             1
```

Bis zum Rest 16624 ist das gewöhnliche Verfahren angewendet. Dann sind keine Nullen weiter heruntergezogen. Der neue Divisor würde 32248 sein. Die letzte Ziffer, hier 8, ist zu streichen und nur zur Korrektur für das nächste Produkt, hier 16124 zu benutzen. Die vier letzen Stellen der Wurzel (5155) werden dann nach den Regeln der verkürzten Division gefunden. Bei der ersten Division ist außer 8 keine Stelle im Divisor zu streichen. Bei jedem folgenden Reste ist vor der Division der Divisor um eine Stelle zu kürzen. Um eine Wurzel auf $2n$ oder $2n + 1$ Stellen zu berechnen, genügt es, $n + 1$ Stellen in der gewöhnlichen Weise zu berechnen und die übrigen $n - 1$ oder n Stellen durch einfache Division zu finden. Um eine Wurzel auf 4, 5, 6, 7, 8, 9 Stellen zu berechnen, wird man dieselbe daher zunächst nach dem gewöhnlichen Verfahren bezw. auf 3, 3, 4, 4, 5, 5 Stellen berechnen müssen, bevor man zu dividieren anfängt.

Anhang 3.

Elementare Berechnungen der Logarithmen.

1. Interpolationsmethode. Interpolieren heißt dazwischen einschalten. Sind α und β bez. die Logarithmen zweier Zahlen a und b, so ist $\log \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Da nun $\sqrt{ab}$ zwischen a und b liegt, so hat man damit zwischen a und b eine Zahl eingeschaltet, deren Logarithmus man ebenfalls kennt, wenn die Logarithmen der Zahlen a und b bekannt sind. Die Logarithmen der Zahlen 1 und 10 sind bez. 0 und 1. Soll man daher den Logarithmus einer Zahl suchen, die zwischen 1 und 10 liegt, so muß man zwischen 1 und 10 so lange interpolieren, bis man auf jene Zahl kommt. Hat man z. B. log 6 zu bestimmen, so ist der Anfang der Rechnung:

$$A = 1 \qquad \log A = 0$$
$$B = 10 \qquad \log B = 1$$
$$C = \sqrt{AB} = 3{,}162 \qquad \log C = 0{,}5$$
$$D = \sqrt{BC} = 5{,}623 \qquad \log D = 0{,}75 \text{ u. s. w.}$$

Jetzt ist zwischen B und D zu interpolieren. Das Verfahren muß so lange fortgesetzt werden, bis man links nahe genug auf 6 kommt. Dann steht rechts log 6. Diese äußerst mühsame Methode haben die Erfinder der Logarithmen zur Berechnung der ersten Tafeln benutzt. Je weiter die Rechnung vorrückt, desto leichter wird sie, weil man um so mehr Zahlen gefunden hat, deren Logarithmen man kennt, folglich die Grenzen, zwischen denen eine Zahl liegt, deren Logarithmus man sucht, immer enger werden und daher die Zahl der nötigen Interpolationen stark abnimmt.

2. Long'sche Methode. Man berechnet durch wiederholtes Ausziehen der Quadratwurzel nach einander $\sqrt{10}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[8]{10}$ u. s. w. und die zugehörigen Logarithmen. Dann hat man auch $\sqrt{100}$, $\sqrt[4]{100}$ u. s. w., ebenso $\sqrt{1000}$, $\sqrt[4]{1000}$ u. s. w. So bildet man eine logarithmische Hilfstabelle, die sich in ihren Anfängen auf 3 Decimalstellen so gestaltet:

N	L	N	L
10,000	1,000	1,037	$0{,}015_5$
3,162	0,500	1,018	0,008
1,778	0,250	1,009	0,004
$1{,}333_5$	0,125	$1{,}004_5$	0,002
1,155	$0{,}062_5$	1,002	0,001
1,075	0,031	$1{,}000_5$	$0{,}000_5$

Um nun log 6 mit Hilfe einer solchen Tabelle zu bestimmen, zerlegt man 6 in lauter solche Faktoren, die links unter N vorkommen. Zu dem Zwecke sucht man unter N die Zahl, welche nächst kleiner als 6 ist, d. h. 3,162, und dividiert 6 : 3,162. Das giebt 1,898. Man

findet weiter 1,898 : 1,778 = 1,068 u. s. f., bis der Quotient 1 wird. So erhält man

$$6 = 3{,}162.\ \ 1{,}778.\ \ 1{,}037.\ \ 1{,}018.\ \ 1{,}009.\ \ 1{,}002.\ \ 0{,}000_5,$$

also

$$\log 6 = 0{,}500 + 0{,}250 + 0{,}015_5 + 0{,}008 + 0{,}004 + 0{,}001 + 0{,}000_5,$$

das heißt

$$\log 6 = 0{,}779$$

Der französische Mathematiker Long, welcher zu Anfang des vorigen Jahrhunderts lebte, berechnete $\sqrt[10]{10}$, $\sqrt[100]{10}$ u. s. w. Zu dem Zwecke muß man auch die 5. Wurzel ausziehen. Das ist sehr umständlich. Die Anwendung der Hilfstabelle ist dann freilich etwas einfacher, beruht aber auf dem oben angegebenen Prinzip, der Zerlegung der Zahl in Faktoren, deren Logarithmen bereits gefunden sind. — Von wem die vereinfachte Methode herrührt, ist mir unbekannt; ich habe sie zuerst in Baltzer, Elemente der Mathematik, gefunden.

Anhang 4.

Berechnung der Logarithmen durch Reihen.

Man muß die Logarithmen der Zahlen durch Reihen auszudrücken suchen, die möglichst stark konvergieren. Man setzt zunächst, um überhaupt eine Reihenentwickelung zu erhalten,

$$(1)\qquad \log(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots,$$

wo A, B, C, D u. s. w. so zu bestimmen sind, daß die Gleichung den über Logarithmen aufgestellten Gesetzen genügt und für alle Werte von x, für welche die Reihe rechts konvergiert, richtig ist. Man ist berechtigt mit Ax anzufangen; ein Glied ohne x kann nicht vorkommen, da die Gleichung sonst durch $x = 0$ nicht erfüllt würde. — Man hat nun einerseits, da $\log(1+x)^2 = 2\log(1+x)$ ist,

$$(2)\quad \log(1+x)^2 = 2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 + \ldots$$

Andrerseits hat man, da $(1+x)^2 = 1 + (2x + x^2)$ ist, indem man in (1) $2x + x^2$ statt x setzt,

$$\log(1+x)^2 = A(2x + x^2) + B(2x + x^2)^2 + \ldots,\ \text{d. h.}$$

$$(3)\ \log(1+x)^2 = 2Ax + (A + 4B)x^2 + (4B + 8C)x^3 + (B + 12C + 16D)x^4 + \ldots$$

Aus der Vergleichung der Reihen (2) und (3) folgt

$$A + 4B = 2B,\ \text{d. h.}\ B = -\tfrac{1}{2}A$$

$$4B + 8C = 2C,\ \text{also}\ C = \tfrac{1}{3}A$$

$$B + 12C + 16D = 2D,\ \text{also}\ D = -\tfrac{1}{4}A\ \text{u. s. w.}$$

Setzt man A = M, so erhält man aus (1)

$$\text{I.}\quad \log(1+x) = M\left(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots\right)$$

Die Reihe rechts heißt die logarithmische Reihe. Sie ist zuerst von Merkator erfunden und 1668 bekannt gemacht. Auch Leibnitz († 1716) und Newton († 1727) scheinen selbständig auf dieselbe gekommen zu sein. — Setzt man —x statt x, so erhält man

$$\text{II.}\quad \log(1-x) = -M\left(x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots\right)$$

Subtrahiert man II von I, so erhält man

$$\text{III.}\qquad \log\frac{1+x}{1-x} = 2M\left(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \ldots\right)$$

Setzt man hierin

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{u^2}{u^2-1}, \text{ also } x = \frac{1}{2u^2-1},$$

so giebt das

$$\text{IV.}\quad \log u = \tfrac{1}{2}[\log(u+1) + \log(u-1)] + M\left(\frac{1}{2u^2-1} + \frac{1}{3(2u^2-1)^3} + \ldots\right)$$

Setzt man in III

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{z+1}{z}, \text{ also } x = \frac{1}{2z+1},$$

so erhält man

$$\text{V.}\qquad \log(z+1) = \log z + 2M\left(\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3(2z+1)^3} + \ldots\right)$$

Der Faktor M hängt von der Basis des Systems ab und heißt der Modul des Logarithmensystems. Der einfachste Fall ist der, wenn M = 1 ist. Daher nennt man die Logarithmen, deren Modul = 1 ist, die natürlichen Logarithmen. Ihre Basis wird stets mit e bezeichnet.

Es kommt nun zunächst darauf an, den Modul M für die Logarithmen zu bestimmen, deren Basis 10 ist. Setzt man in III 1) $x = \frac{1}{3}$, 2) $x = \frac{1}{9}$, so erhält man, wenn man allgemein die Reihe $x + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$ mit (x) bezeichnet,

$$(4)\qquad \left|\begin{array}{r} \log 2 = 2M(\tfrac{1}{3}) \\ 1 - 3\log 2 = 2M(\tfrac{1}{9}) \end{array}\right|$$

Bei diesen Gleichungen, welche zwei Unbekannte, log 2 und M enthalten, liegt die logarithmische Basis 10 zum Grunde; denn es ist log 10 = 1 gesetzt. Die Reihen $(\frac{1}{3})$ und $(\frac{1}{9})$ sind zu berechnen. Man findet

$$\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \ldots = 0{,}3465\,7359\,03$$

$$\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \ldots = 1{,}1115\,7177\,57$$

Dann geben die Gleichungen (4)

$$M = 0{,}4342\,9448$$

$$\log 2 = 0{,}3010300$$

Um die Logarithmen der nächsten Primzahlen zu erhalten, benutzt man am besten die Reihen I und II. Man setzt $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{50} = (0{,}02)$ und $\frac{1}{1000}$ das giebt

1) $\log 11 = 1 + M\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10^3} + \cdot\cdot\right)$

2) $2 \log 3 = 1 - M\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10^3} + \cdot\cdot\right)$

3) $\log 17 = 2 - \log 6 + M\left(\frac{1}{50} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{50^2} + \cdot\cdot\right)$

4) $2 \log 7 = 2 - \log 2 - M\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{50^2} + \cdot\cdot\right)$

5) $\log 13 = 3 - (\log 7 + \log 11) + M\left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1000^2}\right)$

6) $\log 37 = 3 - 3 \log 3 - M\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1000^2}\right)$.

Abgesehen von den Faktoren $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ u. s. w. ergeben sich die Glieder der Reihen 1), 2), 5) und 6) durch bloßes Rücken des Kommas in M, die Glieder der Reihen 3) und 4) durch wiederholte Multiplikation mit 0,02. Von 1) und 2) genügen, um die Logarithmen auf 7 Stellen zu berechnen, 6 Glieder, von 3) und 4) 4 Glieder, von 5) und 6) 2 Glieder.

Für die Berechnung der Logarithmen von 3, 7 und 11 eignen sich auch die Reihen, welche man aus I für $x = \frac{1}{80}, \frac{1}{2400}$ und $\frac{1}{120}$ erhält, sehr gut, da sie äußerst schnell konvergieren. In den Entwickelungen von 1) bis 6) gehören jedoch dieselben Glieder zweien Reihen an; dadurch wird die Rechnung wesentlich vereinfacht.

Da $\log 5 = 1 - \log 2$ ist, so sind jetzt die Logarithmen aller Zahlen von 2 bis 17 berechnet oder leicht gefunden. Für die folgenden Primzahlen wende man die Formel IV an. Dann genügt schon das erste Glied der Reihe, d. h. eine einfache Division in M. Man hat nach der Formel IV für *siebenstellige Logarithmen aller Primzahlen* von 13 an den Satz:

Der Logarithmus einer Zahl u ist gleich dem Mittel zwischen den Logarithmen der anliegenden Zahlen, vermehrt um $\frac{M}{2u^2-1}$.

Daher hat man sehr einfach:

$$\log 19 = \tfrac{1}{2}(\log 20 + \log 18) + \frac{M}{2.19^2-1}$$

$$\log 23 = \tfrac{1}{2}(\log 24 + \log 22) + \frac{M}{2.23^2-1}$$ u. s. w. bis

$$\log 157 = \tfrac{1}{2}(\log 158 + \log 156) + \frac{M}{2.157^2-1}.$$

Von hier ab genügt in V das erste Glied zur Rechnung. Man hat

$$\log 163 = \log 162 + \frac{2\,M}{2.163-1}$$

$$\log 167 = \log 166 + \frac{2\,M}{2.167-1}$$ u. s. w.

Bezeichnet man die natürlichen Logarithmen mit Log, so hat man aus I, da die Reihe rechts den natürlichen Logarithmus angiebt,

(5) $\log(1+x) = M\,.\,\mathrm{Log}\,(1+x)$, oder $\log a = M\,.\,\mathrm{Log}\,a$,

d. h. der Logarithmus einer Zahl wird gefunden, indem man den natürlichen Logarithmus der Zahl mit dem Modul des Systems multipliziert.

Setzt man in (5) $a = e$, so erhält man, da $\mathrm{Log}\,e = 1$ sein muß,

$$\log e = M$$

$$e = N \log M = N \log 0{,}4342\,9448,$$ d. h.

um die Basis der natürlichen Logarithmen zu finden, hat man in einem andern System nur den Numerus zum Modul, diesen als Logarithmus betrachtet, aufzusuchen. Das giebt

$$e = 2{,}71828\,1828\,..$$

Wie man e in einfacher Weise direkt findet, ersieht man in dem Kommentar zu meinen „Arithmetischen Aufgaben", S. 40.

Anhang 5.

Graphische Darstellungen.

Unter graphischer Darstellung versteht man die Darstellung von Zahlengrößen durch Linien zur leichtern und bessern Veranschaulichung. Die dargestellten Zahlengrößen sind meistens nur verschiedene Werte derselben veränderlichen Größe oder werden doch so gedacht. Man trägt die Werte der Größe nach einem angenommenen Maße in meistens gleichen Abständen als Lote auf einer horizontalen geraden Linie auf und verbindet die Endpunkte dieser Lote durch eine Linie,

die sich der Lage der Punkte möglichst anpaßt. Dann giebt diese Linie ein anschauliches Bild von den verschiedenen Zahlenwerten und ihrem Zusammenhange. Man kann mit einem Blick erkennen, wie und wo die Werte steigen oder fallen, ob schnell oder langsam, und wo die kleinsten und größten Werte liegen.

Beispiele zu derartigen Darstellungen liefern die Wirkungen aller Kräfte, z. B. des Luftdruckes, des Dampfes, der Wärme u. s. w. Besonders läßt sich der Gang der Temperatur am Tage, im Monat, im Jahre passend und leicht graphisch darstellen. Es sollen darnach folgende Aufgaben gelöst werden:*)

1. Es soll der Gang der Temperatur, welcher durchschnittlich in der letzten Woche des Juli täglich stattfand, graphisch dargestellt oder es soll die Tageskurve für die Zeit konstruiert werden. Das Thermometer zeigte von 12 Uhr nachts anfangend bis 12 Uhr nachts zu je zwei Stunden durchschnittlich 13, 11, 11, 13, 15, 18, 21, 23, 23, 20, 17, 15, 13 Grad Reaumur. Das Minimum trat um $3\frac{1}{2}$ Uhr morgens ($10\frac{1}{2}^0$), das Maximum (24^0) nachmittags um 3 Uhr ein.

2. Es soll für einen Ort der jährliche Gang der Temperatur nach dem mittleren monatlichen Durchschnitt graphisch dargestellt oder die Jahreskurve konstruirt werden. Die mittlere Temperatur betrug in den Monaten Januar, Februar u. s. w. nach einander bezw. —3, —1, 2, 5, 9, 14, 16, 15, 13, 10, 6, 2 Grad.

Obgleich diese Darstellungen die Inkorrektheit haben, daß die Abstände und die Lote nicht nach demselben Maße gemessen sind und gemessen werden können und man daher die Linien nach Belieben mehr oder weniger gestreckt machen kann, indem man die Abstände der Lote vergrößert oder verkleinert, so geben die Linien doch von dem Gange der Temperatur ein anschauliches Bild.

Die Wärme wirkt kontinuierlich; die dargestellten Größen gingen kontinuierlich in einander über. Die graphische Darstellung wird jedoch auch vielfach bei diskontinuierlichen Zahlenwerten angewendet, obgleich sie hier, genau genommen, nicht ganz am Platze ist. Die Werte werden hier, wenn kein Grund für eine andere Ordnung vorhanden ist, am besten der Größe nach geordnet. Es soll darnach graphisch dargestellt werden:

3. Die Dichtigkeit der Bevölkerung in Deutschland. Es kommen auf 1 qkm in Sachsen 200, Grz. Hessen 120, Elsaß-Lothringen 110, Baden 105, Württemberg 100, Preußen 80, Bayern 70, Oldenburg 50, Mecklenburg-Schwerin 45, Mecklenburg-Strelitz 35 E. — Will man das Bild noch vervollständigen, so ziehe man, da 84 die mittlere Dichtigkeit von Deutschland ist, in diesem Ab-

*) Zu diesen Zeichnungen ist carriertes Papier zu verwenden. Die Quadrate im Papier sind als Maß zu benutzen. Es sind für die erste Aufgabe auf einer horizontalen Linie 13, für die zweite Aufgabe 12 Lote in gleichen Abständen zu errichten.

stande eine Parallele. Auch kann man mit roter Tinte an den geeigneten Stellen ohne Lote fein hinzufügen: Reuß ältere Linie 160, Reuß jüngere Linie 120, Altenburg 115, Gotha, Anhalt und Lippe 100, Braunschweig 95, Weimar, Meiningen und Rudolstadt 85, Sondershausen und Schaumburg 80, Waldeck 50 E.*)

4. Die Dichtigkeit der Bevölkerung in Preußen. Es kommen auf 1 qkm in Rheinland 150, Westfalen 101, Schlesien 100 Hessen-Nassau 99, Sachsen 90, Brandenburg 85, Schleswig-Holstein 59, Posen 59, Westpreußen 55, Hannover 53, Ostpreußen 52, Pommern 51 E. Die durchschnittliche Dichtigkeit in Preußen ist 80.

5. Die Dichtigkeit der Bevölkerung der wichtigsten Länder der Erde. Es kommen auf 1 qkm in Belgien 190, Gr.-Britannien und Irland 110, Italien 95, Deutschland 84, Frankreich 70, Österreich-Ungarn 60, Dänemark 50, Spanien 33, Rußland 14, Verein. Staaten 5, Brasilien $1\frac{1}{2}$ E. Dazu kann der Vollständigkeit halber noch fein ohne Lote notiert werden: Niederlande 120, China 100, Japan 90, Schweiz 70, Portugal 50, Griechenland 33, Türkei 25, Skandinavien 9, Mexiko 5.

6. Die Zahl der Elementarschüler in den wichtigsten Kulturstaaten. Es kommen auf je 10 000 Einwohner in Deutschland 1500, Frankreich 1270, Verein. Staaten 1270, Belgien 1240, Gr.-Britannien und Irland 1000, Niederlande 910, Österreich-Ungarn 890, Italien 700, Spanien 500, Rußland 150.

Mathematisch gesetzmäßig gebildete Linien erhält man bei graphischen Darstellungen dann, wenn die Länge der Lote und die Abstände ihrer Fußpunkte von einem festen Punkte der horizontalen Linie nach einem bestimmten Gesetze von einander abhängen. Ein solches Gesetz wird mathematisch durch eine Gleichung mit zwei Unbekannten x und y ausgedrückt. Giebt man in einer solchen Gleichung x beliebige Werte 0, 1, 2, 3 u. s. w., so liefert die Gleichung für y die entsprechenden. Die Werte der Größen x und y sind in diesem Falle nicht fest bestimmt, die Größen sind veränderlich. Im Gegensatz zu diesen heißen alle Größen mit festen Werten konstante Größen. Durch x werden die Abstände der Fußpunkte der Lote von einem angenommenen festen Punkte, dem Nullpunkte, durch y die entsprechenden Längen der Lote bezeichnet. Man giebt x meistens gewisse Werte und sucht die entsprechenden Werte von y, stellt also y so dar, als ob sein Wert von dem Werte von x abhängt. In diesem Falle heißt x die unabhängige Veränderliche, y die abhängige Veränderliche.

Zur Konstruktion zieht man zwei feste gerade Linien, die sich senkrecht schneiden. Diese heißen die Achsen, spezieller die Koordi-

*) Zu dieser und den drei folgenden Aufgaben sind die geographisch-statistischen Tabellen von O. Hübner benutzt.

naten-Achsen, die horizontale die X-Achse, die vertikale die Y-Achse. Die Werte von x werden auf der X-Achse abgeschnitten und heißen Abscissen; daher heißt die X-Achse auch die Abscissen-Achse. Die positiven Werte werden rechts, die negativen links abgeschnitten. Die Werte von y werden als Lote auf der X-Achse in den Endpunkten von x aufgetragen und heißen Ordinaten. Sie werden auf der Y-Achse gemessen; daher heißt diese auch die Ordinaten-Achse. Die positiven werden nach oben, die negativen nach unten aufgetragen. Der Schnittpunkt der Achsen bildet den Nullpunkt oder den Anfangspunkt der Koordinaten. Je zwei entsprechende Werte von x und y, z. B. $x = a$, $y = b$, welche der Gleichung genügen, bestimmen einen Punkt und heißen die Koordinaten des Punktes. Um diesen zu erhalten, errichtet man im Punkte $x = a$ auf der X-Achse ein Lot $y = b$. Indem man nun für x beliebig viele Werte annimmt, erhält man für y ebenso viele entsprechende Werte und folglich auch ebenso viele Punkte. Zieht man durch alle so gewonnenen Punkte eine Linie, so ist diese Linie eine graphische Darstellung der Gleichung. Umgekehrt heißt die Gleichung, welche alle Punkte liefert, die in einer Linie liegen, die Gleichung der Linie.

Setzt man $y = 0$, so geben die zugehörigen Werte von x die Punkte, wo die Linie die X-Achse schneidet. Setzt man $x = 0$, so geben die zugehörigen Werte von y die Punkte, wo die Linie die Y-Achse schneidet. Diese sind bei jeder Linie aufzusuchen und anzugeben. Bei einer Gleichung vom ersten Grade entspricht jedem Wert von x nur ein Wert von y, und umgekehrt. Ist die Gleichung für y vom zweiten Grade, so entsprechen jedem Wert von x zwei Werte von y. Ist sie auch für x vom zweiten Grade, so entsprechen auch jedem Werte von y zwei Werte von x.

Alle Gleichungen vom ersten Grade, welche die Form haben $ax + by = c$, stellen gerade Linien dar. Speziell stellt $ax = by$ eine gerade Linie dar, welche durch den Nullpunkt geht; $x = a$ eine gerade Linie, welche der Y-Achse im Abstande a parallel ist; $y = b$ eine gerade Linie, welche der X-Achse im Abstande b parallel ist.

Gleichungen vom zweiten Grade zwischen x und y stellen krumme Linien (Kurven) dar, welche man Kegelschnitte nennt, weil man sie alle durch geeignete Schnitte eines Kegels erhalten kann. Insbesondere muß jede Gleichung, in welcher y oder x ein Maximum oder Minimum haben soll, mindestens vom zweiten Grade sein. Hat y ein Maximum, so erreicht die Linie hier den höchsten Punkt (bildet einen Berg); hat y ein Minimum, so erreicht die Linie hier den niedrigsten Punkt (bildet hier ein Thal). Hat x ein Maximum, so erreicht die Linie hier ihren äußersten Punkt nach rechts; hat es ein Minimum, so erreicht die Linie hier ihren äußersten Punkt nach links.

Folgende Gleichungen drücken gerade Linien aus. Dieselben sollen konstruiert werden. Zwei Punkte genügen zwar zur Konstruktion derselben; der Anfänger hat sich jedoch nicht mit zwei Punkten zu begnügen, er muß mehrere Punkte der Linie aufsuchen und sich überzeugen, daß alle in einer geraden Linie liegen. Bei jeder Aufgabe ist auch anzugeben, wo die Linie die Achsen schneidet und ob sie nach rechts steigt oder fällt.

7. $y = 1\frac{1}{2}x$ 8. $3x + 4y = 0$

9. $y = 2x - 1$ 10. $x = 5 - 2y$

11. $y = 3$ 12. $x = 2$

13. $3x - 2y = 1$ 14. $3x - 2y = 6$

15. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ 16. $\frac{y}{3} - \frac{x}{2} = 1$

Die folgenden Gleichungen sind Gleichungen von Kreisen. Die Kreise sollen graphisch, d. h. aus Punkten konstruiert werden. Es sind so viele Punkte zu berechnen und zu konstruieren, daß über die Gestalt, Lage und Größe des Kreises kein Zweifel mehr obwalten kann. Es ist auch anzugeben, wo der Kreis sein Maximum und wo er sein Minimum, wo er seine äußersten Grenzen nach rechts und nach links erreicht, welches die Koordinaten des Mittelpunktes sind und wie groß der Radius ist. Ähnliches gilt auch von den späteren Aufgaben.

17. $x^2 + y^2 = 25$*) 18. $y = \sqrt{36 - x^2}$

19. $y = -1 + \sqrt{9 - x^2}$ 20. $x = 2 + \sqrt{16 - y^2}$

21. $x^2 + y^2 = 10x$ 22. $x^2 + y^2 = 2y + 35$

23. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 36$ 24. $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$

Die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkt der Koordinaten liegt und dessen Radius $= r$ ist, ist $x^2 + y^2 = r^2$. Diese Gleichung heißt die Normalgleichung des Kreises.

Die folgenden Gleichungen sind Gleichungen von länglich runden geschlossenen Linien, welche Ellipsen heißen. Die Ellipse liegt symmetrisch gegen einen längsten und einen kürzesten Durchmesser. Diese heißen die Achsen der Ellipse. Der Schnittpunkt der Achsen ist der Mittelpunkt der Ellipse. Bei den vier ersten und den beiden letzten fällt der Mittelpunkt in den Anfangspunkt der Koordinaten, bei 27—32 nicht. Die Achsen der Ellipsen liegen in den Koordinaten-Achsen oder sind ihnen parallel, nur nicht bei 33 und 34. Bei 25—32 sind die Maxima und Minima leicht zu erkennen, bei 33 und 34 müssen sie erst bestimmt werden.

*) Man hat $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ zu setzen und die zugehörigen Werte von y zu bestimmen.

25. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 26. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$

27. $y = \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$ 28. $x = \frac{3}{4}\sqrt{16 - y^2}$

29. $y = \frac{4}{5}\sqrt{10x - x^2}$ 30. $x = \frac{4}{7}\sqrt{40 + 6y - y^2}$

31. $\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$ 32. $\frac{(x+2)^2}{49} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

33. $x^2 - xy + 2y^2 = 20$ 34. $3x^2 - 2xy + 5y^2 = 40.$

Die Normalform der Gleichung einer Ellipse ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Dann fallen die Achsen der Ellipse mit den Koordinaten-Achsen zusammen, der Mittelpunkt der Ellipse liegt im Nullpunkt, a ist die halbe große und b die halbe kleine Achse. Man erhält die Gleichung einer Ellipse, wenn man alle Punkte aufsucht, die von zwei festen Punkten A und B in Summa eine Entfernung $= 2a$ haben. Ist dann $AB = 2c$, so ist $a^2 = b^2 + c^2$. — Geometrisch erhält man eine Ellipse, wenn man durch einen Kegel einen Schnitt legt, der zwei gegenüberliegende Seitenlinien trifft. Die Ellipse ist ein Kegelschnitt.

Die folgenden Gleichungen sind Gleichungen von nicht geschlossenen krummen Linien, welche Parabeln heißen. Die Parabel liegt symmetrisch gegen eine gerade Linie, welche die Achse der Parabel heißt. Für die ersten acht Gleichungen liegt die Achse der Parabel in einer Koordinaten-Achse oder ist einer derselben parallel. Die beiden letzten Parabeln liegen schief gegen die Achsen.

35. $y^2 = x$ 36. $y = \sqrt{3x}$

37. $x^2 = 2y$ 38. $x = \sqrt{5y}$

39. $y^2 = 4x - 1$ 40. $x^2 = 2y + 3$

41. $y^2 = x + y$ 42. $x^2 = 3x - 2y + 1$

43. $(x - y)^2 = 3x$ 44. $(3x - 2y)^2 = y$

Die Normalform der Gleichung einer Parabel ist $y^2 = 2px$. Dann ist die X-Achse die Achse der Parabel und der Scheitelpunkt der Parabel liegt im Nullpunkt der Koordinaten. Man kommt auf die Gleichung einer Parabel, wenn man die Mittelpunkte aller Kreise sucht, welche eine gerade Linie L berühren und durch einen festen Punkt P gehen. Das von P auf L gefällte Lot wird X-Achse, die Länge des Lotes ist $= p$, und die Mitte desselben wird Anfangspunkt der Koordinaten. — Geometrisch erhält man die Parabel, wenn man einen Kegel parallel einer Seitenlinie durchschneidet. Die Parabel ist ebenfalls ein Kegelschnitt.

Die folgenden Gleichungen sind Gleichungen von krummen Linien, welche zwei unendliche getrennte Zweige haben. Sie heißen Hyperbeln. Sie bilden die dritte und letzte Klasse der Linien zweiter Ordnung. Die Hyperbel liegt gegen zwei gerade Linien, von denen die eine zugleich ein Durchmesser ist, symmetrisch, diese heißen die Achsen der Hyperbel. Der Schnittpunkt der Achsen ist der Mittelpunkt der Hyperbel. In den folgenden Aufgaben fallen die Achsen der Hy-

perbel in die Koordinaten-Achsen oder sind ihnen parallel, nur die beiden letzten liegen schief. Der Mittelpunkt der Hyperbel liegt für alle im Anfangspunkt der Koordinaten, ausgenommen bei 49 und 50.

45. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ 46. $\frac{x^3}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$

47. $y = \frac{1}{4}\sqrt{x^2 - 16}$ 48. $x = 2\sqrt{y^2 + 9}$

49. $y = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 6x}$ 50. $x = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{y^2 - 6y + 25}$

51. $x - y = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 9}$ 52. $2x - y = \frac{6}{5}\sqrt{y^2 + 25}$

Die **Normalform der Gleichung einer Hyperbel** ist $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Dann fallen die Achsen der Hyperbel in die Koordinaten-Achsen, der Mittelpunkt liegt im Anfangspunkt der Koordinaten, und a und b sind die halben Achsen. Man findet die Gleichung einer Hyperbel, wenn man Punkte sucht, deren Entfernungen von zwei festen Punkten eine konstante Differenz 2a haben. Setzt man dann die Entfernung der beiden festen Punkte von einander = 2c, so ist $c^2 = a^2 + b^2$. — Geometrisch erhält man eine Hyperbel, wenn man einen Doppelkegel parallel der Achse durchschneidet. Die Hyperbel ist ebenfalls ein **Kegelschnitt**.

2.80
2

Wenn die linken Seiten der Gleichungen von der nämlichen (z. B. der ersten) Dimension sind, die rechten Seiten beider Gleichungen ebenfalls von derselben (z. B. der ersten) Dimension sind, so kann man jedesmal durch Division beider Gleichungen eine reine Gleichung erhalten, welche nur das Verhältniß der beiden Unbekannten $\frac{y}{x} = t$ als eine Unbekannte enthält.